

## 5. LÖSUNG NACH DER KRAFTMETHODE

Im vorangehenden Kapitel wurden die Grundgleichungen der Verschiebungs- bzw. Kraftmethode mit (4.1.27) bzw. (4.2.20) und (4.2.29) abgeleitet. In diesem Kapitel wird die Lösung des Gleichungssystems der Kraftmethode erleutert. Hierfür wird zunächst der Aufbau der Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}$  beschrieben.

### 5.1 Der Aufbau der Gleichgewichtsmatrix

In Gleichung (4.2.17) wird die nicht reduzierte Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}^*$  definiert:

$$\underline{N}^* = \underline{a}^T \underline{B}.$$

Hierbei verknüpft  $\underline{a}$  nach (4.1.21) die globalen Elementknotenverschiebungen  $\underline{u}$  mit den Tragwerksknotenverschiebungen  $\underline{U}$ . Die Transformationsmatrix  $\underline{a}$  ist nicht "reduziert", d.h. die Starrkörperverschiebungen des Tragwerks sind in  $\underline{U}$  enthalten.

Das Gesamttragwerk hat  $s$  Elemente und  $t$  Knoten. Unter der Annahme, daß ein Knoten  $\mu$  Freiheitsgrade hat, ist die Anzahl aller Verschiebungen

$$\xi = \mu t.$$

Die Dimension von  $\underline{U}$  ist  $\xi \times 1$ . Hat das  $i$ -te Element insgesamt  $\rho^i$  Knoten mit jeweils  $\mu$  Freiheitsgraden, so ergibt sich die Dimension von  $\underline{u}$  zu  $z \times 1$ . Hierbei gilt:

$$z = \mu \sum_{i=1}^s \rho^i.$$

Man betrachte nun die Verknüpfung des  $i$ -ten Elementes am  $k$ -ten Knoten des Tragwerks (Bild 5.1). Die Verschiebungen

$\underline{u}_k^i$  (Knoten  $k$ , Element  $i$ ) sind mit den Verschiebungen  $\underline{U}$  des Tragwerks durch

$$\underline{u}_k^i = [\underline{a}_{k1}^i \ \underline{a}_{k2}^i \ \dots \ \underline{a}_{kt}^i] \{\underline{U}_1 \ \underline{U}_2 \ \dots \ \underline{U}_t\} \quad (5.1.1)$$

verknüpft. Hierbei werden durch  $\underline{a}_{kj}^i$  die Verschiebungen  $\underline{u}_k^i$  mit den Verschiebungen  $\underline{U}_j$  am Knoten  $j$  des Tragwerks verknüpft.

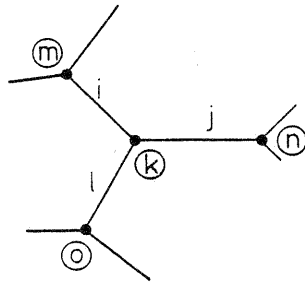


Bild 5.1  $k$ -ter Knoten des Tragwerks

Die Untermatrizen  $\underline{a}_{kj}^i$  sind quadratisch. Nach Definition von  $\underline{a}$  muß außerdem

$$\underline{a}_{kj}^i = \left\{ \begin{array}{ll} \underline{0}_{\mu \times \mu} & \text{für } j \neq k \\ \underline{I}_{\mu \times \mu} & \text{für } j = k \end{array} \right\} j = 1, 2, \dots, t \quad (5.1.2)$$

gelten.  $\underline{0}_{\mu \times \mu}$  ist eine Null- und  $\underline{I}_{\mu \times \mu}$  eine Einheitsmatrix. Daraus folgt, daß die Transformationsmatrix  $\underline{a}$  aus quadratischen Untermatrizen besteht, die Null- oder Einheitsmatrizen sind.

Für alle Knotenverschiebungen der Elemente von Bild 5.1 erhält man die folgende Beziehung (5.1.1):



oder in ausgeschriebener Form

$$\underline{P}_k = \begin{bmatrix} 1 \dots & & & & & & \dots & s \\ \underline{0} & \left[ \begin{array}{c|c} \underline{0} & I_{\mu \times \mu} \\ \hline \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c|c} \underline{0} & I_{\mu \times \mu} \\ \hline \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c|c} \underline{0} & I_{\mu \times \mu} \\ \hline \end{array} \right] & \dots & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{S} \quad (5.1.3)$$

mit

$$\underline{S} = \left\{ \dots \left[ \begin{array}{c|c} \underline{S}_m^i & \underline{S}_k^i \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \underline{S}_n^j & \underline{S}_k^j \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \underline{S}_o^l & \underline{S}_k^l \\ \hline \end{array} \right] \dots \right\}. \quad (5.1.4)$$

Wobei  $\underline{S}_k^i$  die Elementkräfte am k-ten Knoten des i-ten Elementes sind.  $\underline{S}_k^i$  läßt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen (4.2.14) des Elementes und durch entsprechende Unterteilung von  $\underline{B}^i$  definieren.

$$\begin{bmatrix} \underline{S}_m^i \\ \underline{S}_k^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_m^i \\ \underline{B}_k^i \end{bmatrix} \hat{\underline{F}}^i. \quad (5.1.5)$$

Daraus ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen am k-ten Knoten des Elementes:

$$\underline{S}_k^i = \underline{B}_k^i \hat{\underline{F}}^i. \quad (5.1.6)$$

(5.1.6) wird für alle Elemente des Tragwerks gebildet. Setzt man (5.1.6) für alle Elemente in (5.1.4) ein, so ergibt sich  $\underline{S}$  zu

$$\underline{S} = \left\{ \dots \left[ \begin{array}{c|c} \underline{B}_m^i \hat{\underline{F}}^i & \underline{B}_k^i \hat{\underline{F}}^i \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \underline{B}_n^j \hat{\underline{F}}^j & \underline{B}_k^j \hat{\underline{F}}^j \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \underline{B}_o^l \hat{\underline{F}}^l & \underline{B}_k^l \hat{\underline{F}}^l \\ \hline \end{array} \right] \dots \right\}. \quad (5.1.7)$$

Die Dimension von  $\underline{S}_k^i$  ist  $\mu \times 1$ . Soll  $\omega^i$  die Anzahl der linear unabhängigen Kräfte  $\hat{\underline{F}}^i$  des i-ten Elementes angeben, so hat jede Untermatrix von  $\underline{B}^i$  nach (5.1.6) die Dimension  $\mu \times \omega^i$ . Daher ist die Matrizenmultiplikation von (5.1.3) blockweise ausführbar. (5.1.3) mit (5.1.7) liefert

$$\underline{P}_k = \underline{B}_k^i \hat{F}^i + \underline{B}_k^j \hat{F}^j + \underline{B}_k^l \hat{F}^l \quad (5.1.8)$$

oder allgemeiner in Matrizenform

$$\underline{P}_k = \begin{bmatrix} 1 \dots & i & j & l & \dots s \\ \underline{0} & \left| \underline{B}_k^i \right| & \left| \underline{B}_k^j \right| & \left| \underline{B}_k^l \right| & \underline{0} \end{bmatrix} \hat{F} \quad (5.1.9)$$

mit

$$\hat{F} = \{ \hat{F}^1 \hat{F}^2 \dots \hat{F}^i \hat{F}^j \hat{F}^l \dots \hat{F}^s \}.$$

Bezeichnet man mit  $\underline{N}_k^*$  die  $\underline{P}_k$  entsprechende Blockzeile von  $\underline{N}^*$ , so hat  $\underline{N}^*$  die Form

$$\underline{N}^* = \{ \underline{N}_1^* \underline{N}_2^* \dots \underline{N}_k^* \dots \underline{N}_t^* \}.$$

Am k-ten Knoten gilt mit  $\underline{N}_k^*$  nach (4.2.17)

$$\underline{P}_k = \underline{N}_k^* \hat{F}. \quad (5.1.10)$$

Ein Vergleich mit (5.1.9) liefert

$$\underline{N}_k^* = \begin{bmatrix} 1 \dots & i & j & l & \dots s \\ \underline{0} & \left| \underline{B}_k^i \right| & \left| \underline{B}_k^j \right| & \left| \underline{B}_k^l \right| & \underline{0} \end{bmatrix}. \quad (5.1.11)$$

(5.1.9) gibt die Gleichgewichtsbedingungen am k-ten Knoten des Tragwerks an. (5.1.11) ist die k-te Blockzeile der Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}^*$ .

Aus der Herleitung von (5.1.11) gewinnt man folgende Erkenntnisse:

- a) Die Gleichgewichtsmatrix kann blockweise aufgestellt werden.
- b) Die blockweise Multiplikation von  $\underline{a}^T$  mit  $\underline{B}$  sorgt für die richtige Platzierung der Untermatrizen von  $\underline{B}$  in  $\underline{N}^*$ .
- c) Ist die k-te Blockzeile  $\underline{N}_k^*$  von  $\underline{N}^*$  aufzustellen, so sind die Untermatrizen  $\underline{B}_k^i$  aller mit dem k-ten Knoten verknüpften Elemente in  $\underline{N}_k^*$  abzulegen. Die restlichen Blöcke von  $\underline{N}_k^*$  bleiben Null. Um die Untermatrizen  $\underline{B}_k^i$  auf den zugehörigen Plätzen in  $\underline{N}_k^*$  ablegen zu können, genügt es, die Zuordnung von Element zu Knoten zu wissen.

*Topologiematrix des Tragwerks:*

Zwischen den  $t$  Knoten und  $s$  Elementen des idealisierten Tragwerks besteht eine feste Zuordnung. Die Knoten-Elementzuordnung wird durch die Topologiematrix  $\underline{C}_{txs}$  festgelegt. Die Matrix  $\underline{C}_{txs}$  ist im allgemeinen nicht quadratisch. Ein Element  $C_{ki}$  der Matrix  $\underline{C}$  ist 1, wenn das Element  $i$  mit dem Knoten  $k$  des Tragwerks verknüpft ist und  $C_{ki} = 0$ , wenn das Element  $i$  nicht mit dem Knoten  $k$  des Tragwerks verknüpft ist. In Bild 5.2 ist ein Beispiel für einen Ringträger aus Balkenelementen gegeben.

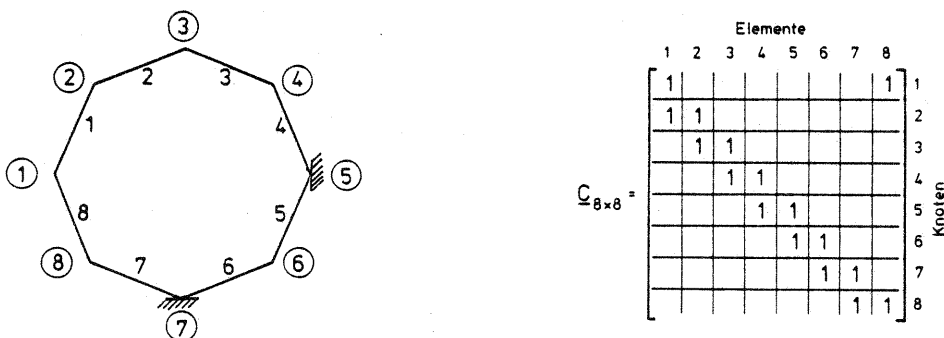


Bild 5.2: Ringträger und Topologiematrix

Der direkte Aufbau der Gleichgewichtsmatrix:

Ist die Topologiematrix gegeben, so ist die Ausführung der Multiplikation  $\underline{a}^T \underline{B}$  aus rechnerischen Gründen nicht sinnvoll. Stattdessen werden die Elementmatrizen  $\underline{B}^i$  aller Elemente analog zu (5.1.5) als Untermatrizen  $(\underline{B}_k^i)_{\mu \times \omega^i}$  aufgestellt. Die Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}^*$  wird wie die Topologiematrix  $\underline{C}$  direkt besetzt:

$$\underline{N}_{ki}^* = \underline{B}_k^i \quad \text{für } C_{ki} = 1 \quad (5.1.12)$$

$$\underline{N}_{ki}^* = 0 \quad \text{für } C_{ki} = 0.$$

Die Besetzung von  $\underline{N}^*$  entspricht in Blockform genau der Besetzung von  $\underline{C}$ . Zu jeder vorhandenen Eins in  $\underline{C}$  gehört eine Untermatrix mit der Dimension  $\mu \times \omega^i$  in  $\underline{N}^*$ . Die Dimension von  $\underline{N}^*$  ergibt sich zu  $\xi$  Zeilen und  $m = \sum_{i=1}^s \omega^i$  Spalten. Für das Tragwerk von Bild 5.2 ist  $\underline{N}^*$  in Bild 5.3 dargestellt.

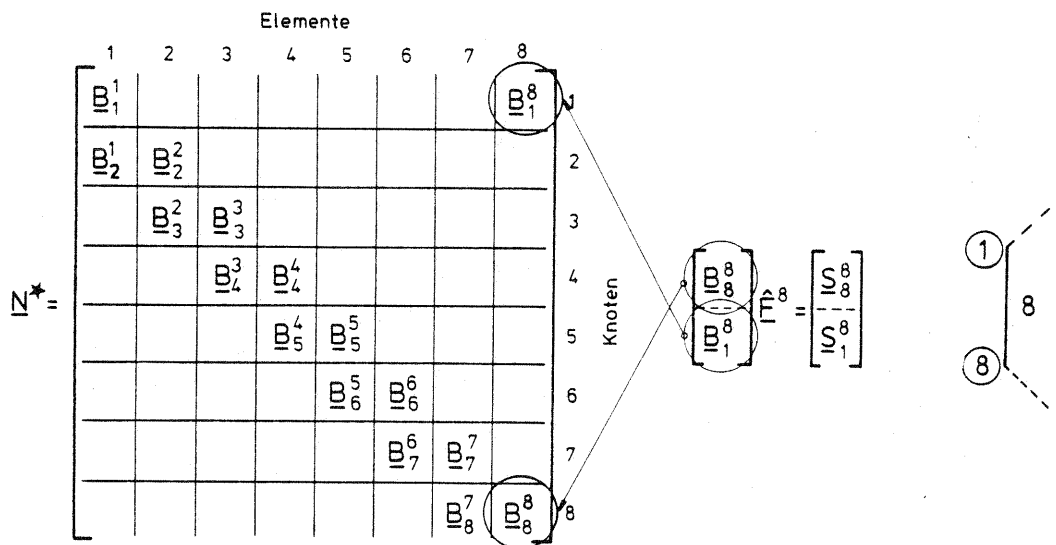


Bild 5.3: Direkte Besetzung der Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}^*$

*Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen:*

Jede Zeile in  $\underline{N}^*$  ist einer globalen Knotenverschiebung zugeordnet. Sind globale Knotenverschiebungen unterdrückt, so sind die entsprechenden Zeilen von  $\underline{N}^*$  zu streichen. Dieses Vorgehen ist der direkte Weg von (4.2.19). Die gestrichenen  $\tilde{\xi}$  Zeilen, ( $\tilde{\xi}$  ist die Anzahl der unterdrückten Knotenverschiebungen), bilden die Matrix  $(\underline{N}_A)_{\tilde{\xi} \times m}$  in (4.2.21). Die verbleibenden  $n = \xi - \tilde{\xi}$  Zeilen sind die Zeilen der reduzierten Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}_{n \times m}$  in (4.2.20).

In Bild 5.4 sind beide Matrizen für den Ringträger aus Bild 5.2 gegeben. Sie sind aus der zugehörigen Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}^*$  abgeleitet. Hierbei wird angenommen, daß alle Verschiebungen der Knoten 5 und 7 unterdrückt sind.

$$\underline{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} \underline{B}_1^1 & & & & & & & \underline{B}_1^8 \\ \underline{B}_2^1 & \underline{B}_2^2 & & & & & & \\ & \underline{B}_3^2 & \underline{B}_3^3 & & & & & \\ & & \underline{B}_4^3 & \underline{B}_4^4 & & & & \\ & & & & \underline{B}_6^5 & \underline{B}_6^6 & & \\ & & & & & & \underline{B}_8^7 & \underline{B}_8^8 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} \end{array}$$

$$\underline{N}_A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & \underline{B}_5^4 & \underline{B}_5^5 & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & \underline{B}_7^6 & \underline{B}_7^7 & \\ & & & & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} 5 \\ 7 \end{array} \end{array}$$

Bild 5.4: Zur Reduzierung der Gleichgewichtsmatrix

Die Zeilen von  $\underline{N}$  sind den Komponenten von  $\underline{U}_r$  zugeordnet. Da die Starrkörperverschiebungen des Tragwerks in  $\underline{U}_r$  nach der Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen nicht mehr enthalten sind, sind die Zeilen von  $\underline{N}$  linear unabhängig. Der Rang von  $\underline{N}$  ergibt sich zu  $n$ .

Bei einem statisch bestimmten Tragwerk ist  $\underline{N}$  quadratisch, ( $n = m$ ). Ist ein Tragwerk statisch unbestimmt, so gilt



$$n < m$$

und der Rangabfall der Matrix  $\underline{N}$

$$r = m - n \quad (5.1.13)$$

ist gleich dem Grad der statischen Unbestimmtheit.

## 5.2 Die automatische Ummumerierung der Knoten und Elemente

Bei der sogenannten direkten Steifigkeitsmethode, bei der die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_0$  bzw.  $\underline{K}_r$  analog zu  $\underline{N}^*$  bzw.  $\underline{N}$  direkt aufgestellt wird, wird die symmetrische Knotenzuordnungsmatrix benutzt. Damit  $\underline{K}_0$  Bandform hat, werden nur die Knoten des Tragwerks umnumerierte. Alle vorhandenen Algorithmen [6 - 11] minimieren die Bandbreite der symmetrischen Knotenzuordnungsmatrix bzw. von  $\underline{K}_0$ . Sie numerieren die Knoten des Tragwerks so um, daß die Differenz aller mit einem Knoten verknüpften Knotennummern möglichst minimal wird. Der Algorithmus von COLLINS [10] erweist sich als sehr leistungsfähig (relativ kleinere Bandbreite und weniger Rechenzeit in Vergleich zu den anderen Algorithmen).

Die Matrizen  $\underline{C}$  und  $\underline{N}^*$  der Kraftmethode sind nicht quadratisch. Es ist trotzdem möglich, sie in Bandform zu bringen. Die Besetzung von  $\underline{C}$  bzw.  $\underline{N}^*$  wird durch die Knoten- und Elementnumerierung festgelegt. Durch systematische Ummumerierung der Knoten und Elemente kann erreicht werden, daß  $\underline{C}$  bzw.  $\underline{N}^*$  eine Bandstruktur besitzt. Dadurch wird Speicher gespart, und es wird die Anzahl der Rechenoperationen verringert.

Zu diesem Zweck wurde der spezielle Algorithmus BAND (Kap. 7) entwickelt, der im Programmsystem KRAM'76 [20] verwendet wird. Dieser Algorithmus ist die Anwendung des COLLINS'schen

Verfahrens auf nicht quadratische Matrizen. In BAND werden die Knoten und Elemente so umnummeriert, daß der Abstand zwischen der ersten und letzten vorkommenden Verknüpfung in den Zeilen und Spalten der Topologiematrix  $\underline{C}$  möglichst klein gehalten wird. Als ein Beispiel sind der umnummerierte Ringträger und die zugehörige Topologiematrix in Bild 5.5 gegeben. Die Ausgangsnumerierung ist Bild 5.2 zu entnehmen.

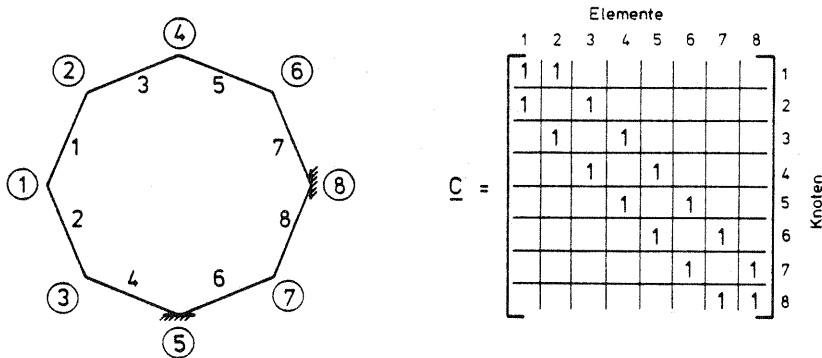


Bild 5.5: Umnummerierung der Knoten und Elemente

Die Knoten 5 und 7, an denen die Verschiebungen unterdrückt sind, sind in 8 und 5 umnummeriert. Die Matrizen  $\underline{N}$  und  $\underline{N}_A$  sind in Bild 5.6 dargestellt (vgl. Bild 5.4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	$\underline{B}_1^1$	$\underline{B}_1^2$							1
2	$\underline{B}_2^1$		$\underline{B}_2^3$						2
3		$\underline{B}_3^2$		$\underline{B}_3^4$					3
4			$\underline{B}_4^3$		$\underline{B}_4^5$				4
6					$\underline{B}_6^5$		$\underline{B}_6^7$		6
7							$\underline{B}_7^7$	$\underline{B}_7^8$	7

$$\underline{N} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	
5				$\underline{B}_5^4$		$\underline{B}_5^6$			5
8							$\underline{B}_8^7$	$\underline{B}_8^8$	8

$$\underline{N}_A =$$

Bild 5.6 Reduzierte Matrix  $\underline{N}$  nach der Umnummerierung

*Bandstruktur der Gleichgewichtsmatrix:*

Da zur Lösung der Gleichgewichtsbedingungen die Lösungsalgorithmen für Gleichungssysteme mit bandförmigen und singulären Koeffizientenmatrizen [21, 26] verwendet werden sollen, wird im folgenden die Bandbreite der Gleichgewichtsmatrix definiert. Durch die untere Bandbreite  $m_1$  und die obere Bandbreite  $m_2$  wird die konstante Bandbreite  $m_{12} = m_1 + m_2 + 1$  bestimmt (Bild 5.7). Die Hauptdiagonale von  $\underline{N}_{n \times m}$  fällt mit der Hauptdiagonalen einer quadratischen  $m \times m$ -Matrix zusammen. Die Nebendiagonalen sind parallel zu der Hauptdiagonalen. Für das Element  $N_{ij}$  von  $\underline{N}$  gilt:

$$N_{ij} = 0 \quad \text{für } i > j + m_1 \text{ oder } j > i + m_2$$

$$|N_{ij}| \geq 0 \quad \text{für } i \leq j + m_1 \text{ oder } j \leq i + m_2$$

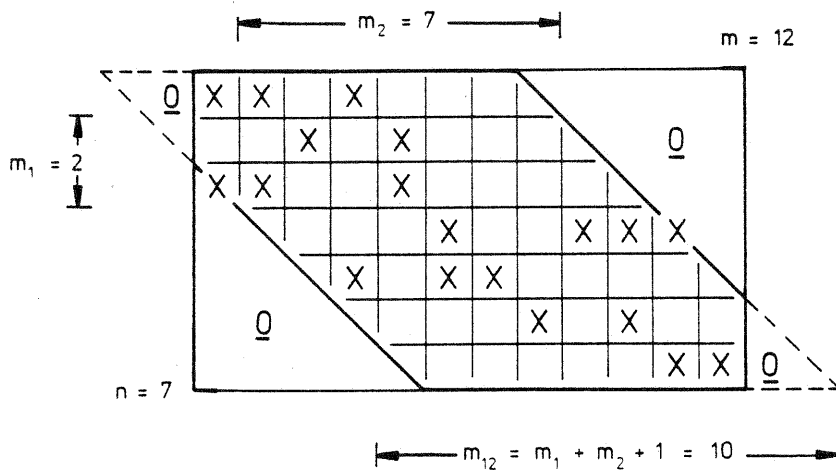


Bild: 5.7 Schematische Darstellung der Bandbreite

Die Bandform von  $\underline{N}$  wird aus programmtechnischen Gründen auf die Form eines Parallelogramms erweitert [26]. Der Speicherbedarf beträgt daher  $n \times m_{12}$  Plätze. Eine andere Definition der Bandbreite (kompakte Speichertechnik), die wesentlich weniger Speicherplatz und Rechenaufwand benötigt, ist auf Seite 86 gegeben.

### 5.3 Die automatische Wahl der statisch Unbestimmten

Bei statisch bestimmten Tragwerken ( $r = 0$ ) bereitet die allgemeine Lösung von (4.2.20) keinerlei Schwierigkeiten. Die linear unabhängigen Elementkräfte  $\hat{\underline{F}}$  lassen sich durch Inversion der quadratischen Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}_{n \times n}$  bestimmen:

$$\hat{\underline{F}} = \underline{N}^{-1} \underline{p}_r.$$

Bei statisch unbestimmten Tragwerken ( $r > 0$ ) ist es erforderlich, die statisch Unbestimmten  $\underline{x}$  zu bestimmen. Die Wahl der statisch Unbestimmten ist in der klassischen Stabstatik als die Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems durch das Schneiden von Stäben oder die Festlegung von Gelenken bekannt. Dieses manuelle Verfahren gelingt aber nur bei Stabtragwerken und scheitert bei Flächentragwerken (Scheiben, Schalen). Für komplizierte und komplexe Tragwerke, die mit finiten Elementen approximiert werden, ist eine automatische Wahl der statisch Unbestimmten erforderlich.

Der erste bahnbrechende Schritt in dieser Hinsicht wurde voneinander unabhängig von DENKE [12] und ROBINSON [13, 14] gemacht. Beide Methoden sind numerisch. Sie sind eine Anwendung des GAUSS-JORDAN Eliminationsverfahrens auf die Gleichgewichtsbedingungen (4.2.20). Die topologischen Methoden in der von STOKER [17] und ÇAKIROĞLU [19] dargestellten Form sind nur auf Stabwerke anwendbar.

Eine weitere Methode zur automatischen Wahl der statisch Unbestimmten wurde von THIERAUF/TOPÇU in [21] gegeben. Diese numerische Methode ist allgemein anwendbar und verwendet im Gegensatz zu den oben erwähnten numerischen Methoden das GAUSS'sche Eliminationsverfahren.

Die allgemeine Lösung eines unterbestimmten Gleichungssystems wie (4.2.20) ist in der numerischen Mathematik längst

bekannt [24]. Daß "die freien Parameter" des Gleichungssystems mit den statisch Unbestimmten zusammenfallen, oder daß "der Kern" [27] der Koeffizientenmatrix mit den Eigenspannungszuständen identisch ist, wurde in der ersten Anwendungsphase der Kraftmethode nicht erkannt.

*GAUSS-JORDAN Eliminationsverfahren:*

Die Zeilen von  $\underline{N}$  wurden als linear unabhängig vorausgesetzt. Der Rangabfall von  $\underline{N}$  wird durch die Anzahl der linear abhängigen Spalten bestimmt. Da die freien Parameter des Gleichungssystems

$$\underline{N} \hat{\underline{F}} = \underline{P}_r \quad (5.3.1)$$

mit den statisch Unbestimmten zusammenfallen und die freien Parameter den linear abhängigen Spalten von  $\underline{N}$  zugeordnet sind, können, die linear abhängigen Spalten von  $\underline{N}$  während der Elimination festgestellt werden. Zunächst wird angenommen, daß diese Spalten bekannt sind. In diesem Fall kann  $\underline{N}$  durch die Spaltenvertauschungsmatrix  $\underline{Z}_{m \times m}$  in

$$\underline{N} \underline{Z} = [\underline{N}_0 | \underline{N}_x] \quad (5.3.2)$$

umgeformt werden.  $(\underline{N}_x)_{n \times r}$  besteht aus linear abhängigen Spalten von  $\underline{N}$ , und  $(\underline{N}_0)_{n \times n}$  ist ein regulärer Teil von  $\underline{N}$ .  $\underline{Z}$  ist eine BOOLE'sche Matrix. Eine 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von  $\underline{Z}$  bewirkt, daß die j-te Spalte der rechten Seite in (5.3.2) die i-te Spalte von  $\underline{N}$  ist.  $\underline{Z}$  ergibt sich, wenn die Zeilen einer  $m \times m$ -Einheitsmatrix entsprechend der Spaltenvertauschung vertauscht werden. Die Vertauschungsmatrix  $\underline{Z}$  hat die Eigenschaft  $\underline{Z}\underline{Z}^T = \underline{I}$ , d.h.:  $\underline{Z}^{-1} = \underline{Z}^T$ .

Bei dem GAUSS-JORDAN Eliminationsverfahren ist es möglich, während der Elimination Schritt für Schritt die Transformationsmatrizen  $\tilde{\underline{I}}_1, \tilde{\underline{I}}_2, \dots, \tilde{\underline{I}}_i, \dots, \tilde{\underline{I}}_n$  derart zu bestimmen,

daß gilt:

$$\tilde{\underline{I}}_n \cdots \tilde{\underline{I}}_2 \tilde{\underline{I}}_1 \underline{N} \underline{Z} = \tilde{\underline{I}}_n \cdots \tilde{\underline{I}}_2 \tilde{\underline{I}}_1 [\underline{N}_0 | \underline{N}_x] = [\underline{I} | \underline{N}_0^{-1} \underline{N}_x],$$

mit

$$\tilde{\underline{I}}_n \cdots \tilde{\underline{I}}_2 \tilde{\underline{I}}_1 = \underline{N}_0^{-1}.$$

$(\tilde{\underline{I}}_i)_{n \times n}$  wird beim  $i$ -ten Eliminationsschritt mit

$$\tilde{\underline{I}}_i = \begin{array}{c} \text{Spalte} \\ \begin{array}{c} 1 \quad \cdots \quad i \quad \cdots \quad n \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{n}_{1i} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{n}_{ii} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \underline{I}_{i-1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{n}_{2i} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{n}_{ii} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{\tilde{n}_{ii}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{n}_{ni} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{n}_{ii} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \underline{I}_{n-i} \\ \hline \end{array} \\ \hline n \\ \hline \end{array} \\ \text{Zeile} \end{array}$$

$\underline{I}_{i-1}$ : Einheitsmatrix mit  
Kantenlänge  $i-1$

$\underline{I}_{n-i}$ : Einheitsmatrix mit  
Kantenlänge  $n-i$

bestimmt.  $\tilde{n}_{ij}$  sind die Elemente von  $\underline{N}$  nach den ersten  $i-1$  Eliminationsschritten. Hier muß  $\tilde{n}_{ii} \neq 0$  wegen der Division durch  $\tilde{n}_{ii}$  gelten. Daher ist für die Elimination eine Zeilenpivotsuche mit Spaltentausch notwendig, was den Sinn der Spaltenvertauschungsmatrix  $\underline{Z}$  erklärt.  $\tilde{n}_{ii}$  ist das Pivotelement der  $i$ -ten Zeile. Im allgemeinen wird das betragsgrößte Element der Zeile als Pivotelement gewählt, damit der Stellenverlust in  $\underline{N}_0^{-1}$  bei der Multiplikation der Elemente der Transformationsmatrizen möglichst gering bleibt.

Aus (5.3.1) folgt entsprechend (5.3.2) und unter Berücksichtigung von  $\underline{Z}^{-1} = \underline{Z}^T$

$$\underline{N} \underline{Z} \underline{Z}^T \hat{\underline{F}} = [\underline{N}_0 | \underline{N}_x] \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_0 \\ \underline{X} \end{bmatrix} = \underline{P}_r$$

mit

$$\underline{z}^T \hat{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_0 \\ \underline{X} \end{bmatrix}.$$

Aufgelöst nach  $\hat{\underline{F}}_0$  ergibt sich:

$$\hat{\underline{F}}_0 = \underline{N}_0^{-1} \underline{p}_r - \underline{N}_0^{-1} \underline{N}_x \underline{X}.$$

Für den vollständigen Vektor der Unbekannten  $\hat{\underline{F}}$  folgt unmittelbar

$$\underline{z}^T \hat{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_0 \\ \underline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}_0^{-1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{p}_r + \begin{bmatrix} -\underline{N}_0^{-1} \underline{N}_x \\ \underline{I} \end{bmatrix} \underline{X}.$$

Ein Vergleich mit der allgemeinen Lösung (4.2.28) ergibt unter Berücksichtigung von  $\underline{z}^{-1} = \underline{z}^T$

$$\underline{B}_0 = \underline{z} \begin{bmatrix} \underline{N}_0^{-1} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_x = \underline{z} \begin{bmatrix} -\underline{N}_0^{-1} \underline{N}_x \\ \underline{I} \end{bmatrix}. \quad (5.3.3)$$

Nach der Definition der allgemeinen Lösung (4.2.28) gibt die  $i$ -te Spalte von  $\underline{B}_0$  die Elementkräfte des statisch bestimmten Hauptsystems an, wenn  $p_{ri} = 1$ ,  $\underline{X} = \underline{0}$  und alle anderen Komponenten von  $\underline{p}_r$  gleichzeitig null sind. Die  $i$ -te Spalte von  $\underline{B}_x$  ergibt die Elementkräfte des statisch bestimmten Hauptsystems, wenn  $X_i = 1$ ,  $\underline{p}_r = \underline{0}$  und alle anderen Komponenten von  $\underline{X}$  gleichzeitig null sind. Jede Spalte von  $\underline{B}_x$  stellt einen Eigenspannungszustand des Tragwerks dar.

Die Bestimmung der Matrizen  $(\underline{B}_0)_{m \times n}$  und  $(\underline{B}_x)_{m \times r}$  ist programmtechnisch leicht realisierbar. Das Programm JORD (Kap. 7) berechnet beide Matrizen aus  $\underline{N}_{n \times m}$  und legt sie auf eine  $m \times m$ -Matrix ab. Der minimale Speicherbedarf des GAUSS-JORDAN Eliminationsverfahrens beträgt  $m \times m$  Plätze.

*GAUSS'sches Eliminationsverfahren:*

Da beim GAUSS-JORDAN Eliminationsverfahren ein Spaltentausch vorgenommen werden muß, wird die vorhandene Bandstruktur der Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}$  zerstört. Daher muß  $\underline{N}$  als  $n \times m$ -Matrix vollständig abgespeichert werden, was mehr Speicher und Rechenzeit erfordert, da mehr Operationen durchgeführt werden als notwendig.

Die Bandstruktur von  $\underline{N}$  kann ausgenutzt werden, wenn das GAUSS'sche Eliminationsverfahren zur Wahl der statisch Unbestimmten angewendet wird. Die Spaltenpivotsuche mit Zeilentausch dient hierbei zur Feststellung der linear abhängigen Spalten. Das Vertauschen der Zeilen zerstört die Bandstruktur von  $\underline{N}$  nicht [26]. Spaltenpivotsuche mit Zeilenvertauschung ist für eine stabile Lösung ausreichend [25, 28].

Nimmt man zunächst an, daß die statisch Unbestimmten bekannt sind, so kann die Gleichgewichtslage des statisch unbestimmten Tragwerks durch gleichzeitiges Aufbringen von  $\underline{P}_r$  und  $\underline{X}$  auf das statisch bestimmte Hauptsystem wie folgt angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \hat{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_r \\ \underline{X} \end{bmatrix} \quad (5.3.4)$$

oder

$$\tilde{\underline{N}} \hat{\underline{F}} = \tilde{\underline{P}} \quad (5.3.5)$$

mit

$$\tilde{\underline{N}} = \begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_r \\ \underline{X} \end{bmatrix}.$$

Wobei die zu  $X_j$  korrespondierende Zeile der Matrix  $\tilde{\underline{I}}_{r \times m}$  die  $j$ -te Zeile der  $m \times m$ -Einheitsmatrix ist, wenn  $\hat{F}_j$  als  $i$ -te sta-



tisch Unbestimmte gewählt ist. Dies bedeutet, daß die  $j$ -te Spalte von  $\underline{N}$  linear abhängig ist. Durch  $\underline{\tilde{I}}$  wird  $\underline{N}$  auf eine quadratische, reguläre Matrix  $\underline{\tilde{N}}_{m \times m}$  erweitert. Wenn das GAUSS'sche Eliminationsverfahren auf  $\underline{\tilde{N}}$  angewendet wird, erhält man

$$\underline{\tilde{N}} = \underline{Z} \underline{\tilde{L}} \underline{\tilde{R}}. \quad (5.3.6)$$

Die Zeilenvertauschungsmatrix  $\underline{Z}$  ergibt sich aus dem dem Zeilentausch von  $\underline{N}$  entsprechenden Spaltentausch der  $m \times m$ -Einheitsmatrix.  $\underline{\tilde{L}}$  und  $\underline{\tilde{R}}$  sind die untere und die obere Dreiecksmatrix von  $\underline{\tilde{N}}$ . Das Problem wird durch (5.3.4) auf die Bestimmung der Erweiterungsmatrix  $\underline{\tilde{I}}$  reduziert.

Für die Dreieckszerlegung wird zunächst die Bandstruktur von  $\underline{N}$  nicht berücksichtigt. Zur Feststellung der linear abhängigen Spalten, d.h. zur Bestimmung von  $\underline{\tilde{I}}$  ist eine Pivotregel erforderlich. Vor der Elimination wird die Zeilennorm von  $\underline{N}$  berechnet:

$$\|\underline{N}\|_{\infty} = \max_i \left( \sum_j |N_{ij}| \right).$$

Beim  $k$ -ten Eliminationsschritt wird das Diagonalelement  $N_{kk}^k$  (Pivotelement) aus

$$N_{kk}^k = \max_i \left| N_{ik}^{k-1} \right| \quad \text{für } i = k, \dots, n \quad (5.3.7)$$

bestimmt.  $\underline{N}^{k-1}$  stellt die durch  $k-1$  Eliminationsschritte geänderte Matrix  $\underline{N}$  dar. Die  $k$ -te Spalte ist von den vorhergehenden  $k-1$  Spalten linear abhängig, wenn gilt:

$$N_{kk}^k < \varepsilon \|\underline{N}\|_{\infty}, \text{ d.h. } N_{kk}^k \approx 0. \quad (5.3.8)$$

$\varepsilon$  ist die Rechengenauigkeit (Telefunkenrechner TR 440:  $\varepsilon = 3.0 \times 10^{-11}$ ). In diesem Fall wird wie folgt fortgefahren:

Für die erste Zeile von  $\underline{\tilde{I}}$  wird die  $k$ -te Zeile der  $m \times m$ -Einheitsmatrix eingesetzt. Die  $k$ -te Zeile von  $\underline{N}^{k-1}$  wird

mit der ersten Zeile von  $\tilde{I}$  vertauscht und diese Vertauschung wird in  $\underline{Z}$  notiert. Da nun  $N_{kk}^k = 1$  und  $N_{ik}^{k-1} \approx 0$  mit  $i > k$  gilt, ist der  $k$ -te Zerlegungsschritt beendet. Die Zerlegung wird fortgesetzt bis eine weitere Spalte als linear abhängig erkannt, und damit eine weitere Zeile von  $\tilde{I}$  bestimmt wird. In  $m$  Zerlegungsschritten sind genau  $r$  linear abhängige Spalten und alle Zeilen von  $\tilde{I}$  zu bestimmen. Die symbolische Darstellung der Zerlegung ist am Beispiel einer Matrix  $\underline{N}_{5 \times 7}$  in Bild 5.8 gegeben. Hierbei wird angenommen, daß die 3. und 6. Spalte von  $\underline{N}$  linear abhängig seien. Zur Kennzeichnung der Zeilen sind Buchstaben verwendet worden, die jedoch untereinander unterschiedliche Werte darstellen sollen. Zur Darstellung der Vertauschungsmatrix  $\underline{Z}$  wird angenommen, daß die Zeilen von  $\underline{N}$  nur mit den Zeilen von  $\tilde{I}_{2 \times 7}$  und nicht untereinander vertauscht sind.

$$\begin{array}{c} \underline{N} \\ \tilde{I} \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} k & k & k & k & k & k & k \\ l & l & l & l & l & l & l \\ m & m & m & m & m & m & m \\ n & n & n & n & n & n & n \\ p & p & p & p & p & p & p \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & & \\ \tilde{l} & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \tilde{n} & \tilde{n} & & 1 & & & \\ \tilde{p} & \tilde{p} & & \tilde{p} & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ \tilde{m} & \tilde{m} & & \tilde{m} & \tilde{m} & & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} k & \tilde{k} & \tilde{k} & \tilde{k} & \tilde{k} & \tilde{k} & \tilde{k} \\ \tilde{l} & \tilde{l} & \tilde{l} & \tilde{l} & \tilde{l} & \tilde{l} & \tilde{l} \\ & & 1 & & & & \\ & & & \tilde{n} & \tilde{n} & \tilde{n} & \tilde{n} \\ & & & \tilde{p} & \tilde{p} & \tilde{p} & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \tilde{m} \end{array} \right] \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \tilde{N} \\ \underline{Z} \\ \tilde{I} \\ \tilde{R} \end{array}$$

Bild 5.8: Symbolische Darstellung der Dreieckszerlegung

Die Beziehung (4.2.26) wird erfüllt, wenn man in (5.3.4)  $\underline{P}_r = \underline{I}_{n \times n}$  und  $\underline{X} = \underline{0}_{r \times n}$  einsetzt:

$$\begin{bmatrix} \underline{N} \\ \tilde{I} \end{bmatrix} \underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \underline{P}_0. \quad (5.3.9)$$

$\underline{B}_0$  hat die Dimension  $m \times n$ . Mit (5.3.6) folgt

$$\underline{Z} \tilde{I} \tilde{R} \underline{B}_0 = \underline{P}_0 \quad (5.3.10)$$

oder die partikuläre Lösung

$$\underline{B}_0 = \tilde{\underline{R}}^{-1} \tilde{\underline{L}}^{-1} \underline{Z}^T \underline{P}_0 = \tilde{\underline{R}}^{-1} \tilde{\underline{L}}^{-1} \tilde{\underline{P}} \quad (5.3.11)$$

mit

$$\tilde{\underline{P}} = \underline{Z}^T \underline{P}_0.$$

Die Beziehung (4.2.27) wird erfüllt, wenn man in (5.3.4)

$\underline{P}_r = \underline{0}_{n \times r}$  und  $\underline{X} = \underline{I}_{r \times r}$  einsetzt:

$$\begin{bmatrix} \underline{N} \\ \tilde{\underline{L}} \\ \tilde{\underline{I}} \end{bmatrix} \underline{B}_x = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \tilde{\underline{I}} \end{bmatrix} = \underline{P}_x. \quad (5.3.12)$$

$\underline{B}_x$  besitzt die Dimension  $m \times r$ . Mit (5.3.6) folgt

$$\underline{Z} \tilde{\underline{L}} \tilde{\underline{R}} \underline{B}_x = \underline{P}_x$$

oder

$$\tilde{\underline{R}} \underline{B}_x = \tilde{\underline{L}}^{-1} \underline{Z}^T \underline{P}_x.$$

Aus dem Aufbau von  $\tilde{\underline{L}}$  und  $\tilde{\underline{I}}$  ergibt sich, daß

$$\underline{Z}^T \underline{P}_x = \tilde{\underline{I}}^T \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{L}}^{-1} \tilde{\underline{I}}^T = \tilde{\underline{I}}^T \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{L}}^{-1} \neq \underline{I}$$

gilt. Es folgt

$$\tilde{\underline{R}} \underline{B}_x = \tilde{\underline{I}}^T \quad (5.3.13)$$

bzw. die homogene Lösung (Eigenspannungszustände)

$$\underline{B}_x = \tilde{\underline{R}}^{-1} \tilde{\underline{I}}^T. \quad (5.3.14)$$

Die schematische Berechnung von  $\underline{B}_0$  und  $\underline{B}_x$  ist für die Matrizen von Bild 5.8 in Bild 5.9 dargestellt.



$\underline{B}_0$  bzw.  $\underline{B}_x$  werden nicht durch Inversion von  $\underline{\tilde{L}}$  und  $\underline{\tilde{R}}$  berechnet, sondern durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen in  $\underline{\tilde{L}}$  und  $\underline{\tilde{R}}$  für  $\underline{P}_0$  bzw.  $\underline{P}_x$ . Die Vertauschungsmatrix  $\underline{Z}$  wird als ein Vektor der Länge  $m$  und  $\underline{\tilde{I}}$  wird nur implizit gespeichert. Die vorgenommenen Zeilenvertauschungen werden beim Vorwärtseinsetzen rückgängig gemacht. Hierbei müssen die Zeilen der rechten Seiten in jedem Schritt entsprechend dem Inhalt von  $\underline{Z}$  vertauscht werden, was besonders bei der Berechnung von  $\underline{B}_0$  sehr zeitaufwendig ist. Dies wird vermieden, wenn die rechten Seiten direkt mit Hilfe von  $\underline{Z}$  aufgestellt werden. Die folgende Beziehung

$$\underline{Z} \underline{\tilde{L}} \underline{\tilde{R}} [\underline{B}_0 | \underline{B}_x] = [\underline{P}_0 | \underline{P}_x] = \underline{I}$$

$$\underline{\tilde{L}} \underline{\tilde{R}} [\underline{B}_0 | \underline{B}_x] = \underline{Z}^T$$

zeigt, daß die Matrix  $\underline{Z}^T$  in

$$\underline{Z}^T = [\underline{\tilde{P}}_0 | \underline{\tilde{I}}^T]$$

umgeformt werden kann, d.h. die ersten  $n$  Spalten von  $\underline{Z}^T$  bilden die rechte Seite bezüglich  $\underline{B}_0$  und die letzten  $r$  Spalten bezüglich  $\underline{B}_x$  (Bild 5.10). Nach der Bestimmung der rechten Seiten  $\underline{\tilde{P}}_0$  und  $\underline{\tilde{I}}^T$  erübrigt sich die Vertauschungsmatrix  $\underline{Z}$  für die Berechnung von  $\underline{B}_0$  und  $\underline{B}_x$ .

$$\underline{Z}^T = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \end{array} \right]$$

$\underline{\tilde{P}}_0 \qquad \underline{\tilde{I}}^T$

Bild 5.10: Bestimmung von  $\underline{\tilde{P}}_0$  und  $\underline{\tilde{I}}^T$  aus  $\underline{Z}$

Im folgenden wird gezeigt, wie man beim Rückwärtseinsetzen in  $\tilde{\mathbf{R}}$  für die Berechnung der  $j$ -ten Spalte von  $\mathbf{B}_x$  geschickt vorgeht.

Die  $i$ -te Spalte von  $\mathbf{N}$  sei während der Dreieckszerlegung als  $j$ -te linear abhängige Spalte erkannt worden. Da  $\mathbf{B}_x$  nach (5.3.13) von  $\tilde{\mathbf{L}}$  unabhängig ist, gilt:

$$\tilde{\mathbf{R}} \mathbf{B}_{xj} = \tilde{\mathbf{I}}_j^T \quad (5.3.15)$$

Wobei  $\mathbf{B}_{xj}$  die  $j$ -te Spalte von  $\mathbf{B}_x$  und  $\tilde{\mathbf{I}}_j^T$  die  $j$ -te Spalte von  $\tilde{\mathbf{I}}^T$  ist ( $\tilde{\mathbf{I}}_j^T$  ist mit der  $i$ -ten Spalte der  $m \times m$ -Einheitsmatrix identisch). Die Matrix  $\tilde{\mathbf{R}}$  und die Vektoren  $\mathbf{B}_{xj}$  und  $\tilde{\mathbf{I}}_j^T$  werden wie in Bild 5.11(a) unterteilt.

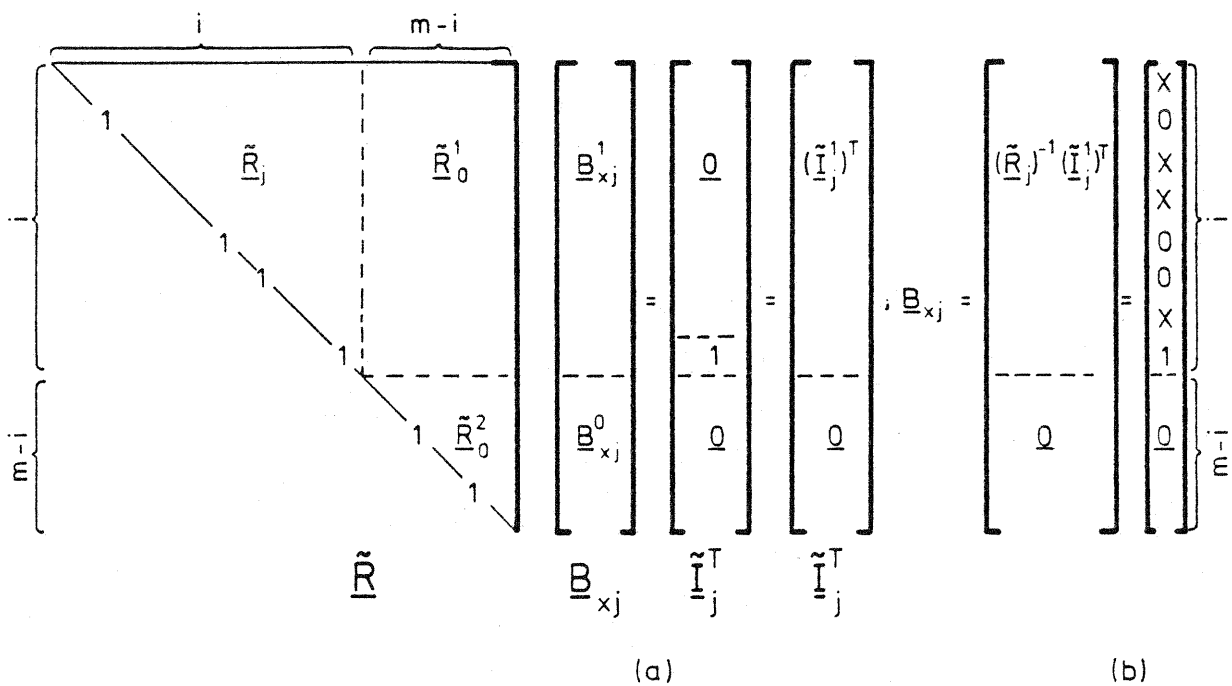


Bild 5.11: Berechnung der  $j$ -ten Spalte von  $\mathbf{B}_x$

Die reguläre Matrix  $\tilde{\underline{R}}_j$  ist für die Berechnung von  $\underline{B}_{xj}$  maßgebend, denn es gilt:

$$\tilde{\underline{R}}_j \underline{B}_{xj}^1 + \tilde{\underline{R}}_0^1 \underline{B}_{xj}^0 = (\tilde{\underline{I}}_j^1)^T \quad (5.3.16)$$

$$\tilde{\underline{R}}_0^2 \underline{B}_{xj}^0 = \underline{0}. \quad (5.3.17)$$

Da  $\tilde{\underline{R}}_0^2$  regulär ist und Dreiecksform hat, liefert die Beziehung (5.3.17) nur die triviale Lösung

$$\underline{B}_{xj}^0 = \underline{0}. \quad (5.3.18)$$

Diese Lösung liefert mit (5.3.16):

$$\tilde{\underline{R}}_j \underline{B}_{xj}^1 = (\tilde{\underline{I}}_j^1)^T \quad (5.3.19)$$

oder durch Rückwärtseinsetzen in  $\tilde{\underline{R}}_j$

$$\underline{B}_{xj}^1 = \tilde{\underline{R}}_j^{-1} (\tilde{\underline{I}}_j^1)^T.$$

Der vollständige Vektor  $\underline{B}_{xj}$  erhält die in Bild 5.11(b) dargestellte Form. Daraus erkennt man, daß die ersten  $i$  Elemente ungleich Null und die restlichen  $m-i$  Elemente von  $\underline{B}_{xj}$  gleich Null sind. Daher werden die ersten  $i$  Elemente von  $\underline{B}_{xj}$  durch Rückwärtseinsetzen in  $\tilde{\underline{R}}_j$  für  $(\tilde{\underline{I}}_j^1)^T$  berechnet und die restlichen  $m-i$  Elemente werden gleich Null gesetzt.

#### *Mechanische Interpretation der Pivotregel:*

Die angewendete Pivotregel entspricht der Wahl der statisch Unbestimmten der klassischen Stabstatik. Die Spalten der Gleichgewichtsmatrix sind den linear unabhängigen Elementkräften  $\hat{\underline{F}}$  zugeordnet. Die Elementkräfte, die den durch Pivotsuche als linear abhängig erkannten Spalten zugeordnet sind, werden als statisch Unbestimmte gewählt. Es werden  $r$  Zusatzgleichungen derart gebildet, daß

$$\tilde{\underline{I}} \hat{\underline{F}} = \underline{X}$$

gilt. Ist zum Beispiel die  $i$ -te Spalte als erste linear abhängige Spalte von  $\underline{N}$  erkannt worden, so wird der dieser Spalte zugeordnete Unbekannte als der erste statisch Unbestimmte gewählt und

$$\hat{F}_i = X_1$$

gesetzt. Die erste Spalte von  $\underline{B}_x$  ergibt sich mit  $\hat{F}_i = X_1 = 1$  und die erste Spalte von  $\underline{B}_0$  mit  $\hat{F}_i = X_1 = 0$ . Für die statisch Unbestimmten erhält man insgesamt  $r$  Zusatzgleichungen bezüglich  $\underline{B}_0$

$$\tilde{\underline{I}} \hat{\underline{F}} = \underline{0} \quad (5.3.20)$$

und bezüglich  $\underline{B}_x$

$$\tilde{\underline{I}} \hat{\underline{F}} = \underline{I}. \quad (5.3.21)$$

Die erweiterten Gleichungen (5.3.9) und (5.3.12) werden implizit aufgrund der Zusatzgleichungen (5.3.20) und (5.3.21) gebildet.



*Dreieckszerlegung der bandförmigen Gleichgewichtsmatrix:*

Bei der Anwendung der GAUSS'schen Zerlegung auf die bandförmige Gleichgewichtsmatrix sind in jedem Schritt genau  $m_1 + 1$  Gleichungen an der Elimination beteiligt. Unter den  $m_1 + 1$  Koeffizienten der zu eliminierenden Unbekannten wird das Pivotelement gesucht. Wenn nötig, wird die Diagonalzeile mit der Pivotzeile vertauscht.

Um die Pivotsuche und den Zeilentausch vereinfachen zu können, werden die ersten  $m_1 + 1$  Zeilen von  $\underline{N}$  vor der Zerlegung wie in  $\underline{N}^0$  umgespeichert (Bild 5.12). Die Koeffizienten der als erste zu eliminierenden Unbekannten liegen auf der Diagonalen a-a. Wenn man in jedem Schritt dafür sorgt, daß die Koeffizienten der als nächste zu eliminierenden Unbekannten auf der Diagonalen a-a liegen, kann das Pivotelement immer auf dieser Diagonalen und unter den  $m_1 + 1$  Koeffizienten gesucht werden.

Zur Darstellung der Zerlegung ist  $\underline{N}$  um  $r$  Zeilen implizit erweitert. Wegen des Zeilentausches benötigt  $\underline{R}$  genausoviel Plätze wie  $\underline{N}^0$  [26]. Daher wird für  $\underline{L}$  die Matrix  $\underline{L}^0$  reserviert. Die Zeilenvertauschungsmatrix  $\underline{Z}$  wird als Vektor abgespeichert, der vor der Zerlegung als  $\underline{Z}^0$  vorbelegt ist (Bild 5.12).

Im folgenden wird der  $k$ -te Eliminationsschritt erläutert. Hierbei ist  $\underline{N}^{k-1}$  die in den vorhergehenden  $k-1$  Eliminationsschritten geänderte Matrix  $\underline{N}^0$ . Es wird angenommen, daß insgesamt  $z$  Spalten von  $\underline{N}$  bis zum  $k$ -ten Schritt als linear abhängig erkannt wurden:

a) Wahl des Pivotelements nach (5.3.7):

$$N_{kk}^k = \max |N_{ik}^{k-1}| = N_{jk}^{k-1} \text{ für } i = k, \dots, \min(k+m_1, m) \text{ und } j \geq k.$$

b) Ist in (5.3.8)

$$N_{kk}^k < \varepsilon \|\underline{N}\|_{\infty}, \text{ weiter mit c), sonst mit d).}$$

c) Die  $k$ -te Spalte ist linear abhängig:

1. Erhöhung von  $z$  um 1;  $z := z + 1$ ;
2. Ist  $z > r$ , so wurden zu viele linear abhängige Spalten erkannt. D.h. auch die Zeilen von  $\underline{N}$  sind linear abhängig. Das System ist labil. Die Zerlegung wird abgebrochen.
3. Ist  $z \leq r$ , wird für die Zeile  $n+z$  von  $\underline{N}^{k-1}$  die Zeile  $k$  der  $m \times m$ -Einheitsmatrix implizit gesetzt (die  $z$ -te Zeile von  $\tilde{\underline{I}}$  wird dadurch bestimmt).
4. Die Zeilen  $k$  und  $n+z$  der Matrizen  $\underline{L}^{k-1}$ ,  $\underline{N}^{k-1}$  und  $\underline{Z}^{k-1}$  werden vertauscht.
5. Die Spaltennummer  $k$  wird in einem Vektor der Länge  $r$ , der die Nummern der linear abhängigen Spalten enthält, abgespeichert.
6. Weiter mit f).

d) Zeilentausch:

Ist  $j = k$ , weiter mit e); sonst werden die  $k$ -ten und  $j$ -ten Zeilen der Matrizen  $\underline{L}^{k-1}$ ,  $\underline{N}^{k-1}$  und  $\underline{Z}^{k-1}$  vertauscht. Weiter mit e);

e) Elimination der  $k$ -ten Unbekannten:

1. Für  $i = k+1, \dots, \min(k+m_1, m)$  wird

$$L_{ik}^k = L_{ik}^{k-1} / N_{kk}^k \text{ und}$$

$$N_{ij}^k = N_{ij}^{k-1} - L_{ik}^k N_{kj}^{k-1} \quad \text{für } j = k+1, \dots, \min(k+m_{12}, m)$$

gebildet.

2. Weiter mit f);

f) Erhöhung von  $k$  um 1;  $k := k + 1$

Ist  $k \leq m$ , weiter mit a) sonst Ende der Zerlegung.

Die Zerlegung wird Schritt für Schritt für die Matrix  $\underline{N}_{5 \times 7}$  von Bild 5.12 im folgenden dargestellt. Die Zeilen, die an der Elimination teilnehmen, sind mit Klammern und die Zeilen, die vertauscht werden, sind mit Pfeilpaaren gekenn-

zeichnet. Die berechneten Elemente  $\tilde{L}_{ij}$  und  $\tilde{R}_{ij}$  von  $\tilde{L}$  und  $\tilde{R}$  sind in jedem Schritt eingetragen. Die Elemente  $N_{ij}$  kennzeichnen die während der Elimination geänderten Werte von  $N^0$ . Um den Ablauf der Zerlegung verständlich zu machen, werden die tatsächlich nur implizit gespeicherten Zeilen von  $\tilde{I}$  in den Bildern mitgezeichnet.

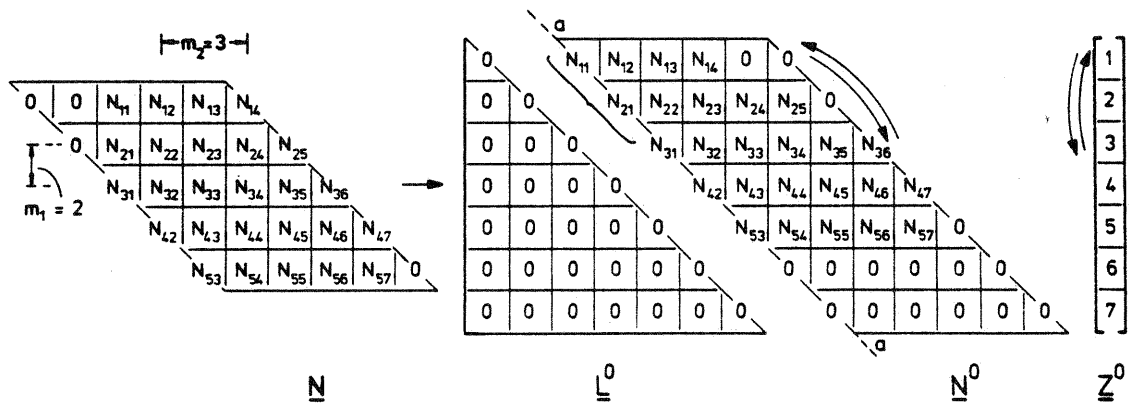


Bild 5.12: Speichertechnik der Gleichgewichtsmatrix

### 1. Schritt:

Für diesen Schritt sind die Matrizen  $N^0$ ,  $L^0$  und  $Z^0$  die Ausgangsmatrizen. Es wird angenommen, daß gilt:

$$N_{11}^1 = \max |N_{i1}^0| = N_{31}^0, i = 1, \dots, \min(1 + m_1, m)$$

$$N_{11}^1 \geq \varepsilon \|N\|_{\infty}.$$

D.h.: Das Pivotelement wird in der dritten Zeile der ersten Spalte gefunden. Die Zeilen 1 und 3 von  $N^0$  und  $Z^0$  werden vertauscht. Durch die Elimination der ersten Unbekannten erhält man die geänderten Matrizen in Bild 5.13. Da die erste Spalte von  $L^1$  bzw. die erste Zeile von  $N^1$  an der Elimination nicht mehr teilnehmen, sind sie die erste Spalte bzw. Zeile von  $\tilde{L}$  bzw.  $\tilde{R}$ . Ein Element  $N_{ik}^1$  ist der geänderte Wert von  $N_{ik}^0$ .

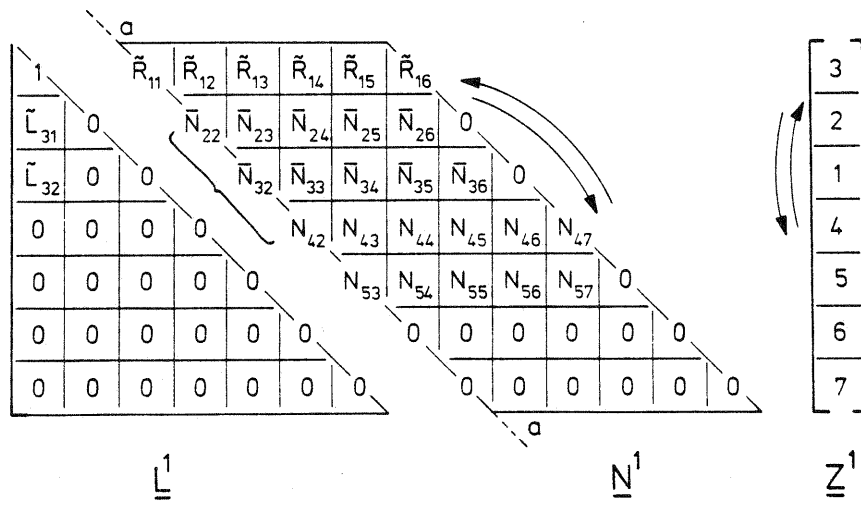


Bild 5.13: Ausgangsmatrizen des 2. Eliminationsschrittes

## 2. Schritt:

Als Pivotelement ist  $n_{22} = n_{42}$  gewählt. Die Zeilen 2 und 4 von  $\underline{\underline{L}}^1$ ,  $\underline{\underline{N}}^1$  und  $\underline{\underline{Z}}^1$  werden vertauscht. Nach der Elimination der zweiten Unbekannten erhält man die in Bild 5.14 dargestellten Matrizen.

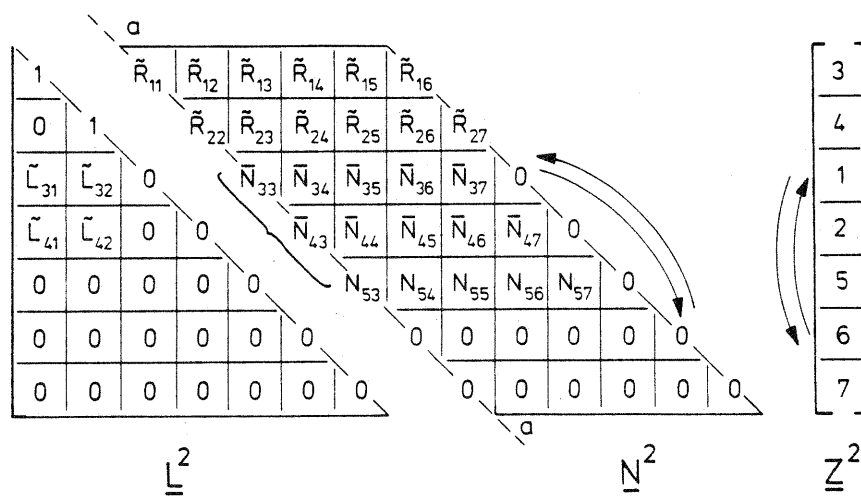


Bild 5.14: Ausgangsmatrizen des 3. Eliminationsschrittes

## 3. Schritt:

Hier wird vorausgesetzt, daß gilt:

$$N_{33}^3 = \max |N_{i3}^2|, \quad N_{33}^3 < \varepsilon \|\underline{N}\|_{\infty}, \quad i = 3, \dots, \min(3 + m_1, m)$$

d.h.  $N_{33}^3 \approx 0$ .

Die dritte Spalte ist als linear abhängig erkannt worden. Die 3. Zeile der  $m \times m$ -Einheitsmatrix wird als erste Zeile von  $\tilde{I}$  angenommen und daher als 6. Zeile in  $\underline{N}^2$  eingesetzt. Da nun  $N_{33}^3 = N_{62}^2 = 1$  ist, werden die Zeilen 3 und 6 der Matrizen von Bild 5.14 vertauscht. In einem Vektor der Länge  $r$  wird die Nummer der linear abhängigen Spalte (=3) notiert. Da alle Elemente  $N_{i3}^2 \approx 0$  für  $i > 3$  sind, ist der 3. Eliminationsschritt beendet. Dieser Schritt bringt keine Änderungen der Elemente von  $\underline{N}^2$  (Bild 5.15).

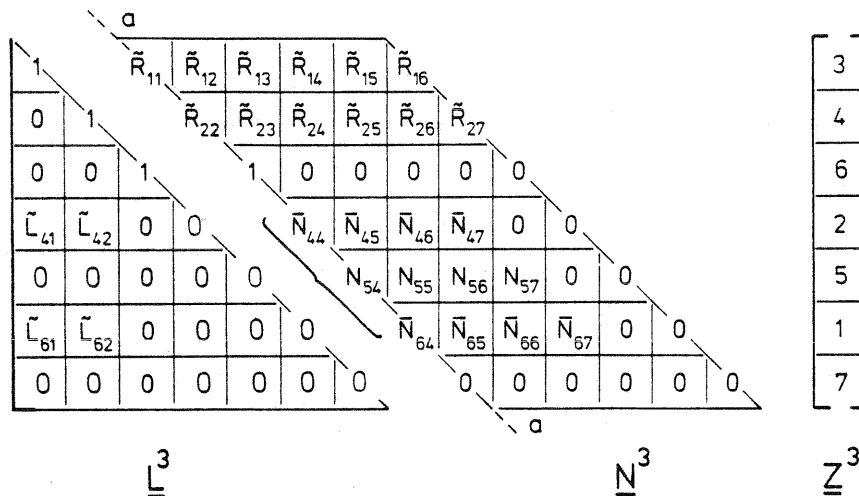


Bild 5.15: Ausgangsmatrizen des 4. Eliminationsschrittes

## 4. Schritt:

Als Pivotelement wird  $N_{44} = N_{44} \geq \varepsilon \|\underline{N}\|_{\infty}$  angenommen, d.h. es ist kein Zeilentausch erforderlich (Bild 5.16).

## 5. Schritt:

Auch in diesem Schritt gibt es keinen Zeilentausch:

$$N_{55}^5 = N_{55}^4 \geq \varepsilon \|\underline{N}\|_{\infty}.$$

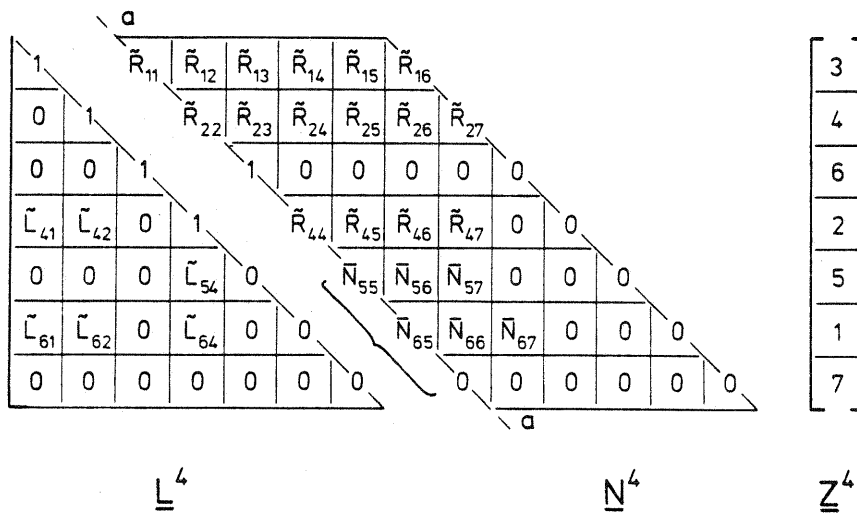


Bild 5.16: Ausgangsmatrizen des 5. Eliminationsschrittes

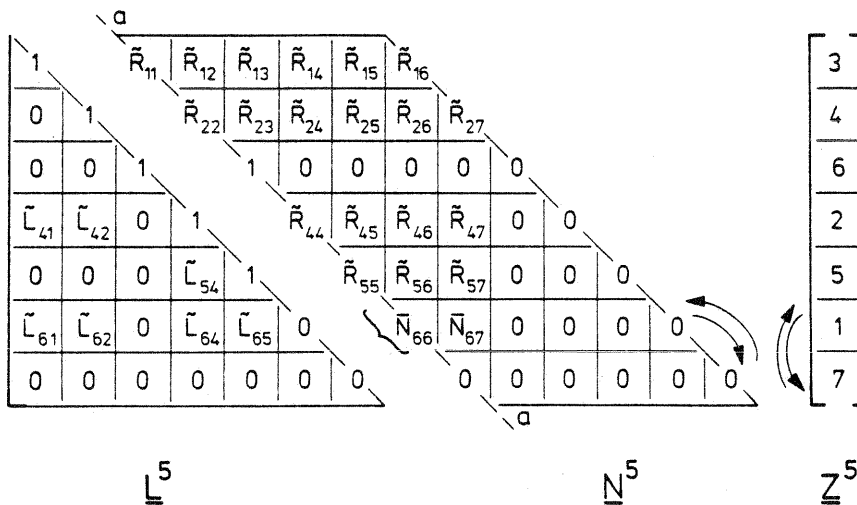


Bild 5.17 Ausgangsmatrizen des 6. Eliminationsschrittes

6. Schritt:

Die 6. Spalte wird als linear abhängig erkannt:

$$N_{66}^6 = \max |N_{i6}^5| \quad \text{und} \quad N_{66}^6 < \varepsilon \|\underline{N}\| \quad \text{mit} \quad i = 6, \dots, \min(6+m_1, m).$$

Es wird entsprechend dem 3. Schritt fortgefahren.

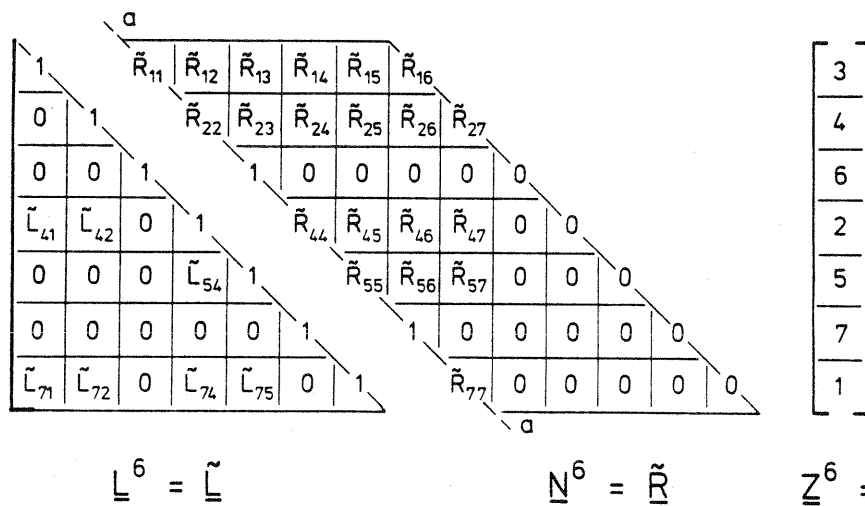


Bild 5.18: Ausgangsmatrizen des 7. Eliminationsschrittes

7. Schritt:

Das Diagonalelement  $N_{77}^6$  wird geprüft: wenn  $N_{77}^6 \geq \varepsilon \|N\|_\infty$  ist, ist die Dreieckszerlegung beendet. Die Matrizen  $L^6$ ,  $N^6$  und  $Z^6$  ergeben sich als Ergebnismatrizen  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{R}$  und  $\tilde{Z}$  in Vektorform. Im Falle  $N_{77}^6 < \varepsilon \|N\|_\infty$  ergibt sich die 7. Zeile als linear abhängig. Das wäre der Fall, wenn das Tragwerk labil ist.

Um den Aufbau der einzelnen Matrizen eines tatsächlichen Tragwerks studieren zu können, sind die zugehörigen Matrizen des Scheibentragwerks in Bild 5.19 geplottet. Jedes vier-eckige Scheibenelement hat 5 linear abhängige Knotenkräf-te[3, 20]. Das Gesamttragwerk ist mit  $n = 40$  Freiheitsgraden und  $m = 80$  Unbekannten 40-fach ( $r = 40$ ) statisch unbestimmt.

Die implizit gespeicherten Zeilen der Erweiterungsmatrix  $\tilde{I}$  sind als "1" auf der Hauptdiagonalen von  $\tilde{R}$  zu erkennen.  $\tilde{L}$  ist äußerst schwach besetzt (nur 7 Elemente sind ungleich Null). Das ist bei allen Tragwerken der Fall. Die Untermatrizen, durch die die Gleichgewichtsmatrix direkt besetzt wird, sind selbst schwach besetzt. Außerdem ist die untere Bandbreite  $m_1$  wesentlich kleiner als die obere Bandbreite  $m_2$ . Daher ist es vorteilhaft, die untere Dreiecksmatrix  $\tilde{L}$

als schwach besetzte Matrix abzuspeichern. Es werden die Nicht-Nullelemente der Spalten (ohne "1" auf der Diagonalen) mit ihrem auf das Diagonalelement bezogenen Abstand gespeichert [20]. Für jedes Nicht-Nullelement werden zwei Speicherplätze benötigt.

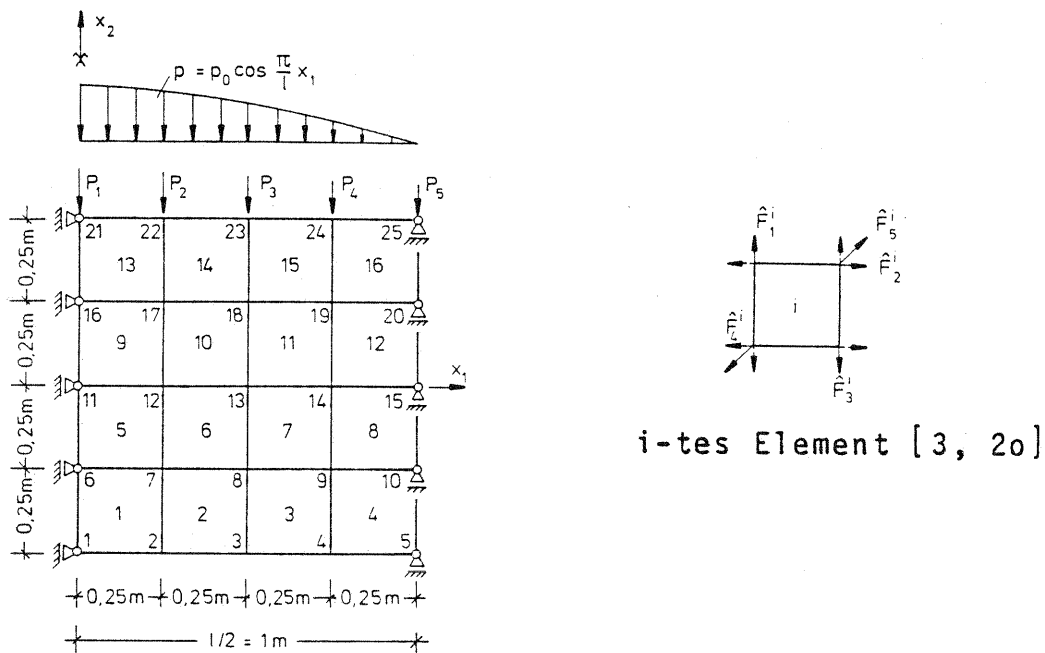


Bild 5.19: Scheibentragwerk

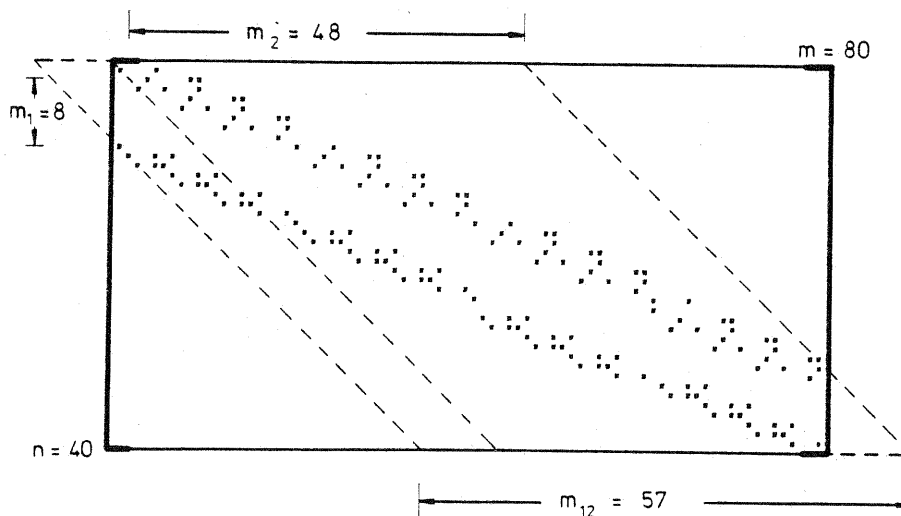


Bild 5.20: Die Besetzung der Gleichgewichtsmatrix



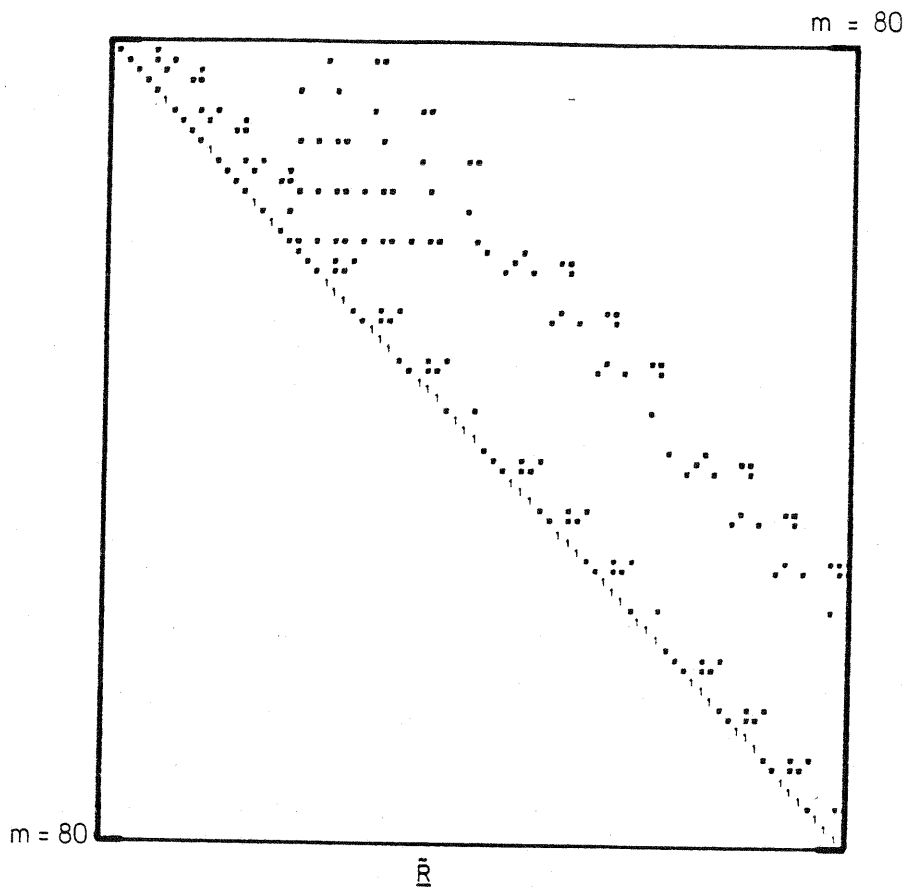
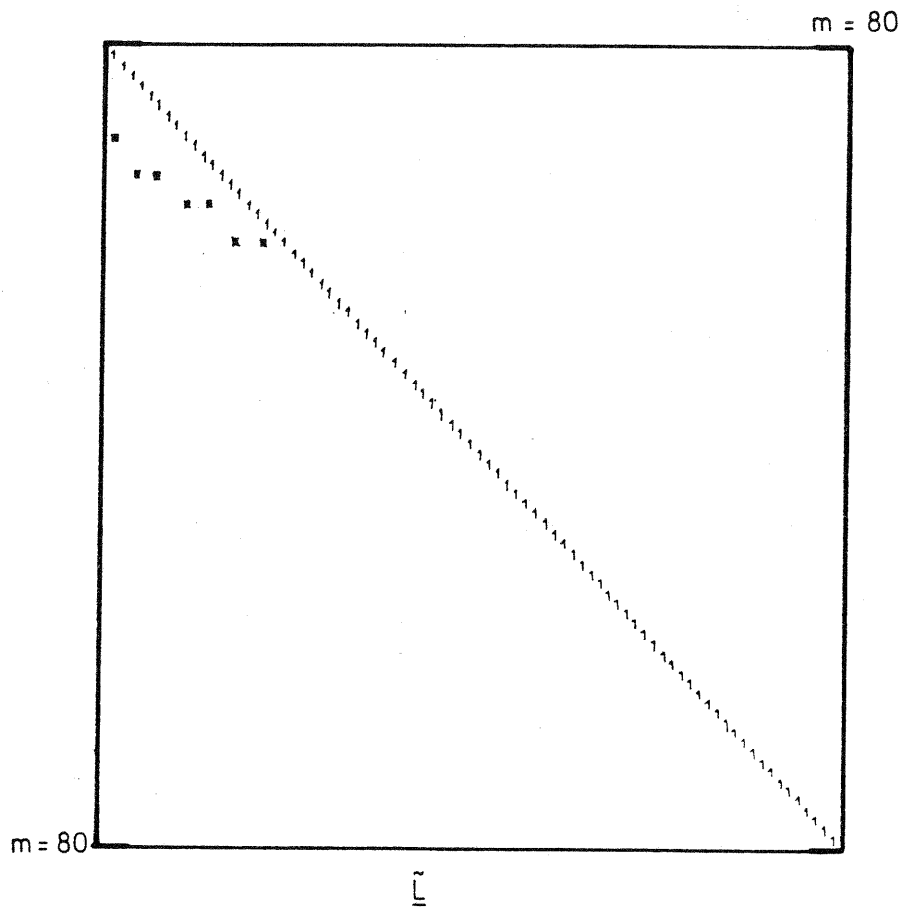


Bild 5.21: Die Besetzung von  $\tilde{L}$  und  $\tilde{R}$

Entsprechend der schwachen Besetzung von  $\tilde{\underline{L}}$  ergeben sich während der Elimination wenig Operationen und folglich weniger Änderungen der Elemente von  $\underline{N}$ . Der Eliminationsprozeß ist daher schnell.

Für den Speicherbedarf ist  $\tilde{\underline{R}}$  maßgebend. Da die Zeilen von  $\tilde{\underline{I}}$  nur implizit gespeichert werden, sind nur  $2 \times 7 = 14$  Speicherplätze bezüglich  $\tilde{\underline{L}}$  und  $n \times m_{12} = 40 \times 57 = 2280$  Speicherplätze bezüglich  $\tilde{\underline{R}}$  (für das gegebene Scheibentragwerk) erforderlich.

Die Eigenspannungszustände  $(\underline{B}_x)_{80 \times 40}$  des Scheibentragwerks werden nach (5.3.18) und (5.3.19) aus  $\tilde{\underline{R}}$  bestimmt. Die transponierte Form von  $\underline{B}_x$  ist in Bild 5.22 geplottet. Das gewählte statisch bestimmte Hauptsystem des Scheibentragwerks kann nicht wie bei Linientragwerken anschaulich dargestellt werden. Um eine Vorstellung zu bekommen, werden die Einflußbereiche ausgewählter Eigenspannungszustände des Scheibentragwerks in Bild 5.23 gezeichnet.  $\hat{F}_k^i = 1$  bedeutet, daß die  $k$ -te Kraft des  $i$ -ten Elementes (s. Bild 5.19) während der Zerlegung als statisch Unbestimmte gewählt wurde und der gezeichnete Spannungszustand zu dieser statisch Unbestimmten gehört. Die Element- und Knotennummern des Scheibentragwerks sind Bild 5.19 zu entnehmen.

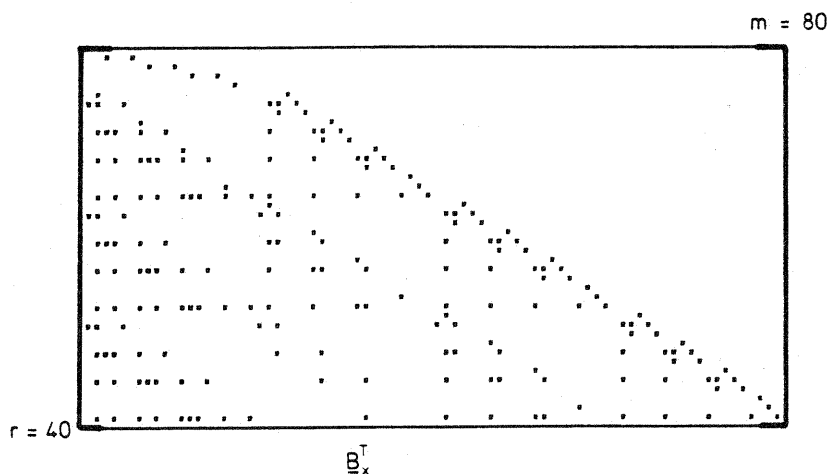


Bild 5.22: Die Besetzung von  $\underline{B}_x^T$

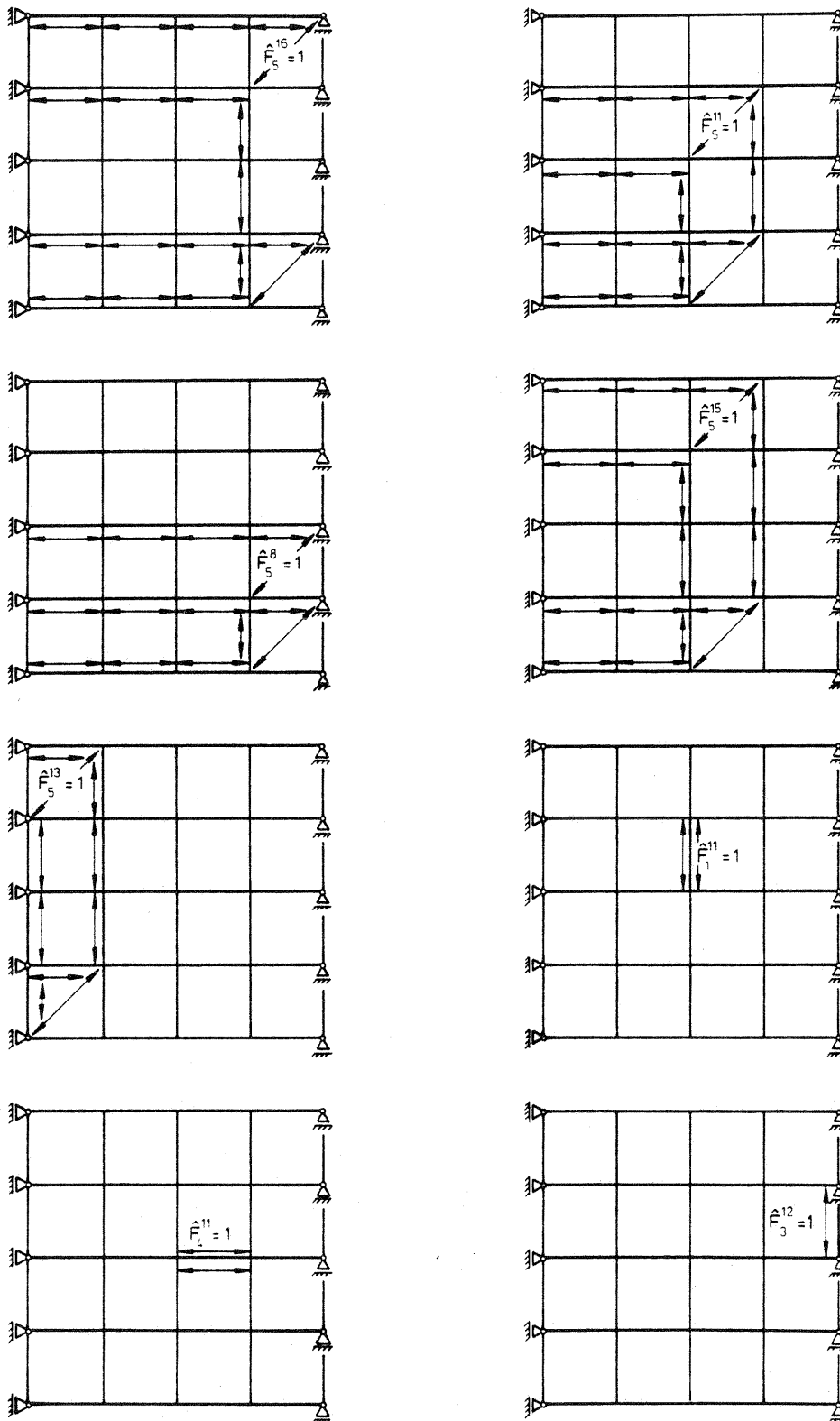


Bild 5.23: Einflußbereiche ausgewählter Eigenspannungszustände des Scheibentragwerks

*Die kompakte Speichertechnik der Gleichgewichtsmatrix:*

Das GAUSS'sche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche und Zeilentausch hat die Eigenschaft, daß die unter dem Diagonalelement vorkommenden Nullelemente der Pivotspalte auch nach der Elimination Null bleiben und keine Änderung der Elemente von  $\underline{N}$  erbringen. Man erkennt, daß die Zeilen von  $\underline{N}$  an der Elimination nur dann teilnehmen, wenn das erste Nicht-Nullelement der Zeile in der Pivotspalte vorkommt. Ist z.B. das erste Nicht-Nullelement der  $i$ -ten Zeile in der  $j$ -ten Spalte, so bleibt diese Zeile bis zum  $j$ -ten Eliminationsschritt unverändert. Daraus folgt unmittelbar, daß die maximale Zeilenlänge  $l_{max}$  (=maximaler Abstand zwischen dem ersten und letzten Nicht-Nullelement) der Matrix  $\underline{N}$  nach der Zerlegung unverändert bleibt. Dies führt dazu, daß die maximale Zeilenlänge von  $\tilde{\underline{R}}$  gleich der maximalen Zeilenlänge von  $\underline{N}$  ist. Da  $\tilde{\underline{R}}$  für den Speicherbedarf der Zerlegung maßgebend ist, genügt es als Bandbreite von  $\tilde{\underline{R}}$  die maximale Zeilenlänge von  $\underline{N}$  zu nehmen.  $l_{max}$  von  $\underline{N}$  bzw. von  $\tilde{\underline{R}}$  ist wesentlich kleiner als die im Abschnitt 5.2 definierte Bandbreite  $m_{12}$ . Daher benötigt  $\tilde{\underline{R}}$  entsprechend weniger Speicherplatz.

Die Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}$  muß in einer speziellen Form gespeichert werden. Dies wird für die Matrix  $\underline{N}_{7 \times 12}$  in Bild 5.7 im folgenden erläutert.

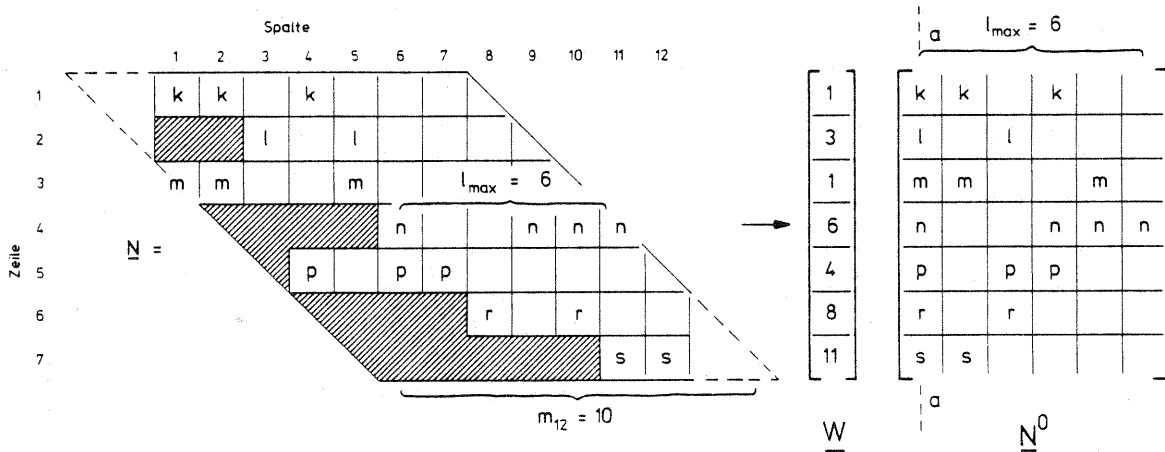


Bild 5.24: Kompakte Speichertechnik der Gleichgewichtsmatrix

Die Nullelemente in  $\underline{N}$ , die auf die Elimination keinen Einfluß haben, sind schraffiert (Bild 5.24). Die maximale Zeilenlänge ergibt sich in der 4. Zeile zu  $l_{max} = 6$ . Es wird ein Vektor  $\underline{W}$  der Länge  $n$  gebildet, der die Spaltennummer der ersten Nicht-Nullelemente je Zeile enthält. Die Zeilen von  $\underline{N}$  werden beginnend mit dem ersten Nicht-Nullelement und mit der konstanten Zeilenlänge  $l_{max}$  in  $\underline{N}^0$  umgespeichert. Der Inhalt von  $\underline{W}$  wird während der Elimination geändert, wenn eine Zeile an der Elimination teilnimmt.

Die Dreieckszerlegung der kompakt gespeicherten Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}^0$  wird genau wie bei der bandförmig gespeicherten Matrix  $\underline{N}$  durchgeführt. Die einzigen Unterschiede sind, daß die an der Elimination teilnehmenden Zeilen durch  $\underline{W}$  bestimmt werden und daß die Zeilen nur  $l_{max}$  lang sind. Z.B.: Unter den  $k, \dots, k+m_1$  Zeilen sind nur die Zeilen an dem  $k$ -ten Eliminationsschritt beteiligt, für die entsprechend  $\underline{W}(k) = \underline{W}(k+1) = \dots = \underline{W}(k+m_1) = k$  gilt. Die Zeilen, die diese Bedingung nicht erfüllen, bleiben unverändert. Wird diese Beziehung für keine Zeile erfüllt, so bedeutet es, daß die  $k$ -te Spalte von  $\underline{N}$  linear abhängig ist.

Durch die kompakte Speichertechnik wird nicht nur der Speicherbedarf der Zerlegung reduziert, sondern die Zerlegung wird auch beschleunigt, da Nulloperationen im schraffierten Bereich ausgeschlossen sind.

Die maximale Zeilenlänge von  $\underline{N}$  läßt sich aus der maximalen Differenz der Nummern der Elemente (s. Kap.:5.2), die einen Knoten des Tragwerks gemeinsam haben, berechnen:

$$l_{max} = (d_{max}^e + 1)\omega.$$

Wobei  $\omega$  die Anzahl der linear unabhängigen Kräfte eines Elementes und  $d_{max}^e$  die maximale Differenz der Elementnummern an den Knoten des Tragwerks ist. Für das Scheibentragwerk von Bild 5.19 ergibt sich mit  $d_{max}^e = 5$  und  $\omega = 5$

$$l_{max} = (5 + 1) \times 5 = 30.$$

Der Speicherbedarf der Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}^0$  beträgt daher  $40 \times 30 = 1200$  Plätze, was 47% weniger als bei der bandförmigen Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}$  ( $40 \times 57 = 2280$  Plätze) in Bild 5.20 ist.

Um den Speicherbedarf beider Speichertechniken bei unterschiedlicher Redundanz vergleichen zu können, werden die maßgebenden Größen  $m_{12}$  und  $l_{max}$  beider Speichertechniken für Scheibentragwerk mit den Elementteilungen  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ , ... in Bild 5.25 grafisch dargestellt. Man erkennt, daß der Speicherbedarf der bandförmigen Speichertechnik mit steigender Redundanz überproportional steigt, während der Speicherbedarf der kompakten Speichertechnik proportional steigt.

Teilung	r	$m_{12}$	$l_{max}$	Speicherbedarf (Plätze)	
				Band	kompakt
$2 \times 2$	8	21	20	378	360
$4 \times 4$	40	57	30	2280	1200
$8 \times 8$	176	212	50	30528	7200

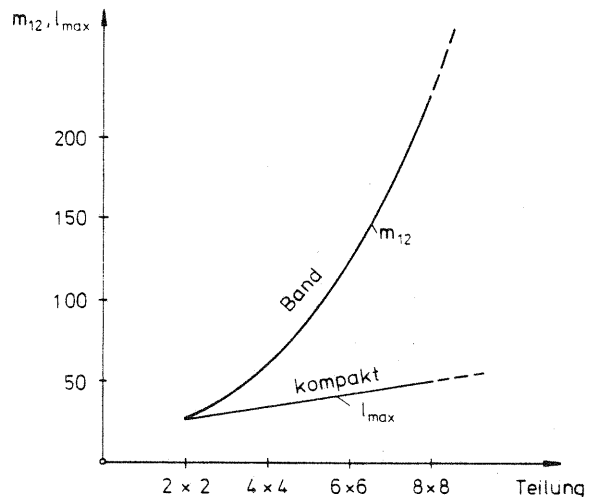


Bild 5.25: Speicherbedarf der bandförmigen und der kompakten Speichertechnik

#### 5.4 Kompakte Eigenspannungszustände

Wie aus Bild 5.23 ersichtlich ist, laufen die mit (5.3.14) berechneten Eigenspannungszustände über das ganze Tragwerk. Die einzelnen Vektoren von  $\underline{B}_x$  und folglich auch die Koeffizientenmatrix  $\underline{D}_x = \underline{B}_x^T \hat{f} \underline{B}_x$  der Kompatibilitätsgleichungen (4.2.31) sind voll besetzt.

Durch eine "geschickte" Wahl des statisch bestimmten Systems oder durch Linearkombinationen der statisch Unbestimmten ist es möglich, die Eigenspannungszustände auf "kurze" Laufwege innerhalb des Tragwerks zu beschränken. In diesem Fall sollen alle Eigenspannungszustände möglichst wenige Elemente des Tragwerks beeinflussen, die Eigenspannungszustände sollen "kompakt" [22] sein. Die kompakten Eigenspannungszustände liefern eine bandförmige Koeffizientenmatrix der Kompatibilitätsgleichungen, die eine gute Kondition aufweist. Infolgedessen werden Speicherbedarf und Rechenaufwand geringer. Weiterhin wird auch der Einfluß der Rundungsfehler bei der Computerberechnung verringert.

Zur Berechnung der kompakten Eigenspannungszustände wird im folgenden ein Verfahren angegeben. Dieses Verfahren ist für alle Arten von Tragwerken anwendbar. Der Computer übernimmt damit die von B. FRAEIJS de VEUBEKE [15] formulierte Aufgabe.

*Bestimmungsgleichungen eines kompakten Eigenspannungszustandes:*

Die kompakten Eigenspannungszustände werden mit  $\bar{\underline{B}}_x$  bezeichnet.  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  ist die j-te Spalte von  $\bar{\underline{B}}_x$  und ist  $X_j = \hat{F}_i$  zugeordnet (Bild 5.11(a)).

Zur Berechnung der kompakten Eigenspannungszustände wird die Matrix  $\bar{\underline{R}}$  von (5.3.15) beibehalten. Das bedeutet, daß das in Kapitel 5.3 nach dem GAUSS'schen Eliminationsverfahren gewählte statisch bestimmte Hauptsystem übernommen wird.

Die Dreiecksmatrix  $\tilde{\underline{R}}$  enthält einschließlich der  $i$ -ten Zeile insgesamt  $j$  eingefügte Zeilen. Diese eingefügten Zeilen enthalten ausschließlich eine "1" auf der Hauptdiagonalen von  $\tilde{\underline{R}}$  (Bild 5.11(a)). Werden diese  $j$  eingefügten Zeilen der Matrix  $\tilde{\underline{R}}$  und die korrespondierenden Zeilen der rechten Seite  $\tilde{\underline{I}}_j^T$  gestrichen, so kann die Gleichung (5.3.15) in der Form

$$\bar{\underline{R}}_j \bar{\underline{B}}_{xj} = \underline{0} \quad (5.4.1)$$

geschrieben werden.  $\bar{\underline{R}}_j$  ist mit  $\tilde{\underline{R}}$  bis auf die  $j$  in  $\tilde{\underline{R}}$  eingefügten Zeilen identisch.  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  ist jedoch ein anderer Vektor als  $\underline{B}_{xj}$ . Die Gleichung (5.3.15) entspricht Bild 5.11(a) und Gleichung (5.4.1) entspricht Bild 5.26.

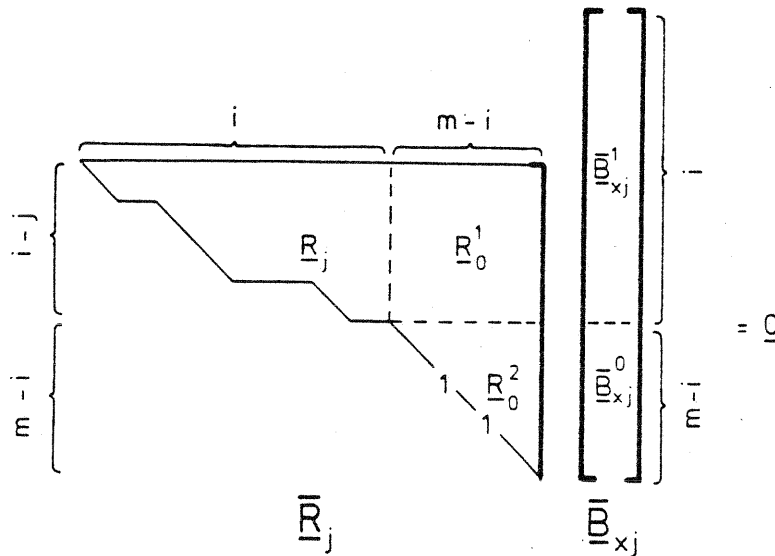


Bild 5.26: Zur Bestimmung der kompakten Eigenspannungszustände

(5.4.1) kann nach Bild 5.26 durch

$$\underline{R}_j \underline{B}_{xj}^1 + \underline{R}_0^1 \underline{B}_{xj}^0 = \underline{0} \quad (5.4.2)$$

und

$$\underline{R}_0^2 \underline{B}_{xj}^0 = \underline{0} \quad (5.4.3)$$



ersetzt werden. Die Dreiecksmatrix  $\underline{R}_0^2 \equiv \tilde{\underline{R}}_0^2$  ist regulär. Aus (5.4.3) folgt die triviale Lösung

$$\underline{\bar{B}}_{xj}^0 = \underline{0}; \quad (5.4.4)$$

(5.4.2) liefert mit (5.4.4) die Beziehung

$$\underline{R}_j \underline{\bar{B}}_{xj}^1 = \underline{0}. \quad (5.4.5)$$

Die Vektoren  $\underline{\bar{B}}_{xj}^0 = \underline{0}$  und  $\underline{B}_{xj}^0 = \underline{0}$  haben wegen  $\underline{R}_0^2 \equiv \tilde{\underline{R}}_0^2$  die selbe Dimension  $((m-i) \times 1)$ . Diese beiden Vektoren sind daher identisch.

Man bezeichnet mit  $\bar{z}_{xj}$  die Länge (= Abstand zwischen dem ersten und letzten Nicht-Nullelement) von  $\underline{\bar{B}}_{xj}^1$  in Bild 5.26 und mit  $z_{xj}$  die Länge von  $\underline{B}_{xj}^1$  in Bild 5.11(a). Da die beiden Vektoren  $\underline{\bar{B}}_{xj}^0$  und  $\underline{B}_{xj}^0$  Nullvektoren sind, haben sie keinen Einfluß auf  $\bar{z}_{xj}$  und  $z_{xj}$ . Daher sind  $\bar{z}_{xj}$  und  $z_{xj}$  gleichzeitig auch die tatsächlichen Längen von  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  und  $\underline{B}_{xj}$ . Um  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  als einen kompakten Eigenspannungszustand bezeichnen zu können, muß  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  so bestimmt werden, daß

$$\bar{z}_{xj} \leq z_{xj}. \quad (5.4.6)$$

gilt. Die Gleichungen (5.4.4) und (5.4.5) sollen als die Bestimmungsgleichungen des kompakten Eigenspannungszustandes  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  bezeichnet werden. Offensichtlich kann man aus  $\tilde{\underline{R}}$  für alle  $r$  Eigenspannungszustände genau  $r$  (5.4.4) und (5.4.5) entsprechende Gleichungen angeben.

*Berechnung des kompakten Eigenspannungszustandes  $\underline{\bar{B}}_{xj}$ :*

Um den vollständigen Vektor  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  zu bestimmen, muß zuerst  $\underline{\bar{B}}_{xj}^1$  aus (5.4.5) berechnet werden. Die Zeilen der Koeffizientenmatrix  $\underline{R}_j$  sind voneinander linear unabhängig, weil die selben Zeilen in  $\tilde{\underline{R}}$  enthalten sind. Die Dimension von  $\underline{R}_j$



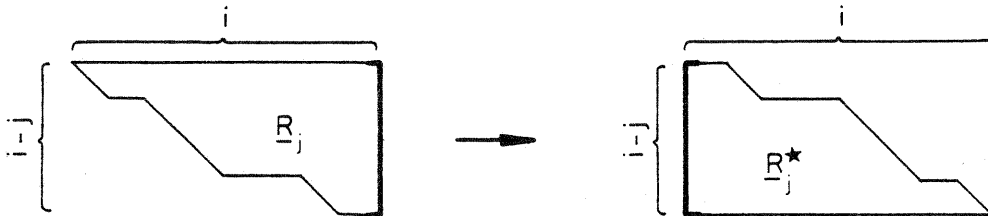
$$r_{kz}^* = r_{st} \quad \begin{cases} k = 1, \dots, (i-j) \\ z = 1, \dots, i \end{cases} \quad \begin{cases} s = i-j-k+1 \\ t = i-z+1 \end{cases} \quad (5.4.10)$$

identisch, wobei  $r_{kz}^*$  und  $r_{st}$  die Elemente von  $\underline{R}_j^*$  und  $\underline{R}_j$  sind. Damit (5.4.7) verständlich wird, wird die Transformation an Hand einer  $3 \times 4$ -Matrix ( $i-j=3, i=4$ ) in Bild 5.27(a) erläutert. Man erkennt, daß  $\underline{R}_j$  durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen in  $\underline{R}_j^*$  transformiert wird. Die transformierte Form von  $\underline{R}_j$  von Bild 5.26 ist ebenfalls in Bild 5.27(b) gegeben.

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{34} & r_{33} & r_{32} & r_{31} \\ r_{24} & r_{23} & r_{22} & r_{21} \\ r_{14} & r_{13} & r_{12} & r_{11} \end{bmatrix}$$

$\underline{I}_1 \qquad \underline{R}_j \qquad \underline{I}_2 \qquad \underline{R}_j^*$

(a)



(b)

Bild 5.27: Matrixtransformation nach (5.4.7)  
bzw. nach (5.4.10)

Da die Transformation (5.4.7) keinen Einfluß auf den Rang hat, besitzt  $\underline{R}_j^*$  wie  $\underline{R}_j$  den Rangabfall  $j$ ;  $j$  Spalten von  $\underline{R}_j^*$  sind linear abhängig. Wird nun das GAUSS'sche Eliminationsverfahren auf (5.4.8) angewendet, so werden  $j$  Spalten von  $\underline{R}_j^*$  als linear abhängig erkannt. Diese linear abhängigen Spalten sind, bedingt durch die Transformation

(5.4.7), nicht unbedingt mit den linear abhängigen Spalten von  $\underline{R}_j$  identisch. Denn bei der Zerlegung von  $\underline{R}_j^*$  ergeben sich andere Pivotelemente als bei der Zerlegung von  $\underline{N}$ , aus der  $\underline{R}_j$  abgeleitet wurde.

Die GAUSS'sche Dreieckszerlegung, wie in Kapitel 5.3 beschrieben, liefert für  $\underline{R}_j^*$

$$\underline{Z} \underline{\tilde{L}}_j^* \underline{\tilde{R}}_j^* = \begin{bmatrix} \underline{R}_j^* \\ \underline{\tilde{I}}^* \end{bmatrix} = \underline{\tilde{R}}^* , \quad (5.4.11)$$

wobei  $\underline{Z}$  die Vertauschungsmatrix mit der Dimension  $i \times i$  und  $\underline{\tilde{L}}_j^*$  und  $\underline{\tilde{R}}_j^*$  die nicht singuläre untere und obere Dreiecksmatrix von  $\underline{\tilde{R}}^*$  sind.  $\underline{\tilde{I}}^*$  gibt die Erweiterungsmatrix an, die aufgrund der linear abhängigen Spalten von  $\underline{R}_j^*$  während der Zerlegung bestimmt wird (s. Kapitel 5.3, GAUSS'sche Eliminationsverfahren). Die symbolische Darstellung der Zerlegung von  $\underline{R}_j^*$  von Bild 5.27(b) ist in Bild 5.28 gezeigt. Hierbei wird angenommen, daß die Zeilen von  $\underline{R}_j^*$  während der Zerlegung nur mit den Zeilen von  $\underline{\tilde{I}}^*$  und nicht untereinander vertauscht sind. Die als linear abhängig festgestellten Spalten sind an einer "1" auf der Diagonalen von  $\underline{\tilde{R}}_j^*$  zu erkennen.

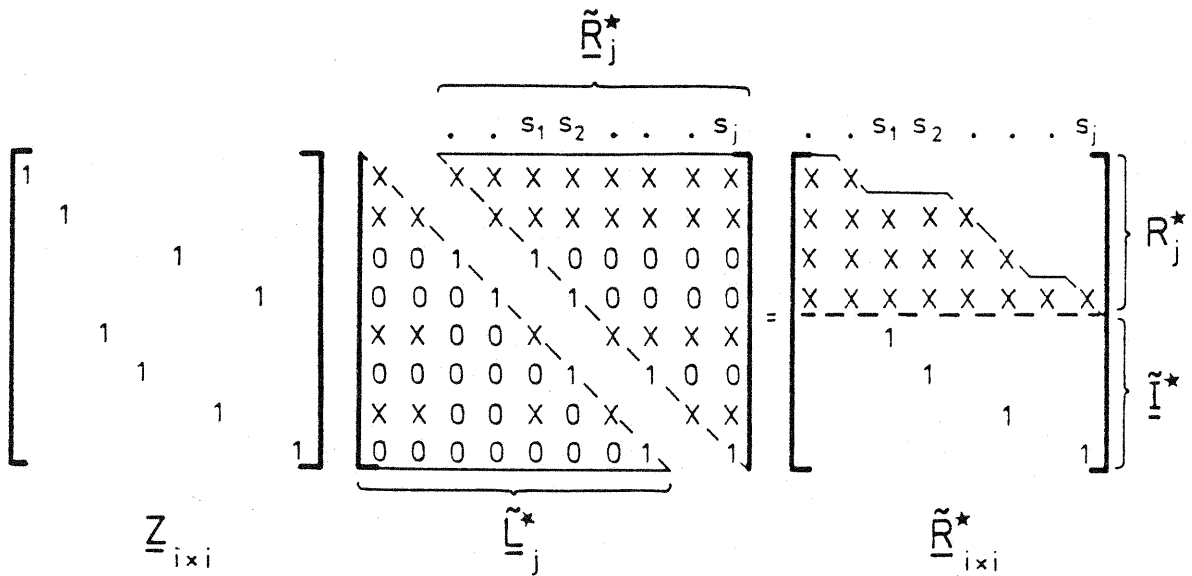


Bild 5.28: Zur Zerlegung von  $\underline{R}_j^*$

Weil  $\underline{R}_j^*$  in (5.4.8)  $j$  linear abhängige Spalten besitzt, gibt es mindestens  $j$  Lösungen, die (5.4.8) erfüllen. Werden diese Lösungen mit  $\underline{\bar{B}}_{xj}^*$  bezeichnet, so erhält (5.4.8) die Form

$$\underline{R}_j^* \underline{I}_2 \underline{\bar{B}}_{xj}^* = \underline{0}. \quad (5.4.12)$$

Damit (5.4.11) in (5.4.12) eingesetzt werden kann, wird (5.4.12) entsprechend  $\underline{\tilde{I}}^*$  erweitert.

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_j^* \\ \underline{\tilde{I}}^* \end{bmatrix} \underline{I}_2 \underline{\bar{B}}_{xj}^* = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \underline{P}_j^*, \quad (5.4.13)$$

wobei sich die Dimension von  $\underline{P}_j^*$  mit  $\underline{0}_{(i-j) \times j}$  und  $\underline{I}_{j \times j}$  zu  $i \times j$  ergibt. Die Gültigkeit von (5.4.13) kann über die Definition von  $\underline{\tilde{I}}^*$  geprüft werden. Die Gleichung (5.4.13) wird auf gleichem Weg wie die Gleichung (5.3.12) abgeleitet. Mit (5.4.11) folgt

$$\underline{Z} \underline{\tilde{L}}_j^* \underline{\tilde{R}}_j^* \underline{I}_2 \underline{\bar{B}}_{xj}^* = \underline{P}_j^*$$

oder

$$\underline{\tilde{R}}_j^* \underline{I}_2 \underline{\bar{B}}_{xj}^* = (\underline{\tilde{L}}_j^*)^{-1} \underline{Z}^T \underline{P}_j^*.$$

Wie bei der Ableitung von (5.3.13) angegeben wurde, gilt auch hier

$$(\underline{\tilde{L}}_j^*)^{-1} \underline{Z}^T \underline{P}_j^* = (\underline{\tilde{L}}_j^*)^{-1} (\underline{\tilde{I}}^*)^T = (\underline{\tilde{I}}^*)^T \quad \text{mit} \quad (\underline{\tilde{L}}_j^*)^{-1} \neq \underline{I}.$$

Damit erhält man

$$\underline{\tilde{R}}_j^* \underline{I}_2 \underline{\bar{B}}_{xj}^* = (\underline{\tilde{I}}^*)^T; \quad (5.4.14)$$

oder unter Beachtung von  $\underline{I}_2^{-1} = \underline{I}_2$

$$\underline{\bar{B}}_{xj}^* = \underline{I}_2 (\underline{\tilde{R}}_j^*)^{-1} (\underline{\tilde{I}}^*)^T. \quad (5.4.15)$$



Wie leicht aus dem Aufbau von  $(\tilde{R}_j^*)^{-1}$  und  $(\tilde{I}^*)^T$  zu ersehen ist, ist die erste Lösung in  $\tilde{B}_{xj}^*$  immer kürzer als alle anderen. Sollen  $s_1, s_2, \dots, s_j$  die Spaltennummern der ersten, zweiten, ..., j-ten linear abhängigen Spalten von  $\tilde{R}_j^*$  bezeichnen, so gilt

$$\tilde{z}_{xj} = s_1 < s_2 < \dots < s_j \leq i = z_{xj}. \quad (5.4.16)$$

Da  $s_1, s_2, \dots, s_j$  die Längen, d.h. den besetzten Bereich der einzelnen Lösungen in  $\tilde{B}_{xj}^*$  angeben, ergibt sich die erste Lösung mit der Länge  $s_1$  als kürzeste Lösung von (5.4.12) bzw. (5.4.8). Bezeichnet man mit  $\tilde{I}_{s_1}^*$  die erste Zeile von  $\tilde{I}^*$  ( $\tilde{I}_{s_1}^*$  = die  $s_1$ -te Zeile der  $i \times i$ -Einheitsmatrix), erhält man

$$\tilde{R}_{j-2}^* \tilde{I}_{s_1}^* \tilde{B}_{xj}^1 = (\tilde{I}_{s_1}^*)^T \quad \text{oder} \quad \tilde{B}_{xj}^1 = \tilde{I}_2 (\tilde{R}_j^*)^{-1} (\tilde{I}_{s_1}^*)^T. \quad (5.4.17)$$

Der vollständige Eigenspannungszustand  $\tilde{B}_{xj}$  ergibt sich nach Bild 5.26 mit (5.4.4) und (5.4.17) zu

$$\tilde{B}_{xj} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{xj}^1 \\ \tilde{B}_{xj}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_2 (\tilde{R}_j^*)^{-1} (\tilde{I}_{s_1}^*)^T \\ \underline{0} \end{bmatrix}. \quad (5.4.18)$$

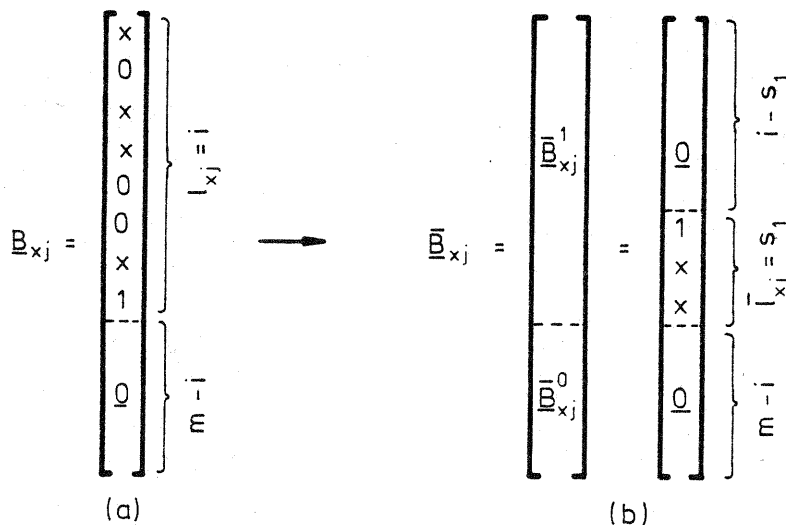


Bild 5.30: Der j-te nicht kompakte und kompakte Eigenspannungszustand

Für die Matrizen von Bild 5.29 ist  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  und die korrespondierende Lösung  $\underline{B}_{xj}$  aus Bild 5.11 in Bild 5.30 gegeben.  $\bar{z}_{xj} = s_1$  und  $z_{xj} = i$  erfüllen nach (5.4.16) die Bedingung (5.4.6), d.h.  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  ist der j-te kompakte Eigenspannungszustand.

*Die "geschickte" Berechnung von  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  und weitere Bemerkungen:*

Nach (5.4.17) beeinflusst die Inversion der  $i \times i$ -Matrix  $\tilde{\underline{R}}_j^*$  die Berechnung, obwohl die ersten  $i - s_1$  Elemente von  $\bar{\underline{B}}_{xj}^1$  immer null sind. Nur die quadratische nichtsinguläre  $s_1 \times s_1$ -Untermatrix (Bild 5.29) hat einen Einfluß auf die Lösung. Da die  $s_1 \times s_1$ -Untermatrix in  $(\tilde{\underline{R}}_j^*)^{-1}$  die Inverse der  $s_1 \times s_1$ -Untermatrix in  $\tilde{\underline{R}}_j^*$  (Bild 5.28) ist, wird die Berechnung von  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  zweckmäßig wie folgt ausgeführt:

1.  $\underline{R}_j$  (Bild 5.26) wird aus  $\tilde{\underline{R}}_j$  gebildet.
2. Die Transformation (5.4.7) wird nach (5.4.10) ausgeführt und  $\underline{R}_j^*$  wird aufgestellt.
3. Die Dreieckszerlegung nach GAUSS wird auf  $\underline{R}_j^*$  nur bis zur ersten linear abhängigen Spalte ausgeführt. Die Nummer dieser Spalte sei  $s_1$ .
4. Die ersten  $s_1$  Elemente der  $s_1$ -ten Spalte der  $i \times i$ -Einheitsmatrix bilden die rechte Seite.
5. Diese rechte Seite wird in die durch die Zerlegung entstandene  $s_1 \times s_1$ -obere Dreiecksmatrix rückwärtseingesetzt. Die Transformation (5.4.10) wird während des Rückwärtseinsetzens rückgängig gemacht, indem jedes berechnete Element von  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  direkt auf den ursprünglichen Platz in  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  abgelegt wird.

Der 2. Schritt bei der Berechnung von  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  ist optional. Man kann die Zerlegung ohne Transformation (5.4.10) direkt auf  $\underline{R}_j$  anwenden. In diesem Fall muß aber die Zerlegung rückwärts erfolgen. Die Zerlegung fängt mit dem letzten Element  $r_{(i-j)i}$  ( $r_{st}$  = Elemente von  $\underline{R}_j$ ;  $(i-j) \times i$  = Dimension von  $\underline{R}_j$ )



an. Die Transformation (5.4.10) ist aber vorteilhafter, weil der zur Bestimmung von  $\tilde{\underline{R}}$  (s. Kapitel 5.3) verwandte Algorithmus auch hier anwendbar ist.

Die linear abhängigen Spalten von  $\underline{N}$ , die als "1" auf der Diagonalen von  $\tilde{\underline{R}}$  zu erkennen sind, kommen im allgemeinen gruppenweise vor. D.h., Daß mehrere Unbekannte eines Elementes als statisch Unbestimmte gewählt werden. Werden z.B. alle drei Kräfte eines Balkenelementes in einem Tragwerk als statisch Unbestimmte gewählt, so bilden diese eine Gruppe von statisch Unbestimmten. Um die zugehörigen kompakten Eigenspannungszustände zu berechnen, muß nicht unbedingt für jede statisch Unbestimmte eine  $\underline{R}_j$ -Matrix gebildet werden. Man ordnet der Gruppe von statisch Unbestimmten nur eine  $\underline{R}_j$ -Matrix zu und rechnet alle zugehörigen kompakten Eigenspannungszustände.

In dem man das Verfahren auf die Matrix  $\tilde{\underline{R}}_j^*$  (= die Koeffizientenmatrix von  $\underline{\bar{B}}_{xj}^1$  nach (5.4.17)) anwendet, ist es nicht möglich  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  noch kompakter zu berechnen, da  $s_1 \times s_1$ -Matrix von  $\tilde{\underline{R}}_j^*$  nur eine linear abhängige Spalte (=  $s_1$ -te Spalte) enthält. Es existiert daher keine nicht-singuläre Matrix mit kleinerer Kantenlänge als  $s_1$ .

Die zur ersten statisch Unbestimmten gehörende  $\underline{R}_j = \underline{R}_1$ -Matrix besitzt nur eine linear abhängige Spalte ( $j = 1$ ).  $\underline{B}_{x1}$  wird daher als  $\underline{\bar{B}}_{x1}$  übernommen. Diese Aussage kann wie folgt verallgemeinert werden: Hat die Matrix  $\underline{R}_j$  nur eine einzige linear abhängige Spalte (Rangabfall = 1), so ist der zugehörige kompakte Eigenspannungszustand  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  mit dem nicht kompakten Eigenspannungszustand  $\underline{B}_{xj}$  identisch (vgl. Bild 5.23 mit 5.34). Dadurch reduziert sich die Anzahl der zu berechnenden kompakten Eigenspannungszustände.

Bandbreite der Matrix  $\bar{D}_x$ :

Die Matrix  $\bar{B}_x$  der kompakten Eigenspannungszustände besitzt Bandform. Die halbe Bandbreite der Flexibilitätsmatrix  $\hat{f}$  ist  $l_f$  und die Bandbreite von  $\bar{B}_x^T$  ist  $l_x$  (= maximaler Abstand zwischen dem ersten und letzten Nicht-Nullelement der Spalten von  $\bar{B}_x^T$  (Bild 5.31)). Die halbe Bandbreite  $l_d$  der zu den kompakten Eigenspannungszuständen gehörenden Koeffizientenmatrix  $\bar{D}_x = \bar{B}_x^T \hat{f} \bar{B}_x$  der Kompatibilitätsgleichungen ergibt sich zu

- a)  $l_d = l_x$  , wenn  $r \geq l_x \geq l_f$   
 b)  $l_d = l_f$  , wenn  $r \geq l_f \geq l_x$   
 c)  $l_d = r$  , wenn  $l_x = r$  oder  $r < l_f$ .

Der Fall c) tritt bei kleinerer Redundanz auf. Dann ist  $\bar{D}_x$  voll besetzt. Die kompakten Eigenspannungszustände zu berechnen lohnt sich nur, wenn  $r$  groß ist. Für den Fall a) ist die Schematische Bestimmung der Bandbreite von  $\bar{D}_x$  in Bild 5.31 gegeben.

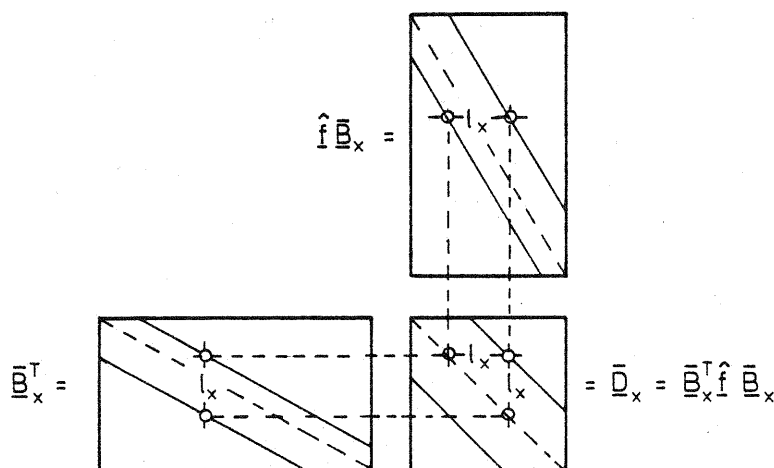


Bild 5.31: Bandbreite von  $\bar{D}_x$  für den Fall a)



2) Wahl der statisch Unbestimmten, Dreieckszerlegung:  
 $\underline{Z}\underline{\tilde{L}}\underline{\tilde{R}} = \underline{\tilde{N}}$  (s.: (5.3.6))

$$\underline{Z} \underline{\tilde{L}} \underline{\tilde{R}} = \underline{\tilde{N}}$$

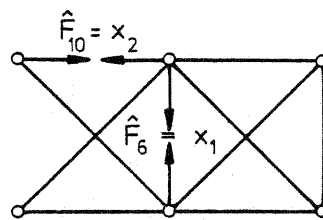
The matrix  $\underline{Z}$  is a 10x10 matrix with 1s at positions (1,2), (2,1), (3,3), (4,4), (5,7), (6,6), (7,9), (8,8), (9,9), and (10,10).

The matrix  $\underline{\tilde{L}}$  is a 10x10 matrix with a diagonal of 1s. The upper triangular part contains terms like  $-\alpha$ ,  $-\alpha-1$ ,  $\alpha$ , and  $\alpha-1$ . The lower triangular part contains terms like  $-1$ ,  $-1-1$ , and  $1$ . Rows 6 and 9 are shaded.

The matrix  $\underline{\tilde{R}}$  is a 10x10 matrix with a diagonal of 1s. The upper triangular part contains terms like  $-\alpha$ ,  $-\alpha-1$ ,  $\alpha$ , and  $\alpha-1$ . The lower triangular part contains terms like  $-1$ ,  $-1-1$ , and  $1$ . Rows 6 and 9 are shaded.

$$\underline{\tilde{N}} = \underline{Z}\underline{\tilde{L}}\underline{\tilde{R}} =$$

The matrix  $\underline{\tilde{N}}$  is a 10x10 matrix with a diagonal of 1s. The upper triangular part contains terms like  $-\alpha-1$ ,  $-\alpha$ ,  $-\alpha$ ,  $\alpha$ ,  $-\alpha-1$ ,  $\alpha$ , and  $-\alpha-1$ . The lower triangular part contains terms like  $1$ ,  $1$ , and  $1$ . Rows 6 and 9 are shaded.

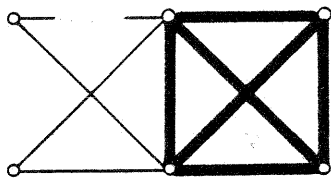


Die in  $\underline{\tilde{L}}$  und  $\underline{\tilde{R}}$  eingefügten Zeilen sind schraffiert. Aus der Besetzung von  $\underline{\tilde{I}}$  erkennt man, daß  $\hat{F}_6 = x_1$  und  $\hat{F}_{10} = x_2$  als statisch Unbestimmte gewählt wurden.

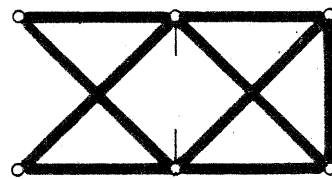
3) Eigenspannungszustände  $\underline{B}_x$  nach (5.3.13):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 -1 & & -\alpha & & & & & & & \\
 & -1 & & -\alpha & & & & & & \\
 & & -1 & & -\alpha & & & & & \\
 & & & -1 & & -\alpha & & & & \\
 & & & & 1 & & \alpha & & & \\
 & & & & & 1 & & \alpha & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & \alpha & & -\alpha \\
 & & & & & & & & -1 & -\alpha \\
 & & & & & & & & & -\alpha - 1 \\
 & & & & & & & & & & 1
 \end{array} \\
 \underline{\tilde{R}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \underline{B}_x = \\
 \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{\quad} \\
 \underline{B}_x = \\
 \left[ \begin{array}{cc}
 1 & 2 \\
 1 & -1 \\
 -\beta & \beta \\
 1 & -1 \\
 -\beta & \beta \\
 1 & 0 \\
 & -\beta \\
 & 1 \\
 & -\beta \\
 & 1
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 9 \\
 10
 \end{array}
 \end{array}$$

Einflußbereiche der Eigenspannungszustände  $\underline{B}_x$  (Größere Strichstärke)



Einflußbereich von  $\underline{B}_{x1}$



Einflußbereich von  $\underline{B}_{x2}$

4) Kompakte Eigenspannungszustände  $\bar{\underline{B}}_x$  nach (5.4.18):

Der erste Eigenspannungszustand wird übernommen:  $\bar{\underline{B}}_{x1} = \underline{B}_{x1}$ .  
 $\underline{R}_j = \underline{R}_2$ -Matrix nach (5.4.5) und ihre Transformation nach (5.4.10):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 -1 & & -\alpha & & & & & \\
 & -1 & & -\alpha & & & & \\
 & & -1 & & -\alpha & & & \\
 & & & -1 & & -\alpha & & \\
 & & & & 1 & & \alpha & \\
 & & & & & 1 & & \alpha \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & \alpha & -\alpha \\
 & & & & & & & & -1 & -\alpha \\
 & & & & & & & & & -\alpha - 1
 \end{array} \\
 \underline{R}_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \underline{I}_1 \underline{R}_2 \underline{I}_2 = \underline{R}_2^* = \\
 \left[ \begin{array}{cccccccc}
 -1 & -\alpha & & & & & & \\
 & -\alpha - 1 & & & & & & \\
 & & -\alpha & & & & & \\
 & & & \alpha & & & & \\
 & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\
 & & & & & \alpha & 1 & \\
 & & & & & & -1 & -\alpha \\
 & & & & & & & -\alpha \\
 & & & & & & & & -1 & -1
 \end{array} \right] \\
 \underline{R}_2^*
 \end{array}$$

Dreieckszerlegung nach (5.4.11)  $\underline{Z} \underline{L}_2^* \underline{R}_2^* = \underline{R}^*$ :

$$\underline{Z} \underline{L}_2^* \underline{R}_2^* = \underline{R}^*$$

Die erste linear abhängige Spalte von  $\underline{R}_2^*$  ergibt sich als 5. Spalte.

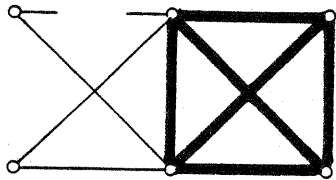
Berechnung von  $\underline{B}_{x2}^1$  nach (5.4.17) :

$$\underline{R}_2^* \underline{B}_{x2}^1 = (\underline{I}_{S_1}^*)^T$$

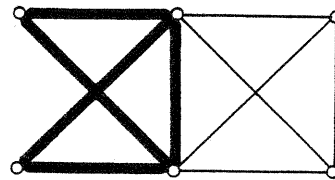
$$\underline{B}_{x2}^1 = \underline{I}_2 \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \\ 1 \\ -\beta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \\ 1 \\ -\beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{B}_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -\beta & 1 \\ 1 & 2 \\ -\beta & 1 \\ 1 & 2 \\ -\beta & 1 \\ 1 & 2 \\ -\beta & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Da die Dimension von  $\bar{B}_{x2}^1$   $10 \times 1$  ist, existiert  $\bar{B}_{x2}^0$  nach (5.4.18) nicht. Daher  $\bar{B}_{x2} = \bar{B}_{x2}^1$ . Es gilt:  $\bar{B}_{x2} = \bar{B}_{x1} + \bar{B}_{x2}$ .

Einflußbereiche der kompakten Eigenspannungszustände  $\bar{B}_x$  (Größere Strichstärke):



Einflußbereich von  $\bar{B}_{x1}$



Einflußbereich von  $\bar{B}_{x2}$

*Die kompakten Eigenspannungszustände des Scheibentragwerks von Bild 5.19:*

Die Besetzung von  $\bar{B}_x^T$  und der Einflußbereiche ausgewählter Eigenspannungszustände des Scheibentragwerks wurden in Bild 5.22 und 5.23 dargestellt. Um das Verfahren zur Berechnung der kompakten Eigenspannungszustände besser zu veranschaulichen, sind die zugehörigen kompakten Eigenspannungszustände  $\bar{B}_x$  in Bild 5.33 dargestellt. Die ausgewählten kompakten Eigenspannungszustände von Bild 5.34 sind mit denen in Bild 5.23 zu vergleichen.

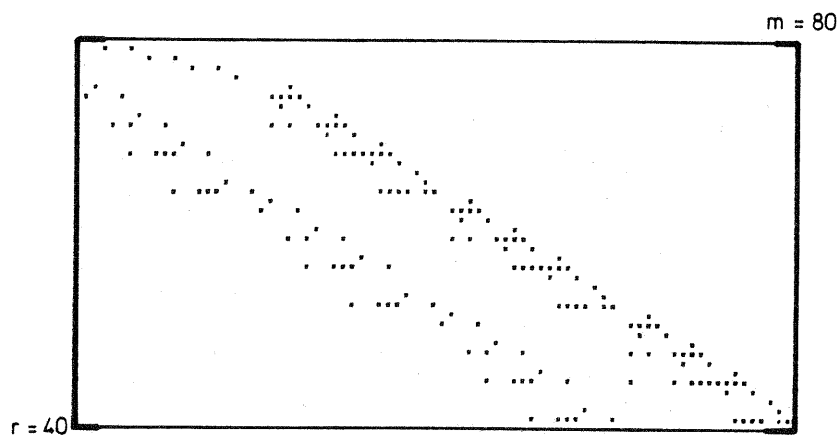


Bild 5.33: Die Besetzung von  $\bar{B}_x^T$

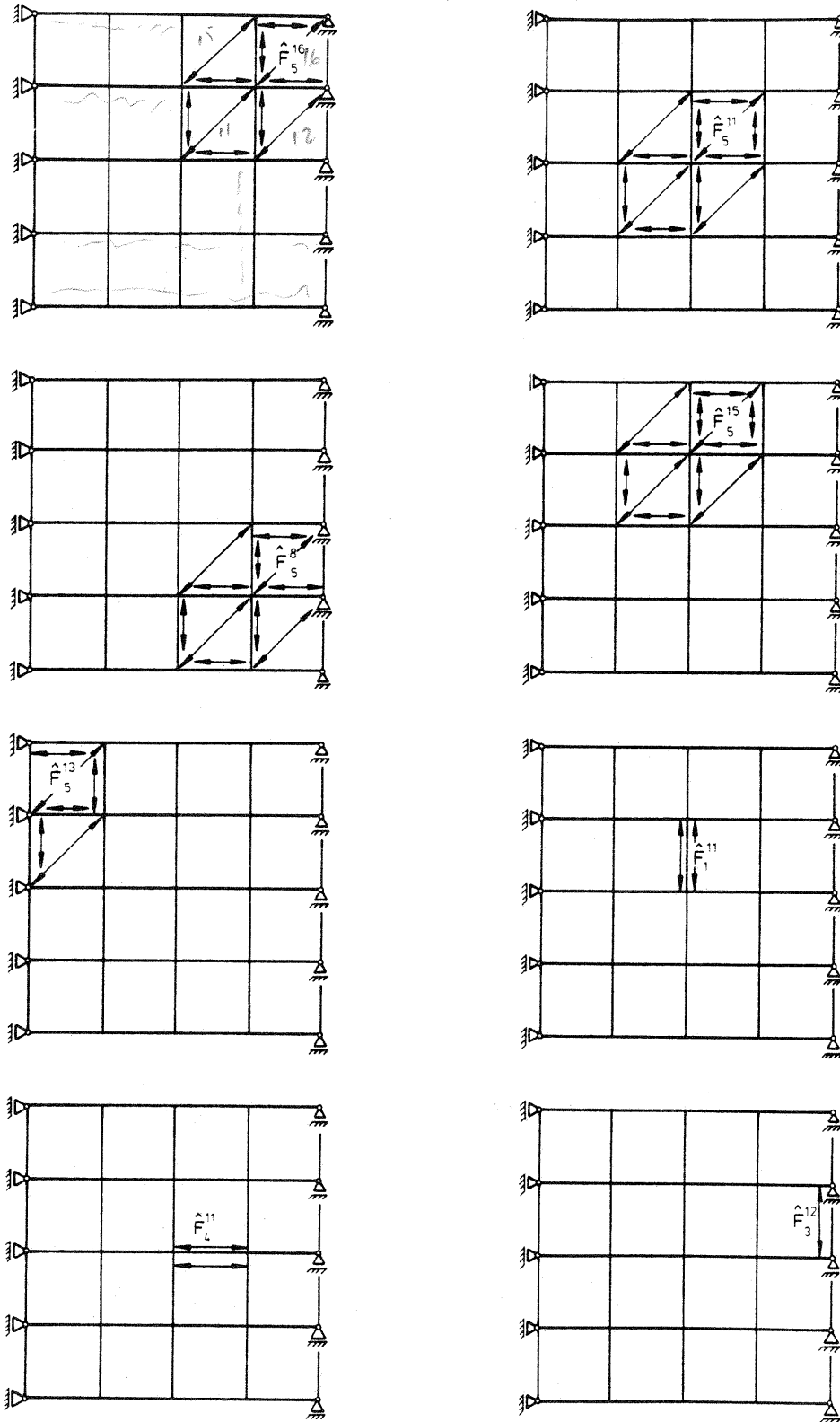
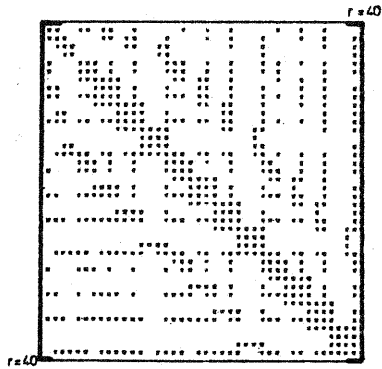


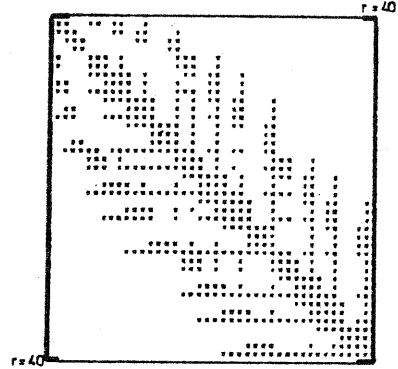
Bild 5.34: Einflußbereiche der ausgewählten kompakten Eigenspannungszustände (vgl. Bild 5.23)



Weiterhin werden die zugehörigen Koeffizientenmatrizen  $\underline{D}_x = \underline{B}_x^T \hat{f} \underline{B}_x$  und  $\bar{\underline{D}}_x = \bar{\underline{B}}_x^T \hat{f} \bar{\underline{B}}_x$  des Scheibentragwerks in Bild 5.35 gegenübergestellt.



$$\underline{D}_x = \underline{B}_x^T \hat{f} \underline{B}_x$$



$$\bar{\underline{D}}_x = \bar{\underline{B}}_x^T \hat{f} \bar{\underline{B}}_x$$

Bild 5.35: Die Koeffizientenmatrizen  $\underline{D}_x$  bzw.  $\bar{\underline{D}}_x$  des Scheibentragwerks

*Ein numerischer Vergleich:*

In [18] wurde die numerische Stabilität der Kompatibilitäts-gleichungen an Hand einiger Beispiele untersucht. Die in der Arbeit [18] gegebenen Konditionszahlen der Koeffizien-tenmatrix der Kompatibilitäts-gleichungen und die entspre- chenden Konditionszahlen, die sich bei der Berechnung der nicht kompakten und kompakten Eigenspannungszustände erge- ben, werden für die aus [18] entnommenen Beispiele von Bild 5.36 gegenübergestellt. Da RANTEC1 [18] (GAUSS-JORDAN Eliminationsverfahren/Zeilenpivotsuche mit Spaltentausch dem Verfahren der vorliegenden Arbeit entspricht, werden hier nur die zugehörigen Konditionszahlen gegenübergestellt. Die Konditionszahlen der anderen Varianten (RANTEC2,3) können [18, 23] entnommen werden.

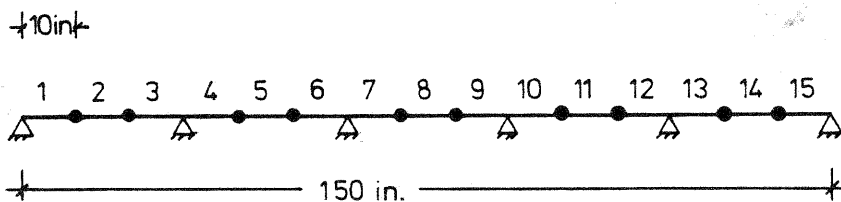
Im folgenden sind die Bezeichnungen aus [18] zugrunde gelegt. Außerdem bedeutet:

GAUSS1 : Berechnung mit nicht kompakten Eigenspannungszuständen und

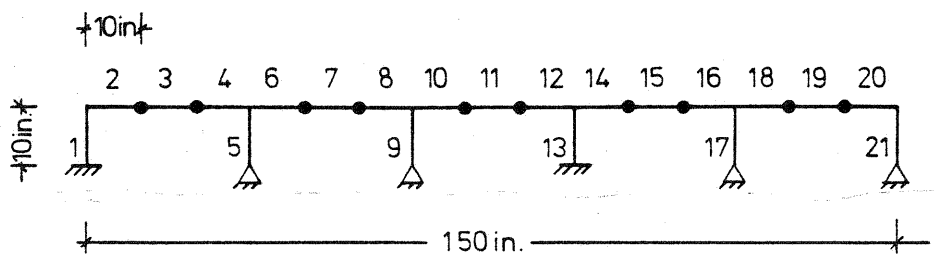
GAUSS2 : Berechnung mit kompakten Eigenspannungszuständen.

Tabelle I gibt die Querschnittswerte der Elemente wieder. Tabelle II liefert die Konditionszahlen  $\epsilon^*$  ( $\epsilon^*$  nimmt bei einer ideal konditionierten Matrix - Diagonalmatrix - den wert 1 an [18]).

Aus der Gegenüberstellung in Tabelle II ist ersichtlich, daß das Verfahren der kompakten Eigenspannungszustände (GAUSS2) bei der Berechnung ohne Gewichtung gegenüber RANTEC1 und GAUSS1 bessere Konditionszahlen liefert.



Beispiel 1



Beispiel 2,3,4

Bild 5.36: Beispiele aus [18]

Beispiel	Element	A [in. <sup>2</sup> ]	I [in. <sup>4</sup> ]
1	1 - 15	1.0	10.00
2	1	10.0	1.00
	5,17	10.0	0.25
	9,21	10.0	0.50
	13	10.0	5.00
	alle anderen	1.0	5.00
3	1	10.0	0.10
	5,17	10.0	0.25
	9,21	10.0	0.50
	13	10.0	0.10
	alle anderen	1.0	5.00
4	1	10.0	50.00
	5,17	10.0	0.25
	9,21	10.0	0.50
	13	10.0	5.00
	alle anderen	1.0	5.00

Tabelle I: Querschnittswerte

Beispiel/ Verfahren	ohne Gewichtung	mit Gewichtung		
		$[(k_{ii})^{\frac{1}{2}}]$	$[K_L]$	$[k_{ii}]$
1/ RANTEC1 GAUSS1 GAUSS2	$0.199 \times 10^{-2}$ $0.148 \times 10^{-1}$ 0.8164	$0.199 \times 10^{-3}$ - -	0.9443 - -	$0.199 \times 10^{-3}$ - -
2/ RANTEC1 GAUSS1 GAUSS2	$0.292 \times 10^{-9}$ $0.330 \times 10^{-10}$ $0.468 \times 10^{-3}$	$0.265 \times 10^{-12}$ - -	0.2523 - -	$0.265 \times 10^{-12}$ - -
3/ RANTEC1 GAUSS1 GAUSS2	$0.171 \times 10^{-8}$ $0.311 \times 10^{-13}$ $0.358 \times 10^{-6}$	$0.650 \times 10^{-15}$ - -	0.1381 - -	$0.650 \times 10^{-15}$ - -
4/ RANTEC1 GAUSS1 GAUSS2	$0.358 \times 10^{-9}$ $0.152 \times 10^{-8}$ $0.535 \times 10^{-3}$	$0.167 \times 10^{-11}$ - -	0.2357 - -	$0.153 \times 10^{-13}$ - -

Tabelle II: Konditionszahlen  $\varepsilon^*$

### 5.5 Mechanische Interpretation des verfahrens

Der nicht kompakte Eigenspannungszustand  $\underline{B}_{xj}$  korrespondiert zu der statisch Unbestimmten  $X_j = \hat{F}_i$ . Für die Berechnung von  $\underline{B}_{xj}$  nach (5.3.15) wurde  $X_j = 1$  und  $X_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ;  $k \neq j$ ) gesetzt.

Die statisch Unbestimmten sind durch die eingefügten Zeilen in  $\tilde{\underline{R}}$  (Bild 5.11) von allen anderen Unbekannten (Komponenten von  $\underline{B}_{xj}$ ) entkoppelt, so daß die zu  $X_k$  korrespondierende Komponente von  $\underline{B}_{xj}$  infolge  $X_j = 1$  nicht beeinflusst wird und den Wert null beibehält (d.h. an der Schnittstelle werden keine Kräfte übertragen). Der Eigenspannungszustand  $\underline{B}_{xj}$  kann sich daher über das ganze Tragwerk erstrecken.

Für die Berechnung des kompakten Eigenspannungszustandes  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  wurden die zunächst eingefügten  $j$  Zeilen von  $\tilde{\underline{R}}$  gestrichen, und die Bestimmungsgleichung von  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  wurde in Form von (5.4.1) gebildet. Durch das Streichen der eingefügten Zeilen wird die oben erwähnte Entkopplung der statisch Unbestimmten behoben, das heißt, die ersten  $j$  Schnittstellen des Tragwerks sind wieder geschlossen worden, so daß eine Kraftübertragung auch an diesen Stellen möglich wird.

durch die anschließende Transformation (5.4.7) und die Anwendung des GAUSS'schen Eliminationsverfahrens auf  $\underline{R}_j$  wurde eine invertierbare  $s_1 \times s_1$ -Untermatrix aus  $\underline{R}_j$  festgelegt (für die Definition von  $s_1$  s.S. 97).

Die Spalten dieser Untermatrix sind den linear unabhängigen Elementkräften  $\hat{F}_i, \hat{F}_{i-1}, \dots, \hat{F}_{i-s_1+1}$  zugeordnet. Da diese Matrix invertierbar ist, ist sie Gleichgewichtsmatrix eines statisch bestimmten Untersystems des Tragwerks. Die Elemente des besetzten Teils (Länge  $\bar{z}_{xj} = s_1$ ) von  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  können an diesem Untersystem berechnet werden.

Weil an den im Untersystem befindlichen Schnittstellen nun eine Kraftübertragung möglich ist, können auch die zu den ursprünglichen statisch Unbestimmten korrespondierenden Komponenten von  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  einen Wert annehmen. Befindet sich der Teil von  $t$  bis  $j$  ( $t \leq j$ ), d.h. befinden sich insgesamt  $s_j = j - t + 1$ , der statisch Unbestimmten im Untersystem, so erhalten die mit den statisch Unbestimmten korrespondierenden Komponenten von  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  die Werte  $q_{tj}$ ,  $q_{(t+1)j}$ ,  $\dots$ ,  $q_{jj}$ , wobei  $q_{jj} = 1$  ist.

Damit könnte  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  wie folgt berechnet werden: An den Schnittstellen des statisch bestimmten Hauptsystems werden die Kräfte  $X_t = q_{tj}$ ,  $X_{(t+1)} = q_{(t+1)j}$ ,  $\dots$ ,  $X_j = 1$  angebracht und Elementkräfte dieses Systems berechnet. Die Kraftverteilung ist mit  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  identisch.

ist der nicht kompakte Eigenspannungszustand  $\underline{B}_{xt}$  infolge  $X_t = 1$  und  $X_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ;  $k \neq t$ ) berechnet, so ist er  $q_{tj}$ -fach in  $\underline{\bar{B}}_{xj}$  enthalten. Damit ist

$$\underline{\bar{B}}_{xj} = \underline{B}_{xt}q_{tj} + \underline{B}_{x(t+1)}q_{(t+1)j} + \dots + \underline{B}_{xj} \quad (5.5.1)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\underline{\bar{B}}_{xj} = \underbrace{\left[ \underline{B}_{x1} \quad \underline{B}_{x2} \quad \dots \quad \underline{B}_{xt} \quad \underline{B}_{x(t+1)} \quad \dots \quad \underline{B}_{xj} \quad \dots \quad \underline{B}_{xr} \right]}_{\underline{B}_x} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ q_{tj} \\ \dots \\ q_{(t+1)j} \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{q}_j}$$

und

$$\underline{\bar{B}}_{xj} = \underline{B}_x \underline{q}_j \quad (5.5.2)$$

Wird (5.5.1) für jeden kompakten Eigenspannungszustand aufgestellt so erhält man  $\bar{\underline{B}}_x$  in Abhängigkeit von  $\underline{B}_x$  :

$$\bar{\underline{B}}_x = \underline{B}_x Q. \quad (5.5.3)$$

Die Transformationsmatrix  $Q$  enthält die Vektoren  $\underline{q}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ). Die Struktur von  $\underline{q}_j$  zeigt, daß  $Q$  eine obere Dreiecksmatrix in Bandform ist (Bild 5.37). Für die Determinante von  $Q$  gilt:

$$\det Q = \prod_{k=1}^r q_{kk} = 1. \quad (5.5.4)$$

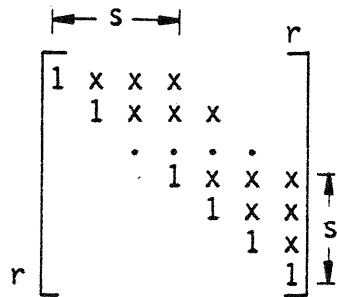


Bild 5.37: Struktur der Transformationsmatrix  $Q$

Die Bandbreite  $s = \max ( s_j )$  ist gleich der Anzahl der statisch Unbestimmten, die maximal in einem der  $r$  statisch bestimmten Untersysteme teilnehmen.

Der kompakte Eigenspannungszustand  $\bar{\underline{B}}_{xj}$  folgt nach (5.5.1) aus einer Überlagerung der nicht kompakten Eigenspannungszustände. Die Koeffizienten  $q_{ij}$  sind die Überlagerungsfaktoren. Die Berechnung kompakter Eigenspannungszustände entspricht dem Verfahren der Gruppenlasten in klassischen Stabstatik. Die Koeffizienten der Matrix  $Q$  sind Gruppenlasten, die automatisch so bestimmt werden, daß eine implizite Überlagerung von nicht kompakten kompakte Eigenspannungszustände liefert.

Die mechanische Bedeutung der einzelnen Transformationen zur Berechnung des  $j$ -ten kompakten Eigenspannungszustandes ist in Bild 5.38 schematisch dargestellt.

Transformation	mechanische Bedeutung
<p>Anwendung des GAUSS'schen Eliminationsverfahrens auf <math>\underline{N}</math>:</p> $\underline{N} \longrightarrow \tilde{\underline{N}} = \underline{Z}\tilde{\underline{L}}\tilde{\underline{R}}$	<p>Festlegung der Schnittstellen (statisch Unbestimmten): Keine Kraftübertragung an den Schnittstellen möglich; Wahl eines statisch bestimmten Hauptsystems</p>
<p>Streichen der ersten <math>j</math> eingefügten Zeilen der Matrix <math>\tilde{\underline{R}}</math>:</p> $\tilde{\underline{R}} \longrightarrow \tilde{\underline{R}}_j \longrightarrow \underline{R}_j$	<p>Schließen der ersten <math>j</math> Schnittstellen: Kraft Übertragung an diesen <math>j</math> Stellen wieder möglich</p>
<p>Anwendung des GAUSS'schen Eliminationsverfahrens auf <math>\underline{R}_j</math> und Bestimmung einer invertierbaren <math>s_1 \times s_1</math>-Untermatrix:</p> $\underline{R}_j \longrightarrow \underline{R}_j^* \longrightarrow \tilde{\underline{R}}^* = \underline{Z}\tilde{\underline{L}}_j^* \tilde{\underline{R}}_j^*$	<p>Bestimmung eines statisch bestimmten Untersystems des Tragwerks und Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am Untersystem</p>
<p>Auflösung des Gleichungssystems (5.4.13); Wahl der ersten Lösung (Länge <math>\bar{z}_{xj} = s_1</math>) als kürzeste Lösung:</p> $\underline{\bar{B}}_{-xj}^* \longrightarrow \underline{\bar{B}}_{-xj}^1 \longrightarrow \underline{\bar{B}}_{-xj}$	<p>Bestimmung der Gruppenlasten, deutbar als Überlagerung von nicht kompakten Eigenspannungszuständen zur Bestimmung des kompakten Eigenspannungszustandes <math>\underline{\bar{B}}_{-xj}</math></p>

Bild 5.38: Mechanische Interpretation der Transformationen zur Berechnung von  $\underline{\bar{B}}_{-xj}$



## 5.6 Zusammenfassung und Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur automatischen Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems und zur Berechnung der zugehörigen kompakten Eigenspannungszustände beliebiger Tragwerke vorgestellt.

Kompakte Eigenspannungszustände sind solche Eigenspannungszustände, die nur lokalen Einfluß im Tragwerk besitzen.

Für jede statisch Unbestimmte wird der kompakte Eigenspannungszustand an einem statisch bestimmten Untersystem des Tragwerks berechnet. Die das statisch bestimmte Untersystem bildende Elemente des Tragwerks bestimmen den Einflußbereich des betreffenden kompakten Eigenspannungszustandes.

Die Berechnung kompakter Eigenspannungszustände entspricht dem Verfahren der Gruppenlasten der klassischen Stabstatik. Die Gruppenlasten werden automatisch so bestimmt, daß eine implizite Überlagerung nicht kompakter Eigenspannungszustände kompakte Eigenspannungszustände mit minimalem Einflußbereich liefert.

Die Koeffizientenmatrix der Kompatibilitätsgleichungen hat für kompakte Eigenspannungszustände Bandform. Durch Ausnutzung der Bandform kann Speicherplatz und Rechenzeit gespart werden. Die bandförmige Koeffizientenmatrix hat eine bessere Kondition als die Koeffizientenmatrix, die von den nicht kompakten Eigenspannungszuständen gebildet wird.

Die Koeffizientenmatrix bester Kondition wäre eine Diagonalmatrix. Eine Diagonalmatrix kann durch das GRAM-SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren stets erreicht werden. Dafür müssen jedoch Eigenspannungszustände berechnet und durch Linearkombinationen neue Eigenspannungszustände so bestimmt werden, daß die neuen Eigenspannungszustände in Bezug auf die Flexibilitätsmatrix des Tragwerks zueinander orthogonal sind.

Da sich sowohl die ursprünglichen als auch die daraus errechneten Eigenspannungszustände über das ganze Tragwerk erstrecken, braucht man in diesem Fall mehr Speicherplatz als bei den kompakten Eigenspannungszuständen. Es wird nicht nur für die beiden Eigenspannungszustände sondern auch für die Flexibilitätsmatrix zusätzlicher Speicherplatz benötigt.

Zur Berechnung der kompakten Eigenspannungszustände wurde hier nur von einem statisch bestimmten Hauptsystem ausgegangen. Eine andere Möglichkeit kompakte Eigenspannungszustände zu erzeugen wäre, durch die Wahl eines geeigneten statisch bestimmten Hauptsystems den Einflußbereich möglichst klein zu halten.