4. BEREICHSWEISE ANSÄTZE UND FINITE ELEMENTE

Für die Lösung eines Randwertproblems nach dem Verfahren von RITZ werden globale und entweder kinematisch verträgliche oder statisch zulässige Ansatzfunktionen verwendet, die über den ganzen Bereich des Tragwerks beschrieben sind.

Bei der finiten Elementmethode werden Ansatzfunktionen für Teilgebiete der Struktur gewählt. Die Teilgebiete werden als finite Elemente bezeichnet. Die durch Knoten verknüpften Elemente bilden das Gesamttragwerk (Bild 4.1).

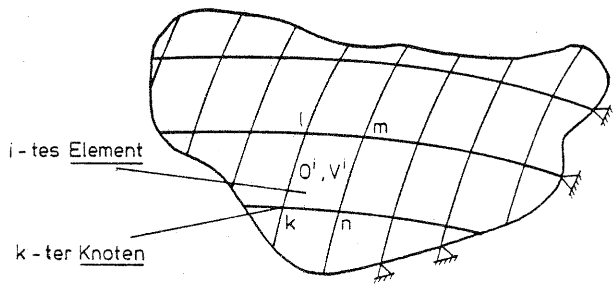

Bild 4.1: Tragwerkidealisierung

Nach dieser geometrischen Idealisierung ordnet man dann zwischen den Knoten lokal begrenzte und einfache Ansätze je Element an. Die Wahl der Ansatzfunktionen bestimmt das Lösungsverfahren. Mit verträglichen Ansätzen für die Verschiebungen werden die kinematischen, mit den statisch zulässigen Ansätzen für die Spannungen die statischen Verträglichkeitsbedingungen exakt erfüllt.

Ausgehend von diesen beiden Verträglichkeitsbedingungen entwickeln sich zwei Grundverfahren in der Methode der finiten Elemente: Verschiebungs- (Weggrößenverfahren, Steifigkeitsmethode) und Kraftmethode (Flexibilitätsmethode).

Die Verschiebungsmethode benutzt finite Elemente, in denen die Verschiebungen so angesetzt sind, daß die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen exakt und die statischen nur angenähert erfüllt werden. Bei der Kraftmethode werden durch Ansätze für die Spannungsverteilung im Element die statischen Verträglichkeitsbedingungen (Gleichgewichtsbedingungen) eingehalten, wobei die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen nur angenähert erfüllt werden.

Durch Aufteilung des Tragwerks in finite Elemente und Anwendung elementweiser Ansätze für die Verschiebungen bzw. Spannungen zerfällt also die Berechnung des Tragwerks im wesentlichen in zwei Teile: Zunächst wird das Gesamtpotential elementweise gebildet und Steifigkeits- bzw. Flexibilitätsmatrizen der Elemente bestimmt. Danach werden die einzelnen Elemente zum Gesamttragwerk zusammengebaut. Das geschieht durch Erfüllung der Verträglichkeits- bzw. Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten.

4.1 Verschiebungsmethode

Das tatsächliche Tragwerk sei in s Elemente unterteilt (Bild 4.1). Die Gesamtoberfläche und Volumeninhalt des Tragwerks läßt sich mit

$$O = \sum_{i=1}^{s} O^i \tag{4.1.1}$$

$$V = \sum_{i=1}^{s} V^i \tag{4.1.2}$$

angeben. Der Index i bezieht sich hier auf das i-te Element. O^i ist Teiloberfläche der Gesamtoberfläche O. Sie beinhaltet die durch die Unterteilung entstandenen Oberflächenanteile nicht.

Das Gesamtpotential (3.5.5) besteht aus Integralen über O und V. Daher gilt auch die folgende Beziehung:

$$\pi = \sum_{i=1}^{s} \pi^i, \tag{4.1.3}$$

wobei π^i das Gesamtpotential des i-ten Elementes angibt. Es ist damit ersichtlich, daß der Schwerpunkt der Methode zunächst auf der Ableitung des Gesamtpotentials für jedes Element liegt.

Verschiebungsansatz:

Es wird nun nach (3.9.1) ein Ansatz für die Verschiebungen je Element gemacht. Die Verschiebungen $\underline{u}^i(\hat{x}_i)$ in lokalen Koordinaten $\hat{x}_i$ lassen sich in jedem Punkt in Abhängigkeit von einzelnen Verschiebungsfunktionen $\underline{\Phi}^i(\hat{x}_i)$ mit den zunächst noch unbekannten Freiwerten $\underline{a}^i$ angeben.

$$\underline{u}^i(\hat{x}_i) = \underline{\Phi}^i(\hat{x}_i)\underline{a}^i. \tag{4.1.4}$$

Die Ansatzfunktionen $\underline{\Phi}^i$ müssen so gewählt sein, daß der Verschiebungszustand sowohl im Element als auch von einem Element zum anderen kinematisch verträglich ist. Die Freiwerte $\underline{a}^i$ lassen nicht unbedingt eine direkte physikalische Interpretation zu. Es ist jedoch zweckmäßig (4.1.4), sie in Verschiebungen der Elementknoten (verallgemeinerte Verschiebungen) $\hat{\underline{u}}^i$ anzugeben (Bild 4.2). Durch Einsetzen der lokalen Knotenkoordinaten, d.h. Einführen der Randbedingungen des Elementes in (4.1.4) erhält man $\hat{\underline{u}}^i$ in Abhängigkeit der Freiwerte $\underline{a}^i$. Die resultierende Transformationsmatrix wird mit $\tilde{\underline{\Phi}}^i$ bezeichnet.

$$\hat{\underline{u}}^i = \tilde{\underline{\Phi}}^i\underline{a}^i.$$

Die Anzahl der Freiwerte in (4.1.4) soll gleich der Anzahl der Knotenpunktverschiebungen (Freiheitsgrade des Elementes) sein. Daher ist diese Transformation eindeutig, d.h. die Matrix $\tilde{\underline{\Phi}}^i$ ist invertierbar. Mit Freiwerten

$$\underline{a}^i = (\tilde{\underline{\Phi}}^i)^{-1}\hat{\underline{u}}^i$$

liefert (4.1.4)

$$\underline{u}^i(\hat{x}_i) = \underline{\Phi}^i(\hat{x}_i)(\underline{\tilde{\Phi}}^i)^{-1}\underline{\hat{u}}^i$$

$$\underline{u}^i(\hat{x}_i) = \underline{\hat{\Phi}}^i\underline{\hat{u}}^i. \qquad (4.1.5)$$

In der Matrix $\underline{\hat{\Phi}}^i = \underline{\Phi}^i(\hat{x}_i)(\underline{\tilde{\Phi}}^i)^{-1}$ sind die Einheitsverschiebungszustände des i-ten Elementes zusammengefaßt.

Kinematische Verträglichkeit:

Die kinematische Verträglichkeit (2.2.1) lautet mit (4.1.5)

$$\underline{\varepsilon}^i = \underline{D}\ \underline{u}^i(\hat{x}_i) = \underline{D}\ \underline{\hat{\Phi}}^i\ \underline{\hat{u}}^i$$

$$\underline{\varepsilon}^i = \underline{\hat{D}}^i\ \underline{\hat{u}}^i \qquad (4.1.6)$$

mit

$$\underline{\hat{D}}^i = \underline{D}\ \underline{\hat{\Phi}}^i.$$

Gesamtpotential des Elementes:

Bevor man das Gesamtpotential π^i bildet, werden die verallgemeinerten Elementkräfte $\underline{\hat{S}}^i$ eingeführt, die mit $\underline{\hat{u}}^i$ korrespondieren (Bild 4.2). Unter der Annahme, daß keine eingeprägten Elementkräfte $\underline{\hat{g}}^i$ und $\underline{\hat{p}}^i$ vorhanden sind, ergibt sich das Gesamtpotential π^i zu

$$\pi^i = \pi^i_i + (\pi^i_a)_s$$

$$\pi^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} (\underline{\varepsilon}^i)^T\underline{E}^i\underline{\varepsilon}^i dV - (\underline{\hat{u}}^i)^T\underline{\hat{S}}^i. \qquad (4.1.7)$$

Hierbei ist das letzte Glied das äußere Potential der verallgemeinerten Kräfte. Die Materialsteifigkeitsmatrix $\underline{E}^i$ ist durch (2.3.3) definiert.

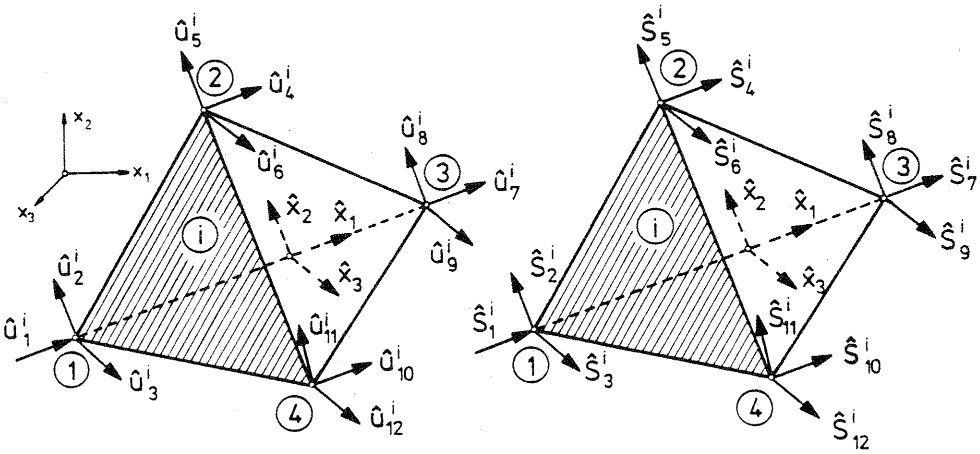

Bild 4.2: i-tes finites Element mit den korrespondierenden Knotengrößen

Setzt man (4.1.6) in (4.1.7) ein und beachtet man, daß $\hat{\underline{u}}^i$ unabhängig von den lokalen Koordinaten $\hat{x}_i$ ist, so folgt

$$\pi^i = \frac{1}{2}(\hat{\underline{u}}^i)^T \int_{V^i} \hat{\underline{D}}^i \underline{E}^i \hat{\underline{D}}^i dV \; \hat{\underline{u}}^i - (\hat{\underline{u}}^i)^T \hat{\underline{S}}^i$$

oder mit

$$\hat{\underline{k}}^i = \int_{V^i} (\hat{\underline{D}}^i)^T \underline{E}^i \hat{\underline{D}}^i dV \tag{4.1.8}$$

$$\pi^i = \frac{1}{2}(\hat{\underline{u}}^i)^T \hat{\underline{k}}^i \hat{\underline{u}}^i - (\hat{\underline{u}}^i)^T \hat{\underline{S}}^i . \tag{4.1.9}$$

Das Minimum des Gesamtpotentials des Elements:

Ein Element ist im Gleichgewicht, wenn es die Minimalbedingung (3.9.2) erfüllt. Die Differentiation

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial \hat{\underline{u}}^i} = 0$$

liefert die lokalen Gleichgewichtsbedingungen des Elements:

$$\hat{\underline{k}}^i \hat{\underline{u}}^i = \hat{\underline{S}}^i . \tag{4.1.10}$$

Die Matrix $\hat{\underline{k}}^i$ wird die Steifigkeitsmatrix des Elementes in lokalen Koordinaten genannt. Daß $\hat{\underline{k}}^i$ symmetrisch ist, ist aus (4.1.8) ersichtlich.

(4.1.1o) beinhaltet noch die Starrkörperverschiebungen in $\hat{\underline{u}}^i$. Daher gilt

$$(\hat{\underline{u}}^i)^T \hat{\underline{k}}^i \hat{\underline{u}}^i \geq \underline{o}.$$

$\hat{\underline{k}}^i$ ist also positiv semi-definit. Das Element $\hat{k}^i_{ij}$ der Elementsteifigkeitsmatrix stellt die der Knotenpunktverschiebung $\hat{u}^i_i$ entsprechende Knotenkraft $\hat{S}^i_i$ dar. Sie entsteht, wenn das Element durch eine Einheitsverschiebung $\hat{u}^i_j = 1$ verformt wird, während alle anderen Komponenten von $\hat{\underline{u}}^i$ gleichzeitig Null sind.

Vor dem Aufstellen des Gesamtpotentials (4.1.3) des Tragwerks sind noch einige Transformationen erforderlich. Die globalen Knotenverschiebungen $\underline{u}^i$ werden durch die Transformationsmatrix $\underline{T}^i$

$$\hat{\underline{u}}^i = \underline{T}^i \underline{u}^i \tag{4.1.11}$$

in lokale Verschiebungen $\hat{\underline{u}}^i$ transformiert. Nun seien die Matrizen $\hat{\underline{u}}^i$ und $\hat{\underline{S}}^i$ für alle Elemente in Spaltenmatrizen $\hat{\underline{u}}$ und $\hat{\underline{S}}$ zusammengefaßt.

$$\hat{\underline{u}} = \underline{T}\ \underline{u} \tag{4.1.12}$$

$$\hat{\underline{S}} = \hat{\underline{k}}\ \hat{\underline{u}} \tag{4.1.13}$$

mit

$$\hat{\underline{u}} = \{\hat{\underline{u}}^1\ \hat{\underline{u}}^2\ \ldots\ \hat{\underline{u}}^i\ \ldots\ \hat{\underline{u}}^s\}$$

$$\hat{\underline{S}} = \{\hat{\underline{S}}^1\ \hat{\underline{S}}^2\ \ldots\ \hat{\underline{S}}^i\ \ldots\ \hat{\underline{S}}^s\}$$

$$\underline{T} = \lceil \underline{T}^1\ \underline{T}^2\ \dots\ \underline{T}^i\ \dots\ \underline{T}^s \rfloor$$

$$\underline{u} = \{ \underline{u}^1\ \underline{u}^2\ \dots\ \underline{u}^i\ \dots\ \underline{u}^s \}$$

$$\hat{\underline{k}} = \lceil \hat{\underline{k}}^1\ \hat{\underline{k}}^2\ \dots\ \hat{\underline{k}}^i\ \dots\ \hat{\underline{k}}^s \rfloor .$$

(4.1.9) mit (4.1.11) liefert

$$\pi^i = \frac{1}{2}(\underline{u}^i)^T(\underline{T}^i)^T\hat{\underline{k}}^i\underline{T}^i\underline{u}^i - (\underline{u}^i)^T(\underline{T}^i)^T\hat{\underline{S}}^i .$$

Mit

$$\underline{k}^i = (\underline{T}^i)^T\hat{\underline{k}}^i\underline{T}^i \tag{4.1.14}$$

$$\underline{S}^i = (\underline{T}^i)^T\hat{\underline{S}}^i . \tag{4.1.15}$$

folgt

$$\pi^i = \frac{1}{2}(\underline{u}^i)^T\underline{k}^i\underline{u}^i - (\underline{u}^i)^T\underline{S}^i . \tag{4.1.16}$$

Durch Minimierung von π^i erhält man

$$\underline{k}^i\underline{u}^i = \underline{S}^i . \tag{4.1.17}$$

(4.1.17) gibt das globale Gleichgewicht des Elementes an, wobei $\hat{\underline{k}}^i$ bzw. $\hat{\underline{S}}^i$ durch (4.1.14) bzw. (4.1.15) in globale Koordinaten transformiert wurde. Mit der Hyperdiagonalmatrix $\underline{k}$ und $\underline{T}$ wird (4.1.15) und (4.1.17) für alle Elemente in

$$\underline{S} = \underline{T}\ \hat{\underline{S}} \tag{4.1.18}$$

$$\underline{k}\ \underline{u} = \underline{S} \tag{4.1.19}$$

zusammengefaßt. Hierbei ist

$$\underline{k} = \lceil \underline{k}^1\ \underline{k}^2\ \dots\ \underline{k}^i\ \dots\ \underline{k}^s \rfloor \tag{4.1.2o}$$

$$\underline{S} = \{ \underline{S}^1\ \underline{S}^2\ \dots\ \underline{S}^i\ \dots\ \underline{S}^s \} .$$

Alle Knotenverschiebungen (Knotenfreiheitsgrade) und alle Knotenkräfte (äußere Knotenkräfte) an den t Knoten des Gesamttragwerks werden in $\underline{U}$ und $\underline{P}$ zusammengefaßt:

$$\underline{U} = \{\underline{U}_1\ \underline{U}_2 \ldots \underline{U}_k \ldots \underline{U}_t\}$$

$$\underline{P} = \{\underline{P}_1\ \underline{P}_2 \ldots \underline{P}_k \ldots \underline{P}_t\},$$

wobei $\underline{U}_k$ und $\underline{P}_k$ korrespondierende globale Größen am k-ten Knoten des Tragwerks sind.

Kinematische Verträglichkeit an den Knoten des Gesamttragwerks:

Die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen zwischen benachbarten Elementen (an den Knoten) müssen vollständig und eindeutig durch das Gleichsetzen der zugeordneten Elementverschiebungen $\underline{u}$ und Knotenverschiebungen $\underline{U}$ des Tragwerks erfüllt werden. Das geschieht mit Hilfe der Inzidenzmatrix (Zuordnungsmatrix) $\underline{a}$ durch

$$\underline{u} = \underline{a}\ \underline{U}. \qquad (4.1.21)$$

Die Matrix $\underline{a}$ ist eine nicht-quadratische Matrix, deren Elemente entweder eins oder null sind. $\underline{a}$ gibt an, welche globalen Knotenverschiebungen der Elemente mit Knotenverschiebungen des Tragwerks übereinstimmen.

Das Gleichgewicht an den Knoten des Gesamttragwerks:

Die virtuelle Arbeit der Knotenkräfte $\underline{P}$ mit den korrespondierenden virtuellen Verschiebungen $\delta\underline{U}$ muß gleich der virtuellen Arbeit sein, die von den Elementkräften $\underline{S}$ an den korrespondierenden virtuellen Verschiebungen $\delta\underline{u}$ geleistet wird:

$$\delta\underline{U}^T\underline{P} = \delta\underline{u}^T\underline{S}.$$

$\delta \underline{u}^T$ aus (4.1.21) eingesetzt, liefert das Gleichgewicht an den Knoten des Tragwerks:

$$\underline{P} = \underline{a}^T \underline{S}. \qquad (4.1.22)$$

Zusammenbau der Elemente zum Gesamttragwerk, das Minimum des Gesamtpotentials des Gesamttragwerks:

(4.1.3) mit (4.1.16) liefert

$$\pi = \sum_{i=1}^{s} \pi^i = \sum_{i=1}^{s} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{u}^i)^T \underline{k}^i \underline{u}^i - (\underline{u}^i)^T \underline{S}^i \right\}.$$

Das Summationszeichen kann durch

$$\pi = \frac{1}{2} \left\{ \underline{u}^1 \; \underline{u}^2 \; \ldots \; \underline{u}^s \right\}^T \left\lceil \underline{k}^1 \; \underline{k}^2 \; \ldots \; \underline{k}^s \right\rfloor \left\{ \underline{u}^1 \; \underline{u}^2 \; \ldots \; \underline{u}^s \right\}$$
$$- \left\{ \underline{u}^1 \; \underline{u}^2 \; \ldots \; \underline{u}^s \right\}^T \left\{ \underline{S}^1 \; \underline{S}^2 \; \ldots \; \underline{S}^s \right\}$$

oder durch

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{k} \, \underline{u} - \underline{u}^T \underline{S}$$

ersetzt werden. (4.1.21) eingesetzt, ergibt sich

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{a}^T \underline{k} \, \underline{a} \, \underline{U} - \underline{U}^T \underline{a}^T \underline{S}.$$

Mit (4.1.22) und

$$\underline{K}_0 = \underline{a}^T \underline{k} \, \underline{a}$$

erhält man für π

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K}_0 \underline{U} - \underline{U}^T \underline{P}. \qquad (4.1.23)$$

$\underline{K}_0$ wird als Gesamtsteifigkeitsmatrix des Tragwerks bezeichnet. Sie ist symmetrisch aber positiv semi-definit, denn $\underline{U}$ enthält die Starrkörperverschiebungen. In Kapitel 3.5 wurde gezeigt, daß das Gesamttragwerk im Gleichgewicht ist, wenn (4.1.23) ein Minimum ist:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{U}} = o.$$

Daraus folgt die Gleichgewichtsbedingung des Tragwerks:

$$\underline{K}_o \underline{U} = \underline{P}. \qquad (4.1.24)$$

Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen:

Die eingeprägten Verschiebungen $\underline{u}(x_i)$ auf O_u werden im idealisierten Tragwerk nur angenähert erfüllt, da die Oberfläche O_u durch Knotenpunkte ersetzt ist, die sich im Bereich von O_u befinden. Hier wird der Fall $\underline{u}(x_i) = \underline{o}$ auf O_u berücksichtigt. Dafür werden die Verschiebungen an den in den Bereich von O_u fallenden Knoten des Gesamttragwerks im Verschiebungsvektor $\underline{U}$ zu Null gesetzt. D.h. entsprechende Spalten von $\underline{a}$ bei (4.1.21) werden gestrichen. $\underline{U}$ und $\underline{a}$ werden dadurch auf $\underline{U}_r$ und $\underline{a}_r$ reduziert:

$$\underline{u} = \left[\underline{a}_r \mid \underline{a}_A\right] \begin{bmatrix} \underline{U}_r \\ \hline \underline{U}_A \end{bmatrix} \quad \text{mit } \underline{a} = \left[\underline{a}_r \mid \underline{a}_A\right] \quad \text{und} \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_r \\ \hline \underline{U}_A \end{bmatrix}. \qquad (4.1.25)$$

Die Untermatrix $\underline{U}_A$ enthält die unterdrückten Verschiebungen (Auflagerverschiebungen). $\underline{a}_A$ ist die entsprechende Transformationsmatrix in $\underline{a}$. Wegen $\underline{U}_A = \underline{o}$ folgt

$$\underline{u} = \underline{a}_r \underline{U}_r. \qquad (4.1.26)$$

Rechnet man anstelle von (4.1.21) mit (4.1.26), so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamttragwerks wie folgt:

$$\underline{K}_r \underline{U}_r = \underline{P}_r \qquad (4.1.27)$$

mit

$$\underline{K}_r = \underline{a}_r^T \, \underline{k} \, \underline{a}_r \quad , \qquad (4.1.28)$$

wobei der Index r "reduziert" bedeutet. $\underline{P}_r$ ergibt sich mit $\underline{a}_r$ aus (4.1.22). $\underline{K}_r$ ist symmetrisch und nun positiv definit, also invertierbar. Die Knotenverschiebungen $\underline{U}_r$ des Gesamttragwerks können aus (4.1.27) berechnet werden.

Berücksichtigung von Flächen- und Volumenkräften:

Bei vorhandenen Elementkräften $\underline{\hat{p}}^i$ auf O_p^i bzw. $\underline{\hat{g}}^i$ in V^i und noch zusätzlich Einzellasten $\underline{P}$ an den Knoten des Tragwerks ändert sich das Gesamtpotential des Elementes. In diesem Fall ist π^i durch

$$\pi^i = \pi_i^i + (\pi_a^i)_s + (\pi_a^i)_p \qquad (4.1.29)$$

zu ersetzen, wobei gilt

$(\pi_a^i)_s$: äußeres Potential des i-ten Elementes infolge Elementkräfte $\underline{\hat{S}}^i$, die durch die Knotenlasten $\underline{P}$ des Tragwerks entstanden sind,

$(\pi_a^i)_p$: äußeres Potential des i-ten Elementes infolge der Elementkräfte $\underline{\hat{p}}^i$ und oder $\underline{\hat{g}}^i$.

Wird in (3.5.2)

$$(\pi_a^i)_p = - \int_{O_p^i} (\underline{\hat{p}}^i)^T \underline{u}^i(\hat{x}_i)\,dO - \int_{V^i} (\underline{\hat{g}}^i)^T \underline{u}^i(\hat{x}_i)\,dV$$

(4.1.5) eingesetzt, folgt

$$(\pi_a^i)_p = - \left\{ \int_{O_p^i} (\underline{\hat{p}}^i)^T \underline{\hat{\Phi}}^i\,dO + \int_{V^i} (\underline{\hat{g}}^i)^T \underline{\hat{\Phi}}^i\,dV \right\} \underline{\hat{u}}^i .$$

$(\pi_a^i)_p$ ist ein Skalar. Daher ist die Transponierte der rechten Seite wieder gleich $(\pi_a^i)_p$:

$$(\pi_a^i)_p = -(\underline{\hat{u}}^i)^T\{\int_{O_p^i}(\underline{\hat{\Phi}}^i)^T\underline{\hat{p}}^i dO + \int_{V^i}(\underline{\hat{\Phi}}^i)^T\underline{\hat{g}}^i dV\}$$

oder

$$(\pi_a^i)_p = -(\underline{\hat{u}}^i)^T\,\underline{\hat{S}}_p^i \qquad (4.1.3o)$$

mit

$$\underline{\hat{S}}_p^i = \int_{O_p^i}(\underline{\hat{\Phi}}^i)^T\underline{\hat{p}}^i dO + \int_{V^i}(\underline{\hat{\Phi}}^i)^T\underline{\hat{g}}^i dV. \qquad (4.1.31)$$

Aus (4.1.3o) ist zu erkennen, daß $\underline{\hat{S}}_p^i$ mit $\underline{\hat{u}}^i$ korrespondiert, d.h. die Elementkräfte $\underline{\hat{p}}^i$ und $\underline{\hat{g}}^i$ sind durch die äquivalenten Knotenkräfte $\underline{\hat{S}}_p^i$ in Form von (4.1.31) ersetzt.

Die Summe der ersten beiden Glieder von (4.1.29) ist mit (4.1.9) gegeben. Es folgt

$$\pi^i = \frac{1}{2}(\underline{\hat{u}}^i)^T\underline{\hat{k}}^i\underline{\hat{u}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T\underline{\hat{S}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T\underline{\hat{S}}_p^i. \qquad (4.1.32)$$

Die Minimalbedingung von π^i liefert

$$\underline{\hat{k}}^i\underline{\hat{u}}^i = \underline{\hat{S}}^i + \underline{\hat{S}}_p^i. \qquad (4.1.33)$$

Entsprechend können noch die folgenden Beziehungen abgeleitet werden:

$$\underline{K}\;\underline{u} = \underline{S} + \underline{S}_p \qquad (4.1.34)$$

$$\underline{k}^i\underline{u}^i = \underline{S}^i + (\underline{T}^i)^T\underline{\hat{S}}_p^i$$

$$\underline{k}\;\underline{u} = \underline{S} + \underline{T}^T\underline{\hat{S}}_p$$

$$\underline{P}' = \underline{a}^T\underline{S} + \underline{a}^T\underline{T}^T\underline{\hat{S}}_p = \underline{P} + \underline{a}^T\underline{T}^T\underline{\hat{S}}_p.$$

Nach dem Zusammenbau zum Gesamttragwerk, erhält man

$$\underline{K}_o\underline{U} = \underline{a}^T(\underline{S} + \underline{T}^T\underline{\hat{S}}_p) = \underline{P} + \underline{a}^T\underline{T}^T\underline{\hat{S}}_p = \underline{P}'$$

Mit der Einführung der geometrischen Randbedingungen, ergibt sich

$$\underline{K}_r \underline{U}_r = \underline{P}_r + \underline{\underline{a}}_r^T \underline{T}^T \hat{\underline{S}}_p = \underline{P}_r'. \qquad (4.1.35)$$

(4.1.35) besagt: Die äquivalenten Elementkräfte $\hat{\underline{S}}_p$ infolge $\hat{\underline{p}}^i$ und $\hat{\underline{g}}^i$ werden als zusätzliche Knotenkräfte des Gesamttragwerks auf äußere Knotenlasten $\underline{P}_r$ summiert. Die endgültigen Elementkräfte infolge $\hat{\underline{p}}^i$, $\hat{\underline{g}}^i$ und Einzellasten $\underline{P}_r$ lassen sich dann nach der Berechnung von $\underline{U}_r$, $\underline{u}$ und $\hat{\underline{u}}$ aus (4.1.34) bestimmen:

$$\hat{\underline{S}} + \hat{\underline{S}}_p = \hat{\underline{k}}\ \hat{\underline{u}} = \hat{\underline{k}}\ \underline{T}\ \underline{u} = \hat{\underline{k}}\ \underline{T}\ \underline{\underline{a}}_r \underline{U}_r$$

$$\hat{\underline{S}} = \hat{\underline{k}}\ \underline{T}\ \underline{\underline{a}}_r \underline{U}_r - \hat{\underline{S}}_p. \qquad (4.1.36)$$

4.2 Kraftmethode

Bei der Kraftmethode wird das komplementäre Gesamtpotential (3.6.5) durch die Wahl der Spannungen nach (3.9.3) approximiert. Das komplementäre Gesamtpotential π^* nimmt analog zu (4.1.3) für das idealisierte Tragwerk die Form

$$\pi^* = \sum_{i=1}^{s} (\pi^*)^i \tag{4.2.1}$$

an, wobei $(\pi^*)^i$ das komplementäre Gesamtpotential des i-ten Elementes angibt.

Linear unabhängige Knotenkräfte des Elements:

Wie im Kapitel 4.5 erwähnt, ist die lokale Steifigkeitsmatrix $\hat{\underline{k}}^i$ (die Koeffizientenmatrix der lokalen Gleichgewichtsbedingungen)

$$\hat{\underline{k}}^i \hat{\underline{u}}^i = \hat{\underline{S}}^i \tag{4.2.2}$$

positiv semi-definit. D.h. $\hat{\underline{k}}^i$ ist singulär bzw. enthält linear abhängige Zeilen und Spalten, da in $\hat{\underline{u}}^i$ auch die Starrkörperverschiebungen enthalten sind. Die Anzahl der Starrkörperverschiebungen des Elements wird durch die für das Element zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen (räumlich: 6, eben: 3) bestimmt.

Aus (4.2.2) erkennt man, daß auch die mit $\hat{\underline{u}}^i$ korrespondierenden Elementkräfte $\hat{\underline{S}}^i$ voneinander linear abhängig sind. Man kann also die Anzahl der Elementknotenkräfte genau um die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen des Elements reduzieren, oder man kann $\hat{\underline{S}}^i$ in Abhängigkeit der linear unabhängigen Kräfte angeben, wenn die letzteren als Freiwerte der Spannungsansätze gewählt werden. Für das Element in Bild 4.2 zum Beispiel gibt es 12 Knotenkräfte und 6 Gleichgewichtsbedingungen (räumliches Element). Dieses Element hat dann genau 12 - 6 = 6 linear unabhängige knotenkräfte. Wählt man in Richtung jeder Kante des Elements eine Kraft als linear unabhängige [3] , so erhält man insgesamt sechs linear unabhängige Knotenkräfte (Bild 4.3).

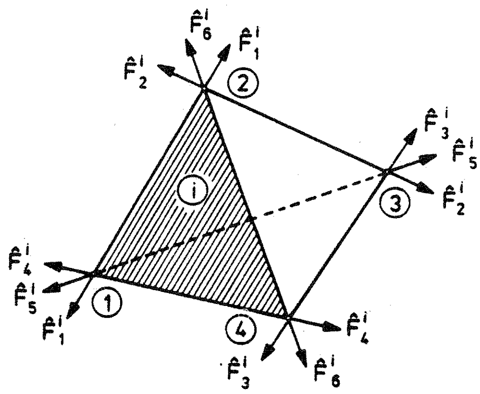

Bild 4.3: i-tes Element mit linear unabhängigen Elementkräften

Durch lokale Knotengleichgewichtsbedingungen ergibt sich die Beziehung zwischen $\hat{\underline{S}}^i$ und $\hat{\underline{F}}^i$:

$$\hat{\underline{S}}^i = \hat{\underline{B}}^i \hat{\underline{F}}^i . \tag{4.2.3}$$

Wobei $\hat{\underline{B}}^i$ die nicht-quadratische Gleichgewichtsmatrix des Elementes ist.

Spannungsansatz:

Innerhalb jedes Elementes wird die Spannungsverteilung $\underline{\sigma}(\hat{x}_i)$ nach (3.9.3) approximiert. Als Freiwerte von (3.9.3) werden zweckmäßig die Komponenten von $\hat{\underline{F}}^i$ gewählt [3].

$$\underline{\sigma}(\hat{x}_i) = \underline{H}^i(\hat{x}_i)\, \hat{\underline{F}}^i . \tag{4.2.4}$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Spannungen mit den Knotenkräften des Elements in Gleichgewicht stehen:

$$\underline{\hat{S}}^i = \underline{h}\ \underline{\sigma}(\hat{x}_i). \tag{4.2.5}$$

$\underline{h}$ ist eine nicht-quadratische und spaltenreguläre Transformationsmatrix. Durch Gleichsetzen von (4.2.3) und (4.2.5) ergibt sich

$$\underline{h}\ \underline{\sigma}(\hat{x}_i) = \underline{\hat{B}}^i \underline{\hat{F}}^i .$$

Die Multiplikation der Gleichung von links mit $\underline{h}^T$ liefert

$$\underline{h}^T \underline{h}\ \underline{\sigma}(\hat{x}_i) = \underline{h}^T \underline{\hat{B}}^i \underline{\hat{F}}^i .$$

Die symmetrische Matrix $\underline{h}^T\underline{h}$ ist invertierbar, daher folgt

$$\underline{\sigma}(\hat{x}_i) = \underbrace{(\underline{h}^T \underline{h})^{-1} \underline{h}^T \underline{\hat{B}}^i}_{H^i} \underline{\hat{F}}^i .$$

Ein Vergleich mit (4.2.4) liefert

$$\underline{H}^i(\hat{x}_i) = (\underline{h}^T \underline{h})^{-1} \underline{h}^T \underline{\hat{B}}^i . \tag{4.2.6}$$

Das komplementäre Gesamtpotential des Elements:

Zunächst wird die folgende Annahme gemacht: Das Tragwerk ist nur durch die äußeren Knotenkräfte $\underline{P}$ beansprucht, d.h. es gilt

$$\underline{\hat{p}}^i = \underline{o} \qquad \text{auf } O_p^i$$

$$\underline{\hat{g}}^i = \underline{o} \qquad \text{in } V^i$$

$$\underline{U}_A = \underline{o} \qquad \text{in Auflagerknoten.}$$

Wenn (4.2.4) statisch zulässig ist, muß nach dieser Annahme die folgende Beziehung gelten:

$$\underline{D}^T\ \underline{\sigma}(\hat{x}_i) = \underline{o} \qquad \text{in } V^i .$$

Das komplementäre Gesamtpotential erhält mit (4.2.4) die Form

$$(\pi^*)^i = (\pi_i^*)^i + (\pi_a^*)_s^i$$

$$(\pi^*)^i = \frac{1}{2}\int_{V^i}(\hat{\underline{F}}^i)^T(\underline{H}^i)^T\underline{G}^i\underline{H}^i\hat{\underline{F}}^i dV - (\hat{\underline{S}}^i)^T\hat{\underline{u}}^i . \qquad (4.2.7)$$

Hierbei stellt das letzte Glied das komplementäre Potential der Knotenkräfte $\hat{\underline{S}}^i$ dar. Setzt man (4.2.3) ein und beachtet man, daß $\hat{\underline{F}}^i$ unabhängig von den Koordinaten $\hat{x}_i$ ist, ergibt sich

$\hat{k}$

$$(\pi^*)^i = \frac{1}{2}(\hat{\underline{F}}^i)^T\int_{V^i}(\underline{H}^i)^T\underline{G}^i\underline{H}^i dV\;\hat{\underline{F}}^i - (\hat{\underline{F}}^i)^T(\hat{\underline{B}}^i)^T\hat{\underline{u}}^i .$$

Nun werden die relativen Elementverschiebungen (Verzerrungen) $\hat{\underline{u}}_r^i$ eingeführt, die mit $\hat{\underline{F}}^i$ korrespondieren. Eine virtuelle Belastung $\delta\hat{\underline{F}}^i$ erzeugt $\delta\hat{\underline{S}}^i$ gemäß (4.2.3).

$$\delta\hat{\underline{S}}^i = \hat{\underline{B}}^i\delta\hat{\underline{F}}^i .$$

Da unter $\delta\hat{\underline{F}}^i$ im Element Gleichgewicht herrscht, gilt

$$\delta(\underline{F}^i)^T\hat{\underline{u}}_r^i = \delta(\underline{S}^i)^T\hat{\underline{u}}^i = \delta(\hat{\underline{F}}^i)^T(\hat{\underline{B}}^i)^T\hat{\underline{u}}^i$$

oder

$$\hat{\underline{u}}_r^i = (\hat{\underline{B}}^i)^T\hat{\underline{u}}^i . \qquad (4.2.8)$$

Mit (4.2.8) nimmt $(\pi^*)^i$ die Form

$$(\pi^*)^i = \frac{1}{2}(\hat{\underline{F}}^i)^T\hat{\underline{f}}^i\hat{\underline{F}}^i - (\hat{\underline{F}}^i)^T\hat{\underline{u}}_r^i . \qquad (4.2.9)$$

an, wobei

$$\hat{\underline{f}}^i = \int_{V^i}(\underline{H}^i)^T\underline{G}^i\underline{H}^i dV \qquad (4.2.1o)$$

die lokale Flexibilitätsmatrix des Elements darstellt.

Das Minimum des komplementären Gesamtpotentials des Elementes:

Durch die Minimalbedingung (3.9.4) ergeben sich die relativen Elementverschiebungen.

$$\frac{\partial(\pi^*)^i}{\partial \underline{\hat{F}}^i} = 0$$

$$\underline{\hat{u}}_r^i = \underline{\hat{f}}^i \underline{\hat{F}}^i . \qquad (4.2.11)$$

Die symmetrische Matrix $\underline{\hat{f}}^i$ ist positiv definit, denn $\underline{\hat{u}}_r^i$ und und $\underline{\hat{F}}^i$ in (4.2.11) sind linear unabhängige Größen. Das Element $\hat{f}_{ij}^i$ von $\underline{\hat{f}}^i$ stellt die der linear unabhängigen Kraft $\hat{F}_i^i$ entsprechende relative Verschiebung $(\hat{u}_r^i)_i$ dar. Sie entsteht, wenn dem Element eine Einheitskraft $\hat{F}_j^i = 1$ eingeprägt wird, während alle anderen Komponenten von $\underline{\hat{F}}^i$ gleichzeitig null sind.

Das Gleichgewicht an den Knoten des Gesamttragwerks:

Die Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten sind mit (4.1.22) gegeben:

$$\underline{a}^T \underline{S} = \underline{P} . \qquad (4.2.12)$$

Die im Vektor $\underline{\hat{S}}$ zusammengefaßten Knotenkräfte aller Elemente

$$\underline{\hat{S}} = \underline{\hat{B}}\, \underline{\hat{F}} \qquad (4.2.13)$$

mit

$$\underline{\hat{S}} = \{\underline{\hat{S}}^1\ \underline{\hat{S}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{S}}^i\ \ldots\ \underline{\hat{S}}^s\}$$

$$\underline{\hat{F}} = \{\underline{\hat{F}}^1\ \underline{\hat{F}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{F}}^i\ \ldots\ \underline{\hat{F}}^s\}$$

$$\underline{\hat{B}} = \lceil \underline{\hat{B}}^1\ \underline{\hat{B}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{B}}^i\ \ldots\ \underline{\hat{B}}^s \rfloor$$

werden nach (4.1.15) mit

$$\underline{S}^i = (\underline{T}^i)^T \hat{\underline{S}}^i = (\underline{T}^i)^T \hat{\underline{B}}^i \hat{\underline{F}}^i$$

$$\underline{S}^i = \underline{B}^i \hat{\underline{F}}^i \tag{4.2.14}$$

oder mit

$$\underline{S} = \underline{B}\ \hat{\underline{F}} \tag{4.2.15}$$

in globale Koordinaten transformiert. Hierbei gilt

$$\underline{B}^i = (\underline{T}^i)^T \hat{\underline{B}}^i \tag{4.2.16}$$

$$\underline{B} = \lceil \underline{B}^1\ \underline{B}^2\ \ldots\ \underline{B}^i\ \ldots\ \underline{B}^s \rfloor .$$

Wird (4.2.15) in (4.2.12) eingesetzt, so ergibt sich das Knotengleichgewicht des Tragwerks zu

$$\underline{a}^T \underline{S} = \underline{a}^T \underline{B}\ \hat{\underline{F}} = \underline{N}^* \hat{\underline{F}} = \underline{P} \tag{4.2.17}$$

mit

$$\underline{N}^* = \underline{a}^T \underline{B}. \tag{4.2.18}$$

Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen:

(4.2.17) enthält noch Gleichungen, die in Richtung der unterdrückten globalen Freiheitsgrade aufgestellt sind. Denn die durch (4.1.21) definierte Inzidenzmatrix $\underline{a}$ ist noch nicht reduziert. Entsprechend (4.1.25) kann (4.2.17) in

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_r^T \\ \hdashline \underline{a}_A^T \end{bmatrix} \underline{B}\ \hat{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \underline{P}_r \\ \hdashline \underline{P}_A \end{bmatrix} \tag{4.2.19}$$

umgeformt werden. $\underline{P}_A$ ist die Matrix der Auflagerkräfte, die mit $\underline{U}_A$ in (4.1.25) korrespondieren. $\underline{P}_A$ wird mit $\underline{P}_r$ in $\underline{P}$ zusammengefaßt.

Aus (4.2.19) folgt

$$\underline{a}_r^T\underline{B}\,\hat{\underline{F}} = \underline{P}_r$$

$$\underline{a}_A^T\underline{B}\,\hat{\underline{F}} = \underline{P}_A$$

oder

$$\underline{N}\,\hat{\underline{F}} = \underline{P}_r \tag{4.2.2o}$$

$$\underline{N}_A\hat{\underline{F}} = \underline{P}_A \tag{4.2.21}$$

mit

$$\underline{N} = \underline{a}_r^T\underline{B} \tag{4.2.22}$$

$$\underline{N}_A = \underline{a}_A^T\underline{B}. \tag{4.2.23}$$

Die im allgemeinen nicht-quadratische Matrix $\underline{N}$ wird Gleichgewichtsmatrix (statische Transformationsmatrix) des Gesamttragwerks genannt. (4.2.21) gibt die Gleichgewichtsbedingungen in Richtung der festgehaltenen Freiheitsgrade der Auflagerknoten an. Auf den Aufbau von $\underline{N}$ wird im nächsten Kapitel näher eingegangen.

Zusammenbau der Elemente zum Gesamttragwerk,
das Minimum des komplementären Gesamtpotentials
vom Gesamttragwerk:

(4.2.1) mit (4.2.9) liefert

$$\pi^* = \sum_{i=1}^{s} (\pi^*)^i = \sum_{i=1}^{s} \left\{ \tfrac{1}{2}(\hat{\underline{F}}^i)^T\hat{\underline{f}}^i\hat{\underline{F}}^i - (\hat{\underline{F}}^i)^T\hat{\underline{u}}_r^i \right\}.$$

Das Summationszeichen kann durch

$$\pi^{*} = \frac{1}{2}\{\underline{\hat{F}}^1\ \underline{\hat{F}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{F}}^s\}^T \lceil \underline{\hat{f}}^1\ \underline{\hat{f}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{f}}^s \rfloor \{\underline{\hat{F}}^1\ \underline{\hat{F}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{F}}^s\}$$

$$- \{\underline{\hat{F}}^1\ \underline{\hat{F}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{F}}^s\}^T \{\underline{\hat{u}}_r^1\ \underline{\hat{u}}_r^2\ \ldots\ \underline{\hat{u}}_r^s\}$$

oder durch

$$\pi^{*} = \frac{1}{2}\underline{\hat{F}}^T\underline{\hat{f}}\ \underline{\hat{F}} - \underline{\hat{F}}^T\underline{\hat{u}}_r \tag{4.2.24}$$

ersetzt werden, wobei

$$\underline{\hat{f}} = \lceil \underline{\hat{f}}^1\ \underline{\hat{f}}^2\ \ldots\ \underline{\hat{f}}^i\ \ldots\ \underline{\hat{f}}^s \rfloor \tag{4.2.25}$$

$$\underline{\hat{u}}_r = \{\underline{\hat{u}}_r^1\ \underline{\hat{u}}_r^2\ \ldots\ \underline{\hat{u}}_r^i\ \ldots\ \underline{\hat{u}}_r^s\}.$$

Die Aufgabe ist nun (4.2.24) unter der Nebenbedingung (4.2.2o) zu minimieren. Die zweite Nebenbedingung (4.2.21) braucht dabei nicht berücksichtigt zu werden, da die Auflagerkräfte $\underline{P}_A$ wegen $\underline{U}_a = \underline{o}$ keinen Anteil zum äußeren Potential liefern. D. h. andererseits, daß die Kräfte $\underline{\hat{F}}$ alleine aus der Minimalbedingung von (4.2.24) unter Berücksichtigung von (4.2.2o) bestimmt werden können. Sind die Kräfte $\underline{\hat{F}}$ ermittelt, so können die Auflagerkräfte $\underline{P}_A$ berechnet werden, indem man $\underline{\hat{F}}$ in (4.2.21) einsetzt.

Bei einem statisch unbestimmten Tragwerk stellt (4.2.2o) ein unterbestimmtes Gleichungssystem dar. Die Unbekannten $\underline{\hat{F}}$ können also nicht allein aus (4.2.2o) bestimmt werden. Deswegen wird zunächst angenommen, daß eine partikuläre Lösung $\underline{B}_o$ mit

$$\underline{N}\ \underline{B}_o = \underline{I} \tag{4.2.26}$$

und eine homogene Lösung $\underline{B}_x$ mit

$$\underline{N}\ \underline{B}_x = \underline{o} \tag{4.2.27}$$

bekannt seien. $\underline{B}_o$ ist die Rechtsinverse und $\underline{B}_x$ der Kern [27] von $\underline{N}$. Die allgemeine Lösung läßt sich mit

$$\hat{\underline{F}} = \underline{B}_o\underline{P}_r + \underline{B}_x\underline{X} \qquad (4.2.28)$$

angeben, wobei $\underline{X}$ die statisch Unbestimmten enthält. Durch Einsetzen läßt sich zeigen, daß (4.2.28) eine Lösung ist.

Das komplementäre Gesamtpotential (4.2.24) mit (4.2.28) liefert

$$\pi^* = \frac{1}{2}(\underline{P}_r^T\underline{B}_o^T + \underline{X}^T\underline{B}_x^T)\hat{\underline{f}}(\underline{B}_o\underline{P}_r + \underline{B}_x\underline{X}) - (\underline{P}_r^T\underline{B}_o^T + \underline{X}^T\underline{B}_x^T)\hat{\underline{u}}_r$$

$$\pi^* = \frac{1}{2}\underline{P}_r^T\underline{B}_o^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_o\underline{P}_r + \frac{1}{2}\underline{P}_r^T\underline{B}_o^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_x\underline{X} + \frac{1}{2}\underline{X}^T\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_o\underline{P}_r$$
$$+ \frac{1}{2}\underline{X}^T\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_x\underline{X} - \underline{P}_r^T\underline{B}_o^T\hat{\underline{u}}_r - \underline{X}^T\underline{B}_x^T\hat{\underline{u}}_r.$$

Durch die Minimalbedingung

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \underline{X}} = o$$

erhält man

$$\frac{1}{2}\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_o\underline{P}_r + \frac{1}{2}\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_o\underline{P}_r + \underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_x\underline{X} - \underline{B}_x^T\hat{\underline{u}}_r = \underline{o}.$$

Die Bestimmungsgleichung (Kompatibilitätsgleichung) für $\underline{X}$ ergibt sich zu

$$\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_x\underline{X} = -\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_o\underline{P}_r + \underline{B}_x^T\hat{\underline{u}}_r. \qquad (4.2.29)$$

Für $\hat{\underline{u}}_r = \underline{o}$ (z.B. infolge Temperatur, Montagefehler) gilt

$$\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_x\underline{X} = -\underline{B}_x^T\hat{\underline{f}}\underline{B}_o\underline{P}_r \qquad (4.2.3o)$$

oder

$$\underline{D}_x\underline{X} = -\underline{D}_p\underline{P}_r \tag{4.2.31}$$

mit

$$\underline{D}_x = \underline{B}_x^T\underline{\hat{f}}\underline{B}_x \quad \text{und} \quad \underline{D}_p = \underline{B}_x^T\underline{\hat{f}}\underline{B}_o. \tag{4.2.32}$$

Die Koeffizientenmatrix $\underline{D}_x$, deren Elemente in der klassischen Stabstatik als δ_{ik}-Zahlen bekannt sind, ist symmetrisch und positiv definit. Die Bestimmung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$, d.h. die Wahl der Statisch Unbestimmten, ist in Kapitel 5.3 ausführlich beschrieben.

Knotenverschiebungen des Tragwerks:

Die Berechnung der Knotenverschiebungen des Tragweks ist für die Berechnung der Elementkräfte nicht notwendig. (4.2.8) kann mit (4.1.11), (4.2.16) und (4.1.26) für alle Elemente des Tragwerks

$$\underline{\hat{u}}_r^i = (\underline{\hat{B}}^i)^T\underline{\hat{u}}^i = (\underline{\hat{B}}^i)^T\underline{T}^i\underline{u}^i = (\underline{B}^i)^T\underline{u}^i$$

$$\underline{\hat{u}}_r = \underline{B}^T\underline{u} = \underline{B}^T\underline{a}_r\underline{U}_r$$

zusammengefaßt werden. Mit (4.2.22) folgt für die Beziehung zwischen den Elementverzerrungen und Knotenverschiebungen des Tragwerks:

$$\underline{\hat{u}}_r = \underline{N}^T\underline{U}_r. \tag{4.2.33}$$

Die Multiplikation der Gleichung von links mit $\underline{B}_o^T$ unter der Berücksichtigung der Definition von $\underline{B}_o$ nach (4.2.26) liefert die Knotenverschiebungen des Tragwerks:

$$\underline{B}_o^T\underline{\hat{u}}_r = \underline{B}_o^T\underline{N}^T\underline{U}_r = \underline{I}\underline{U}_r$$

$$\underline{U}_r = \underline{B}_o^T\underline{\hat{u}}_r. \tag{4.2.34}$$

Für alle Elemente folgt aus (4.2.11)

$$\underline{\hat{u}}_r = \underline{\hat{f}}\underline{\hat{F}}. \tag{4.2.35}$$

(4.2.34) erhält damit die Form

$$\underline{U}_r = \underline{B}_o^T\underline{\hat{f}}\underline{\hat{F}}. \tag{4.2.36}$$

Der vollständige Verschiebungsvektor $\underline{U}$ ergibt sich nach (4.1.25)

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_r \\ \hline \underline{U}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_o^T\underline{\hat{f}}\underline{\hat{F}} \\ \hline \underline{U}_A \end{bmatrix}. \tag{4.2.37}$$

Zusammenhang zwischen Kraft- und Verschiebungsmethode:

Die Inversion von (4.2.11) liefert mit (4.2.8)

$$\underline{\hat{F}}^i = (\underline{\hat{f}}^i)^{-1}\underline{\hat{u}}_r^i = (\underline{\hat{f}}^i)^{-1}(\underline{\hat{B}}^i)^T\underline{\hat{u}}^i.$$

Durch linksseitige Multiplikation mit $\underline{\hat{B}}^i$ und unter Beachtung von (4.2.3) und (4.1.1o) erhält man die Gleichgewichtsbedingungen des Elementes:

$$\underline{\hat{B}}^i\underline{\hat{F}}^i = \underline{\hat{B}}^i(\underline{\hat{f}}^i)^{-1}(\underline{\hat{B}}^i)^T\underline{\hat{u}}^i$$

$$\underline{\hat{S}}^i = \underline{\hat{k}}^i\underline{\hat{u}}^i \tag{4.2.38}$$

mit

$$\underline{\hat{k}}^i = \underline{\hat{B}}^i(\underline{\hat{f}}^i)^{-1}(\underline{\hat{B}}^i)^T. \tag{4.2.39}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamttragwerks lassen sich entsprechend (4.2.38) aus (4.2.35), (4.2.33) und (4.2.2o) ableiten:

$$\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{f}}^{-1}\underline{\hat{u}}_r = \underline{\hat{f}}^{-1}\underline{N}^T\underline{U}_r$$

$$\underline{\underline{N}}\underline{\underline{\hat{F}}} = \underline{\underline{N}}\underline{\underline{\hat{f}}}^{-1}\underline{N}^T\underline{U}_r = \underline{P}_r$$

oder

$$\underline{K}_r\underline{U}_r = \underline{P}_r \tag{4.2.4o}$$

mit

$$\underline{K}_r = \underline{N}\;\underline{\hat{f}}^{-1}\underline{N}^T. \tag{4.2.41}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen (4.2.39) und (4.1.8) sind nicht gleich. Denn (4.2.39) und (4.1.8) basieren auf zwei verschiedenen Ansätzen. Dasselbe gilt folglich auch für die Gesamtsteifigkeitsmatrizen (4.2.41) und (4.1.28).