

2. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DES ELASTISCHEN KÖRPERS

Der Spannungs- und Verformungszustand eines linear elastischen Körpers läßt sich eindeutig aus

1. den Gleichgewichtsbedingungen,
2. der kinematischen Verträglichkeit und
3. dem Materialgesetz

bestimmen.

2.1 Gleichgewichtsbedingungen

Der betrachtete elastische Körper (Bild 2.1) mit dem Volumen V habe die Oberfläche O . An einem Teil O_u dieser Oberfläche sei der Körper gelagert bzw. seien eingeprägte Verschiebungen \underline{u}^0 vorgegeben. Auf dem Rest der Oberfläche $O_p = O - O_u$ wirken die äußeren Lasten $\underline{p} = \{p_1 \ p_2 \ p_3\}$ und im Innern wirken die auf die Volumeneinheit bezogenen Kräfte $\underline{g} = \{g_1 \ g_2 \ g_3\}$.

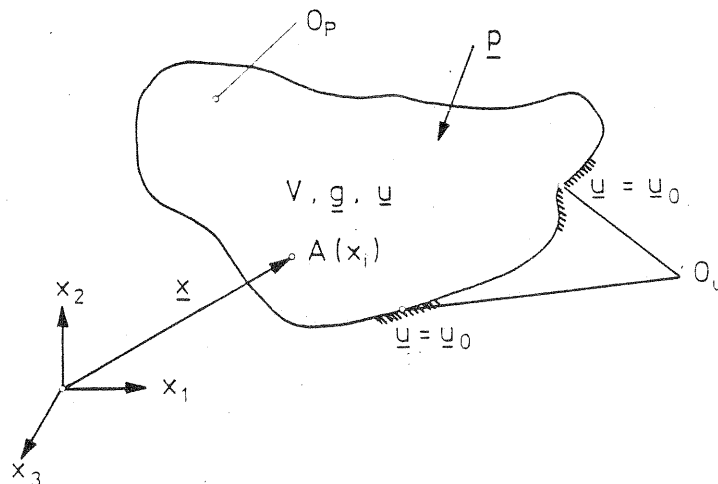


Bild 2.1: Räumlicher Körper

An einem Punkt eines so beschriebenen Körpers herrschen die vom Ortsvektor \underline{x} abhängigen Spannungen σ_{ij} . Für die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen wird ein infinitesimal kleiner Würfel (Bild 2.2) dieses Körpers mit dem Volumen dV betrachtet.

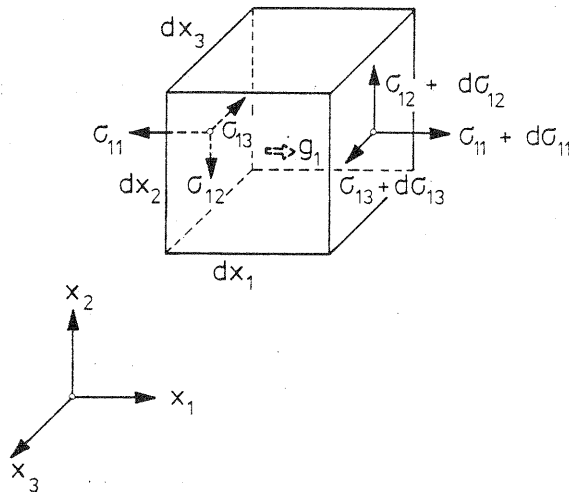


Bild 2.2: Variationen der Spannungen in Richtung von x_1

Es wird vorausgesetzt, daß die Spannungen differenzierbare Funktionen der Koordinaten x_i sind. Die betrachteten Spannungen σ_{ij} seien im Mittelpunkt der linken Seitenfläche mit der Normalen in negativer x_1 -Richtung definiert. Wenn man von diesem Punkt in Richtung x_1 um den differentiellen Betrag dx_1 fortschreitet, so werden sich die Spannungen um $d\sigma_{ij}$ ändern. Man erhält daher im Mittelpunkt der rechten Seitenfläche mit der Normalen x_1 die Spannungen $\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$. Diese Spannungswerte können mit Hilfe der TAYLOR'schen Reihe in

$$\sigma_{ij} + d\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} dx_k$$

umgeformt werden, wobei nur die linearen Glieder der Reihenentwicklung berücksichtigt werden.

Für die Einhaltung des Gleichgewichtszustandes müssen

1. das resultierende Moment und
2. die resultierende Kraft

verschwinden.

Aus der 1. Bedingung ergibt sich, daß die Schubspannungen auf zwei zueinander senkrecht stehenden Flächen gleich sind:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{für } i \neq j \quad (2.1.1)$$

Aus der 2. Bedingung ergeben sich die partiellen Differentialgleichungen für den Gleichgewichtszustand:

$$\sigma_{ij,j} + g_i = 0 \quad \text{in } V \quad (2.1.2)$$

Schreibt man (2.1.2) unter Berücksichtigung von (2.1.1) in Matrizenform, so ergibt sich

$$\underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{g} = 0 \quad \text{in } V \quad (2.1.3)$$

mit

$$\underline{D}^T = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}$$

und

$$\underline{\sigma} = \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23} \}$$

$\underline{D}_{6 \times 3}$: Differentialoperatormatrix

$\underline{\sigma}_{6 \times 1}$: Spaltenmatrix der Spannungskomponenten.

Liegt das Element, dessen Gleichgewichtslage untersucht wird, an der Oberfläche, so muß die aus den Spannungen resultierende Kraft \underline{p}^0 mit der Oberflächenlast \underline{p} im Gleichgewicht stehen.

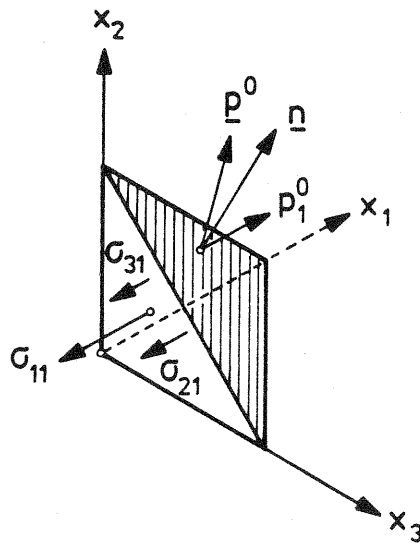


Bild 2.3: Gleichgewicht an der Oberfläche

Werden mit $n_i = \cos \alpha_i$ ($\alpha_i =$ der Winkel zwischen \underline{n} und x_i) die Komponenten der Normalen bezeichnet (Bild 2.3), dann gilt:

$$p_i^0 = \sigma_{ij} n_j \quad \text{auf } 0_p$$

oder

$$\underline{p}^0 = \underline{n}^T \underline{\sigma}. \quad \text{auf } 0_p \quad (2.1.4)$$

mit

\underline{n}^T : Gleichgewichtsmatrix des Oberflächenelements

$$\underline{n}^T = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & 0 & n_3 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix} .$$

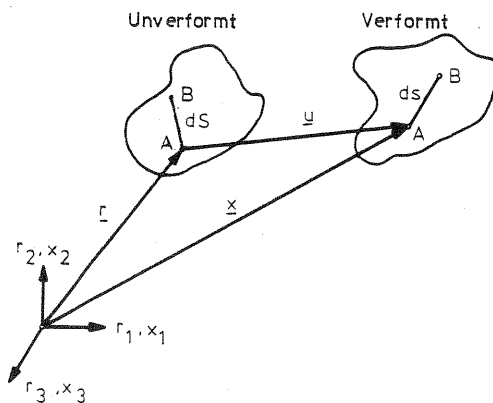
Bei vorgegebener Oberflächenlast \underline{p} muß

$$\underline{p}^0 = \underline{p} \quad \text{auf } 0_p \quad (2.1.5)$$

gelten (statische Randbedingungen).

2.2 Kinematische Verträglichkeit

Durch die Beanspruchung des elastischen Körpers unter ein-geprägten Lasten tritt eine Verformung $\underline{u}(x_i)$ auf. Die Verschiebungen \underline{u} sollen differenzierbare Funktionen der Koordinaten x_i sein. Risse und Verwerfungen werden durch diese Forderung ausgeschlossen.



$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}(x_1, x_2, x_3) \\ \underline{x} &= \underline{x}(r_1, r_2, r_3) \\ u_i &= x_i - r_i \end{aligned}$$

Bild 2.4: Verformungszustand [5]

Aus den Verschiebungen eines Punktes können die Verzerrungen

$\underline{\varepsilon}$ im selben Punkt abgeleitet werden. Mit dem linearen Verzerrungstensor [5]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

lassen sich die Verzerrungen in Matrizenform darstellen:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad (2.2.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\} \\ &= \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}\} \end{aligned}$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad \text{für } i \neq j$$

$$\underline{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}$$

$\underline{\varepsilon}_{6 \times 1}$: Spaltenmatrix der Verzerrungskomponenten

$\underline{u}_{3 \times 1}$: Spaltenmatrix der Verschiebungskomponenten.

Außer der Erfüllung von (2.2.1) müssen die Verschiebungen mit denen auf O_u vorgeschriebenen \underline{u}^0 übereinstimmen (kinematische Randbedingungen):

$$\underline{u} = \underline{u}^0 \quad \text{auf } O_u \quad (2.2.2)$$

2.3 Das Materialgesetz

Bis jetzt wurde keine Beziehung zwischen $\underline{\sigma}$ und $\underline{\varepsilon}$ angegeben. Aus der im Kapitel 2.1 abgeleiteten linearen Beziehung zwischen den Lasten und Spannungen (2.1.3) bzw. (2.1.4)

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{g}, \underline{p}),$$

und der im Kapitel 2.2 gezeigten linearen Beziehung (2.2.1) zwischen den Verformungen, Verzerrungen und Lasten

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{\varepsilon}) = \underline{u}(\underline{g}, \underline{p})$$

ergibt sich auch eine lineare Beziehung zwischen Spannungen $\underline{\sigma}$ und Verzerrungen $\underline{\varepsilon}$.

Diese Kopplung erfolgt über das Materialgesetz als umkehrbar eindeutige Funktionen zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten.

Die Spannungs- Verzerrungsbeziehungen [5]

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij}$$

und Verzerrungs- Spannungsbeziehungen [5]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$$

mit dem Kroneckerdelta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

lassen sich in Matrizenform wie folgt darstellen:

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon} \quad (2.3.1)$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{G} \underline{\sigma} \quad (2.3.2)$$

mit

$$\underline{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

$$\underline{G} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

- $\underline{E}_{6 \times 6}$: Materialsteifigkeitsmatrix
 $\underline{G}_{6 \times 6}$: Materialflexibilitätsmatrix
 E : Elastizitätsmodul des Materials
 ν : Querdehnungszahl des Materials.

Die Matrix \underline{E} ist symmetrisch und im allgemeinen positiv definit. Nur für Materialien mit einer unendlichen Kompressionszahl (z.B. Wasser), für die ν den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt, ist \underline{E} positiv semi-definit. Zwischen \underline{E} und \underline{G} besteht die Beziehung ($\nu \neq \frac{1}{2}$)

$$\underline{G} = \underline{E}^{-1}. \quad (2.3.5)$$

2.4 Lösung des Randwertproblems

Die Bestimmung des gesuchten Spannungs- und Verformungszustandes eines Tragwerks läuft bei dieser Problemformulierung (2.1.3), (2.2.1), (2.3.1) und (2.3.2) auf die Integration eines partiellen Differentialgleichungssystems für die vorgegebenen Randwerte $(\underline{p}, \underline{u}^0)$ hinaus. Die Randwertprobleme der Elastizitätstheorie sind aber meist so kompliziert, daß man sie nicht geschlossen lösen kann. Daher setzt man numerische Lösungsmethoden ein, die die Aufgabe approximativ lösen. Das Differenzenverfahren und die direkte Variationsmethode sind z.B. solche Näherungsmethoden, die die Differentialgleichungen durch ein lineares Gleichungssystem nähern.

Die Randwertprobleme werden nach der Variationsmethode gelöst, indem man das Minimum eines Integrals bestimmt, dessen physikalische Bedeutung eine Energie ist. Diese Methode wird daher auch Energiemethode genannt.

Die Energiemethode erweist sich vorteilhaft, weil die Energie eine skalare Größe ist und daher gegenüber Koordinatentransformationen invariant bleibt. Weiterhin lassen sich direkte Variationsmethoden, wie z.B. das RITZ'sche Verfahren, zur Lösung anwenden.