Taslak

24. Özel durumlar

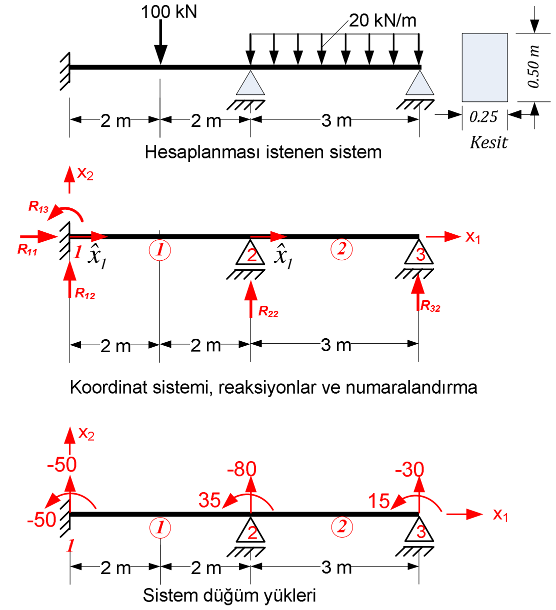
a)Eleman üzerinde yük olması
b)Mafsal tanımlanması
c)Mesnet çökmesi(menet yer değiştirmesi)
d)Üretim hatası
e)Yaylı mesnet(elastik mesnet)
f)Kısmi bağlı eleman

gibi durumlar ele alınacaktır.

24.1 Eleman üzerinde yük olması:

Normal olarak sistem yük vektörü sistemin düğümlerindeki tekil yüklerden oluşur. Elemanlar üzerinde yük olması durumunda eleman ankastrelik kuvvetleri hesaplanır, bu kuvvetlerin ters işaretlileri düğümlere aktarılır. Denklem sistemi çözülür, eleman yerel kuvvetleri bulunur, bu kuvvetlere ankastrelik kuvvetleri eklenir.

Şekil 24.1 deki sistem ve 2 elemanlı modeli kullanılarak hesap adımları açıklanacaktır. Tekil ve düzgün yayılı yükün ankastrelik kuvvetleri EK3 den alınır.



Şekil 24.1. Sürekli kiriş problemi ve modellenmesi

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\\tilde{s}_2\\\tilde{s}_3\\\tilde{s}_4\\\tilde{s}_5\\\tilde{s}_6\end{bmatrix}}_{\tilde{s}^1}=\begin{array}{c}1\\ \\ \\2\\ \\ \\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\50\\50\\0\\50\\-50\end{bmatrix}}_{\tilde{s}^1}
\qquad
\begin{array}{c}1\\ \\ \\2\\ \\ \\3\\ \\ \\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}-0\\-50\\-50\\-0-0\\-50-30\\50-15\\-0\\-30\\15\end{bmatrix}}_{\underline{P}}
\qquad
\begin{array}{c}2\\ \\ \\3\\ \\ \\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\30\\15\\0\\30\\-15\end{bmatrix}}_{\tilde{s}^2}=\underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\\tilde{s}_2\\\tilde{s}_3\\\tilde{s}_4\\\tilde{s}_5\\\tilde{s}_6\end{bmatrix}}_{\tilde{s}^2}$$

1. elemanın ankastrelik kuvvetleri

Sistemin düğüm yükleri

2. elemanın ankastrelik kuvvetleri

$$\begin{array}{c}i\\ \\ \\j\\ \\ \\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\\hat{s}_2\\\hat{s}_3\\\hat{s}_4\\\hat{s}_5\\\hat{s}_6\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{s}}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&-L&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{B}}}\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{\underline{F}}
\longrightarrow
\begin{array}{c}1\\ \\ \\2\\ \\ \\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&-4&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{B}}^1}
\qquad
\begin{array}{c}1\\ \\ \\2\\ \\ \\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&-3&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{B}}^2}$$

Yerel denge matrisi 22.17 den

1.elemanın denge matrisi

2.elemanın denge matrisi

Elemanların bilinmeyenleri

Reaksiyon bilinmeyenleri

$$\underline{N}\,\underline{F}=\underline{P}\longrightarrow
\begin{array}{c} \\1\\ \\ \\2\\ \\ \\3\\ \\ \\\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}1&2&3&4&5&6&R_{11}&R_{12}&R_{13}&R_{22}&R_{32}\end{array}\\
\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccccc}
-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&-4&-1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ \hline
1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&-1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&-3&-1&0&0&0&0&0\\ \hline
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0
\end{array}\right]}_{\underline{N}}
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\\R_{11}\\R_{12}\\R_{13}\\R_{22}\\R_{32}\end{bmatrix}}_{\underline{F}}
=\underbrace{\left[\begin{array}{c}0\\-50\\-50\\ \hline 0\\-80\\35\\ \hline 0\\-30\\15\end{array}\right]}_{\underline{P}} \qquad (24.1)$$

1 noktasındaki yükler

2 noktasındaki yükler

3 noktasındaki yükler

Sistemin düğüm numaraları

Sistemin Denge matrisi

Sistemin bilinmeyenleri

Sistemin yük vektörü

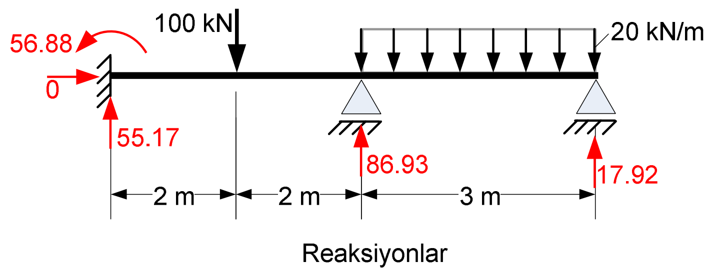
24.1 denklem sisteminin çözümünden sistemin binmeyenleri hesaplanmıştır(ara işlemler gösterilmemiştir):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \\ R_{22} \\ R_{32} \end{bmatrix}}_{\underline{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -5.1563 \\ 13.75 \\ 0 \\ -12.0833 \\ 15 \\ 0 \\ -55.1563 \\ -56.875 \\ -86.9271 \\ -17.9167 \end{bmatrix}}_{\underline{F}}$$

1. elemanın bilinmeyenleri

2. elemanın bilinmeyenleri

Reaksiyonların ters işaretlileri



Eleman uç kuvvetleri:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{S}}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}^1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -5.1563 \\ 13.75 \end{bmatrix}}_{\underline{F}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 50 \\ 0 \\ 50 \\ -50 \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{s}}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 55.16 \\ 56.88 \\ 0 \\ 44.85 \\ -36.25 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{S}}^1}$$

1. elemanın ankastrelik kuvvetleri

1. elemanın denge matrisi

1. elemanın bilinmeyenleri

1. elemanın uç kuvvetleri

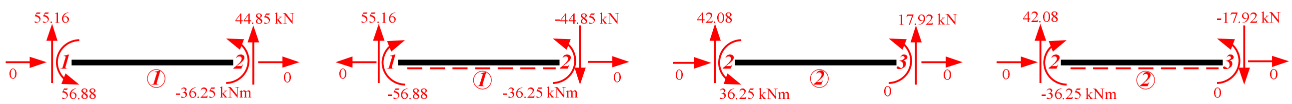
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{S}}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -12.0833 \\ 15 \end{bmatrix}}_{\underline{F}^2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \\ 0 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{s}}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 42.08 \\ 36.25 \\ 0 \\ 17.92 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{S}}^2}$$

2. elemanın ankastrelik kuvvetleri

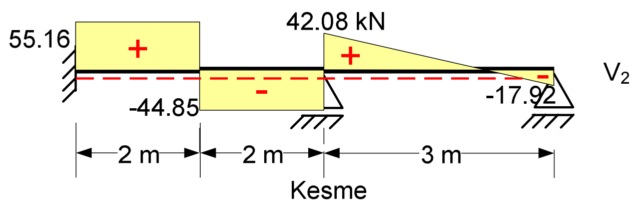
2. elemanın denge matrisi

2. elemanın bilinmeyenleri

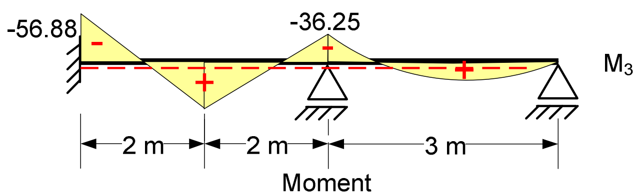
2. elemanın uç kuvvetleri



Diyagramlar:

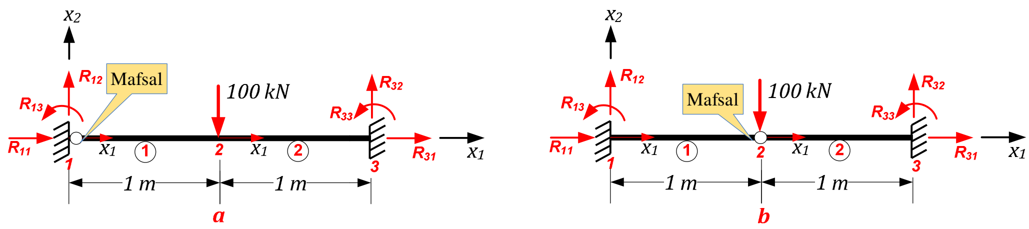


Normal kuvvet her yerde sıfırdır.



24.2 Mafsal tanımlamak:

Kuvvet metodunda denge denklemlerine ek koşullar, örneğin moment, kesme mafsalı, eklemek kolaydır. Örnek olarak, Şekil 23.4 de ki mafsalsız sistemin şekil 24.2 de iki farklı moment mafsallı durumu görülmektedir.



Şekil 24.2: Mafsallı düzlem kiriş örnekleri

Mafsalsız sistemin denge denklemleri 23.4 de verilmişti. 24.2a daki sistemin 1 noktasında moment mafsalı vardır. 1.elemanın 1 noktasında moment kuvveti sıfır olmalıdır. Bunu sağlamak için $\hat{s}_3 = -F_2 - F_3 = 0$ koşulunu 23.4 denklem sisteminin sonuna eklemek yeterlidir.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\\hat{s}_2\\\hat{s}_3\\\hat{s}_4\\\hat{s}_5\\\hat{s}_6\end{bmatrix}}_{\hat{S}^1}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{B^1}
\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{F}
$$

1.elemanda yerel denge

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}1&2&3&4&5&6&R_{11}&R_{12}&R_{13}&R_{31}&R_{32}&R_{33}\end{array}\\
\underbrace{\begin{bmatrix}
-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&-1&-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}}_{N}
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\\R_{11}\\R_{12}\\R_{13}\\R_{31}\\R_{32}\\R_{33}\end{bmatrix}}_{F}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\-100\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{P}
$$

Denklem sayısı bir arttığından: n=10, m=12, r=12-10=2 oldu, hiperstatiklik derecesi bir azaldı.

24.2b deki sistemin 2 noktasında moment mafsalı vardır. 1.elemanın 2 noktasında moment kuvveti sıfır olmalıdır. Bunu sağlamak için $\hat{s}_6 = F_3 = 0$ koşulunu 23.4 denklem sisteminin sonuna eklemek yeterlidir.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\\hat{s}_2\\\hat{s}_3\\\hat{s}_4\\\hat{s}_5\\\hat{s}_6\end{bmatrix}}_{\hat{S}^1}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{B^1}
\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{F}
$$

1.elemanda yerel denge

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}1&2&3&4&5&6&R_{11}&R_{12}&R_{13}&R_{31}&R_{32}&R_{33}\end{array}\\
\underbrace{\begin{bmatrix}
-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&-1&-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}}_{N}
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\\R_{11}\\R_{12}\\R_{13}\\R_{31}\\R_{32}\\R_{33}\end{bmatrix}}_{F}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\-100\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{P}
$$

Denklem sayısı bir arttığından: n=10, m=12, r=12-10=2 oldu, hiperstatiklik derecesi bir azaldı.

Benzer yolla; normal kuvvet, kesme mafsalı da tanımlanabilir.

24.3 Mesnet çökmesi, üretim hatası

Mesnetlerdeki göreceli yer değiştirmeler normal olarak sıfırdır. Ancak, mesnet ön görülemeyen bir nedenle yer değiştirebilir. Bu yer değiştirmeden dolayı iç kuvvetler oluşur.

Özellikle çelik yapılarda üretim hatası, örneğin bir çubuğun boyunun olması gerekenden kısa veya uzun kesilmesi, sonucu eleman zorla yerine monte edilir. Bundan dolayı da ön görülmemiş iç kuvvetler oluşur.

Bunun için mühendisler bazı mesnetlerin belli bir miktar yer değiştirdiğini ve/veya bazı elemanların boylarının bir miktar yanlış kesildiğini varsayarlar. Yani yer değiştirmemesi gereken mesnedin yer değiştirmesi şu kadar olsun veya çubuk boyu şu kadar olması gerekirken bu kadar olsun varsayarlar ve sistemi bu varsayıma göre analiz ederler.

Mesnet çökmesi veya üretim hatasından dolayı oluşacak iç kuvvetler nasıl hesaplanacaktır? Bunun için 20 bölümde **"Sistemin süreklilik koşulu"** alt başlığı altında verdiğimiz 20.20 den 20.23 e kadar verilen bağıntıları genelleştirmemiz gerekir. 20.20 bağıntısı

$$\underline{N}^T \underline{U} = \underbrace{f \underline{F}}_{\underline{v}} \tag{24.2}$$

idi. Sağ taraftaki $\underline{v} = \underbrace{f \underline{F}}_{\underline{v}}$ terimi sistemin düğüm yüklerinden oluşan göreceli yer değiştirmeleridir. Mesnet yer değiştirmesi ve üretim hatası değerleri bilinen göreceli yer değiştirmedir, bunları $\underline{\boldsymbol{v}}_t$ ile gösterelim. $\underline{\boldsymbol{v}}_t$ yi 24.2 nin sağ tarafına eklersek sağ taraf toplam göreceli yer değiştirme olur:

$$\underline{N}^T \underline{U} = \underbrace{f \underline{F}}_{\underline{v}} + \underline{\boldsymbol{v}}_t \tag{24.3}$$

Sistemin düğüm yüklerinden oluşan göreceli yer değiştirmeler

Değerleri bilinen yer değiştirmeler

Sağdan $\underline{B}_x^T$ ile her iki tarafı çarpar ve 20.18 i dikkate alırsak

$$\underbrace{\underline{B}_x^T \underline{N}^T}_{\underline{0}} \underline{U} = \underline{B}_x^T \underbrace{f \underline{F}}_{\underline{v}} + \underline{B}_x^T \underline{\boldsymbol{v}}_t \rightarrow \underline{0}\, \underline{U} = \underline{B}_x^T \underbrace{f \underline{F}}_{\underline{v}} + \underline{B}_x^T \underline{\boldsymbol{v}}_t$$

$$\underline{B}_x^T \underbrace{f \underline{F}}_{\underline{v}} + \underline{B}_x^T \underline{\boldsymbol{v}}_t = \underline{0} \tag{24.4}$$

20.16 denklem sisteminin çözülebilmesi için gerekli **ek koşul**

Olur. 20.19 u yerine yazalım:

$$\underline{B}_x^T f \underbrace{(\underline{B}_0 \underline{P} + \underline{B}_x \underline{x})}_{\underline{F}} + \underline{B}_x^T \underline{\boldsymbol{v}}_t = \underline{0}$$

$$\underline{B}_x^T f \underline{B}_0 \underline{P} + \underline{B}_x^T f \underline{B}_x \underline{x} + \underline{B}_x^T \underline{\boldsymbol{v}}_t = \underline{0}$$

$$\underline{B}_x^T f \underline{B}_x \underline{x} = -\underline{B}_x^T f \underline{B}_0 \underline{P} - \underline{B}_x^T \underline{\boldsymbol{v}}_t \tag{24.5}$$

Sistemin süreklilik koşulu

bulunur. $\underline{x}$ vektörünün rxr boyutlu katsayılar matrisi $\underline{B}_x^T f \underline{B}_x$ simetrik ve pozitif tanımlı, $\det(\underline{B}_x^T f \underline{B}_x) \neq 0$ dır. O halde, bu denklem sisteminden tek bir $\underline{x}$ bulunur. $\underline{x}$ süreklilik koşulu sağlanacak şekilde hesaplandığından, 20.19 da yerine konularak bulunan $\underline{F}$ vektörü de sistemin denge denklemlerini sağlayan tek çözüm olacaktır. Böylece hem **denge denklemlerini** hem de **süreklilik koşullarını** sağlayan çözüm bulunmuş olur. 20.23 ifadesi de

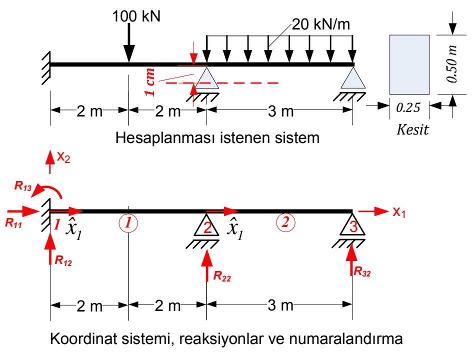
$$\underline{U} = \underline{B}_0^T \underbrace{f \underline{F}}_{\underline{v}} + \underline{B}_0^T \underline{\boldsymbol{v}}_t \tag{24.6}$$

Sistemin yer değiştirmeleri

olur.

Şekil 24.3 deki sistemin orta mesnedindeki 1 cm lik çökmeyi dikkate almak için $\underline{\boldsymbol{v}}_t$ vektörünün R_{22} reaksiyon bilinmeyenine karşılık gelen göreceli yer değiştirmesini -0.01 almak gerekir.

Sistemde mesnet çökmesi veya üretim hatası yoksa $\underline{\boldsymbol{v}}_t = \underline{0}$ dır.



Şekil 24.3. Sürekli kiriş mesnet çökmesi örneği

24.4 Elastik mesnet(yay) tanımlamak

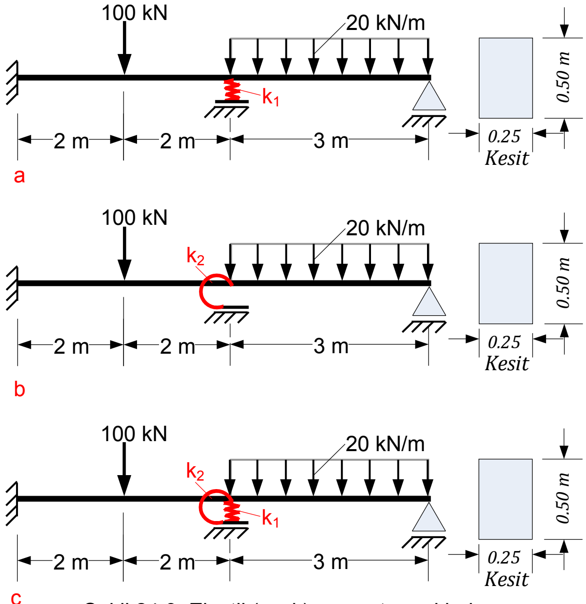
Şekil 24.3a nın orta mesnedinde, düşey yönde, eksenel kuvvet yayı vardır. Yay sabiti k_1 dir. Yay sabiti bir rijitliktir. k_1 in birimi kN/m dir, yayı 1 m uzatmak veya kısaltmak için yaya uygulanması gereken kuvvet anlamındadır.

k_1 yayını modellemek için, yayın bulunduğu noktada çok küçük boylu(örneğin L=1 cm boyunda) bir çerçeve elemanı tanımlanır. Bu elemanın esneklik matrisi

Bak: 22.20

$$\underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_3} & \frac{L^2}{2EI_3} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI_3} & \frac{L}{EI_3} \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \text{ değil}$$

$$\underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \text{ alınır}$$



Şekil 24.3: Elastik(yaylı) mesnet örnekleri

Şekil 24.3b nın orta mesnedinde, dönme yayı vardır. Yay sabiti k_2 dir. Yay sabiti bir rijitliktir. k_2 in birimi kNm/radyan dır, yayı 1 radyan döndürebilmek için yaya uygulanması gereken moment anlamındadır.

k_2 yayını modellemek için, yayın bulunduğu noktada çok küçük boylu(örneğin: L=1 cm boyunda) bir çerçeve elemanı tanımlanır. Bu elemanın esneklik matrisi

$$\underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \text{ alınır.}$$

Şekil 24.3c nin orta mesnedinde, k_1 eksenel kuvvet ve k_2 dönme yayı vardır. k_1 ve k_2 yaylarını modellemek için, yayların bulunduğu noktada çok küçük boylu(örneğin: L=1 cm boyunda) bir çerçeve elemanı tanımlanır. Bu elemanın esneklik matrisi

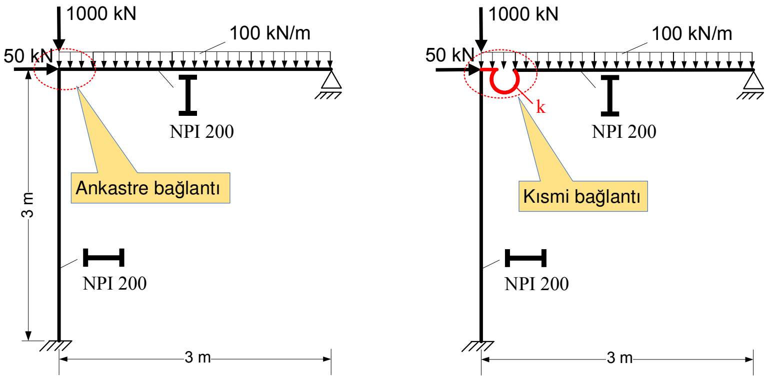
$$\underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \text{ alınır.}$$

24.5 Elastik birleşimli(kısmi bağlı) eleman tanımlamak

Çelik yapılarda perçinli veya bulonlu birleşimlerin dönmeye karşı tam ankastre değil, kısmi ankastre(örneğin: yarı ankastre) olarak modellenmesi daha gerçekçi olur. Kaynaklı birleşimler ve betonarme yapılar tam ankastre birleşim varsayılır. Şekil 24.4 deki kirişin kolona kısmi bağlı olduğunu tanımlamak için kirişin kolona birleştiği noktada çok küçük boylu(örneğin: L=1 cm uzunluğunda) bir çerçeve eleman(dönme yayı) tanımlanır.

Bu elemanın esneklik matrisi

$$\underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \text{ alınır}$$



Şekil 24.4: Kısmi bağlı eleman örneği