

23. Sistem denge denklemlerinin direkt kurulması

Sonlu elemanlar metodu el hesapları için değil, bilgisayarda yazılımlar ile kullanılması için geliştirilmiştir. Sistemin denge denklemleri

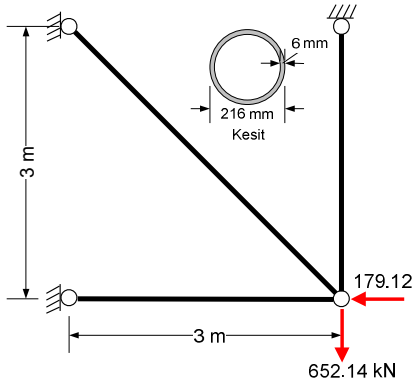
$$\underline{N F} = \underline{P} \quad (23.1)$$

otomatik olarak kurulur. Bunun gerçekleştirilebilmesi için modellenmiş sistemin

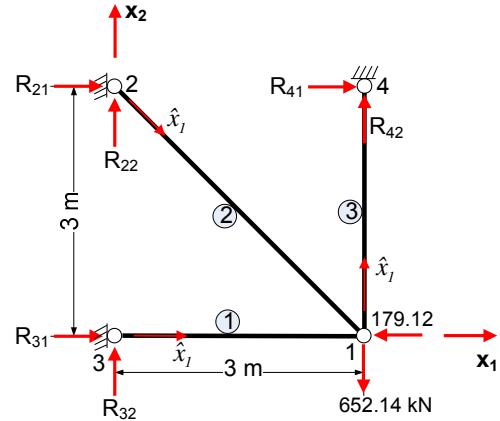
- a) Genel eksenlerinin seçilmiş
- b) Her elemanın yerel eksenlerinin seçilmiş
- c) Noktaların, elemanların ve reaksiyonların düzenli bir şekilde numaralanmış
- d) Düğüm noktalarının genel koordinatlarının verilmiş
- e) Eleman-nokta bağı (her elemanın sistemin hangi düğüm noktalarına bağlı olduğu bilgisi) verilmiş
- f) Sınır (mesnet) koşullarının verilmiş
- g) Dış yüklerin nokta-yön ve şiddetinin verilmiş

olması gerekir.

**Örnek 23.1:** Şekil 23.1 deki düzlem kafes sistemin denge denklemlerinin direkt kurulması adımları gösterilecektir.



Şekil 23.1: Denge denklemleri kurulması istenen kafes sistem



Şekil 23.2: Koordinat sistemleri ve numaralandırma

**1.Adım:** Genel ve yerel koordinat sistemleri seçilir, noktalar, elemanlar, reaksiyonlar numaralanır: Şekil 23.2. Reaksiyonların numaraları nokta ve yön bilgisini içerir. Örneğin, R<sub>31</sub> reaksiyonu 3 noktasında x<sub>1</sub> yönünde, R<sub>32</sub> reaksiyonu 3 noktasında x<sub>2</sub> yönünde anlamındadır.

**2.Adım:** Eleman-nokta bağı bilgisi ve nokta-koordinatlar bilgisi oluşturulur.

Eleman no	i noktası	j noktası
1	3	1
2	2	1
3	1	4

Yerel eksen takımının orijininin bu noktada olduğu anlamını taşır

nokta no	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	0	0
2	0	3
3	3	3

Koordinatlar

**3.Adım:** 2. adımdaki bilgiler kullanılarak her elemanın genel denge matrisinin kurulabilmesi için gerekli bilgiler hazırlanır. Düzlem kafes elemanın genel denge matrisi 22.4 de verilmişti. Matrisin kurulabilmesi için her elemanın c<sub>1</sub> ve c<sub>2</sub> sabitlerinin hesaplanması gerekir.

i indisi, i. elemanın denge matrisi anlamında eklendi

$$B^i = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Eleman no

Elemanın bağlı olduğu noktalar. i noktası yerel orijindir.

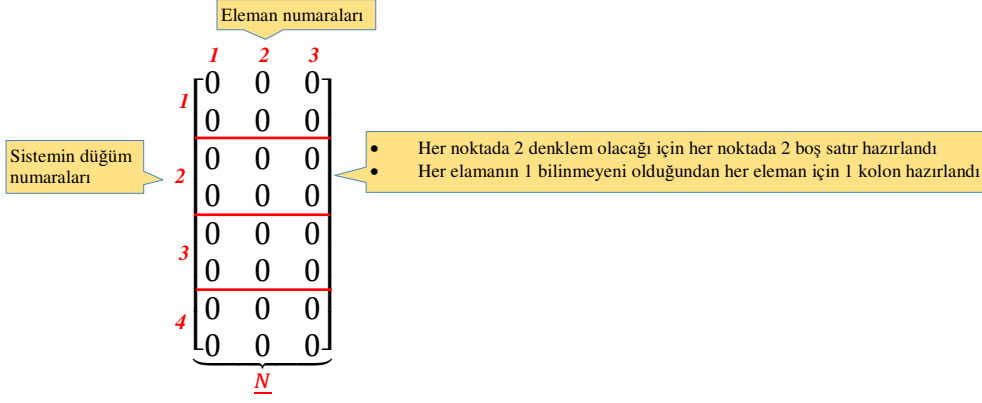
$$(23.2)$$

Eleman	i	j	x <sub>1i</sub>	x <sub>2i</sub>	x <sub>1j</sub>	x <sub>2j</sub>	Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>	L	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>
1	3	1	0	0	3	0	3	0	3	1	0
2	2	1	0	3	3	0	3	-3	4.245	0.707	-0.707
3	1	4	3	0	3	3	0	3	3	0	1

2. adımdaki bilgilere göre hazırlanan tablo

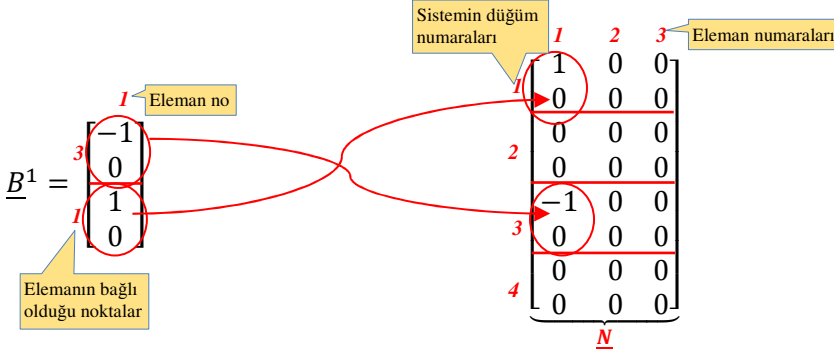
## 23. Sistem denge denklemlerinin direkt kurulması

**4.Adım:** Sistemin denge matrisi tüm terimleri sıfır olarak hazırlanır.

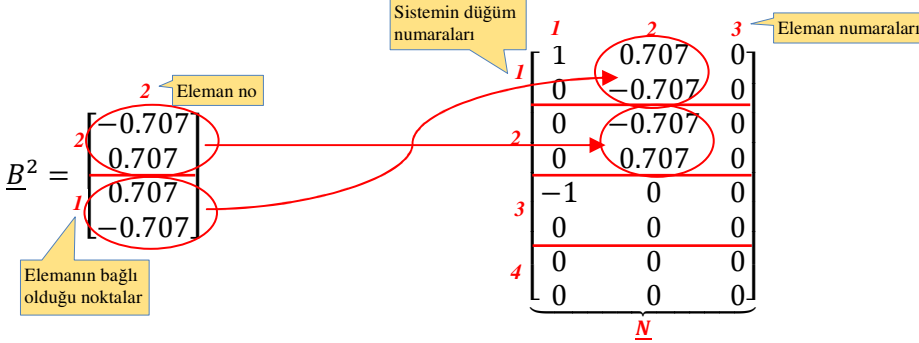


**5.Adım:**

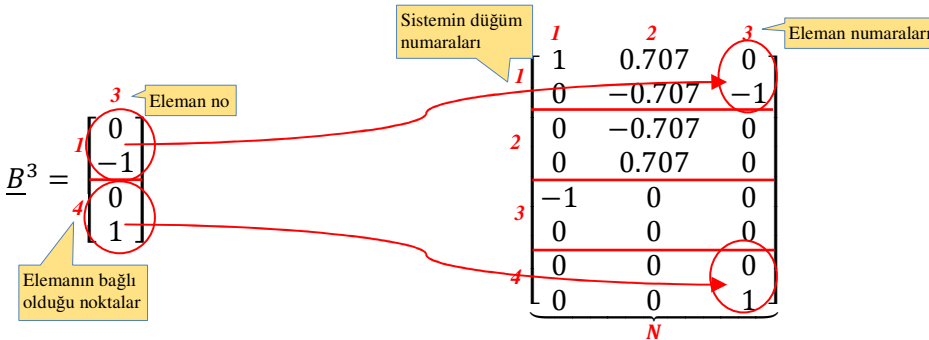
1. elemanın  $B^1$  genel denge matrisi 3. adımdaki tablodan  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri alınarak 23.2 ye göre kurulur. Tabloya göre 1. eleman 3 ve 1 düğümlerine bağlıdır. 23.2 de  $i$  ve  $j$  düğüm noları yerine 3 ve 1, i. eleman no yerine 1 yazılır.  $B^1$  in 3-1 alt matrisi  $N$  nin 3-1 alt matrisine, 1-1 alt matrisi  $N$  nin 1-1 alt matrisine kopyalanır.



2. elemanın  $B^2$  genel denge matrisi 3. adımdaki tablodan  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri alınarak 23.2 ye göre kurulur. Tabloya göre 2. eleman 2 ve 1 düğümlerine bağlıdır. 23.2 de  $i$  ve  $j$  düğüm noları yerine 2 ve 1, i. eleman no yerine 2 yazılır.  $B^2$  in 2-2 alt matrisi  $N$  nin 2-2 alt matrisine, 1-2 alt matrisi  $N$  nin 1-2 alt matrisine kopyalanır.



3. elemanın  $B^3$  genel denge matrisi 3. adımdaki tablodan  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri alınarak 23.2 ye göre kurulur. Tabloya göre 3. eleman 1 ve 4 düğümlerine bağlıdır. 23.2 de  $i$  ve  $j$  düğüm noları yerine 1 ve 4, i. eleman no yerine 3 yazılır.  $B^3$  ün 1-3 alt matrisi  $N$  nin 1-3 alt matrisine, 4-3 alt matrisi  $N$  nin 4-3 alt matrisine kopyalanır.



### 23. Sistem denge denklemlerinin direkt kurulması

**6.Adım:** 5. adım sonrası tüm elemanların genel denge matrisleri sistem denge matrisine taşınmıştır. Oluşan  $\underline{N}$  matrisi, sınır koşulları işlenmemiş olduğundan rijit yer değiştiren sistemin denge matrisidir. Sınır koşullarının, yani reaksiyonların da dikkate alınarak mesnetlenmiş sistemin denge matrisinin oluşturulması gerekir.

Her reaksiyon kuvveti bir bilinmeyen olduğu için, her reaksiyon için  $\underline{N}$  matrisine bir kolon eklenir: Şekil 23.2 deki reaksiyonlar dikkate alınarak genişletilmiş  $\underline{N}$ :

Elemanların bilinmeyenleri			Reaksiyon bilinmeyenleri						
	1	2	3	$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{41}$	$R_{42}$
1	1	0.707	0	0	0	0	0	0	0
	0	-0.707	-1	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.707	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.707	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Sistemin düğüm numaraları

Reaksiyon bilinmeyenleri için genişletilmiş denge matrisi

$\underline{N}$

Reaksiyonların bulunduğu düğüm no ve etki ettiği yön numarası dikkate alınarak ilgili düğüm no ve satıra 1 yazılır. Örneğin  $R_{21}$  reaksiyonu için 2 nolu düğümün 1. satırına 1;  $R_{22}$  reaksiyonu için 2 nolu düğümün 2. satırına 1 yazılır. Bu; o reaksiyonun o noktada ve o yönde denge denkleminde bilinmeyen olarak eklendiği anlamına gelir.

Elemanların bilinmeyenleri			Reaksiyon bilinmeyenleri						
	1	2	3	$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{41}$	$R_{42}$
1	1	0.707	0	0	0	0	0	0	0
	0	-0.707	-1	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.707	0	1	0	0	0	0	0
	0	0.707	0	0	1	0	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Sistemin düğüm numaraları

Sınır koşulları işlenmiş denge matrisi

$\underline{N}$

**7.Adım:** Şekil 23.2 deki verilmiş dış yükler dikkate alınarak  $\underline{P}$  vektörü kurulur. 23.1 e göre sistemin denge denklemleri aşağıdaki gibi olur.  $n=8$ ,  $m=9$ ,  $r=9-8=1$

Elemanların bilinmeyenleri			Reaksiyon bilinmeyenleri						Sistemin yük vektörü		
	1	2	3	$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{41}$	$R_{42}$	$F_1$	$F_2$
1	1	0.707	0	0	0	0	0	0	0	0	-179.12
	0	-0.707	-1	0	0	0	0	0	0	0	-652.14
2	0	-0.707	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.707	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Sistemin düğüm numaraları

Sistemin bilinmeyenleri

$\underline{N} \underline{F} = \underline{P}$

1 noktasındaki yükler

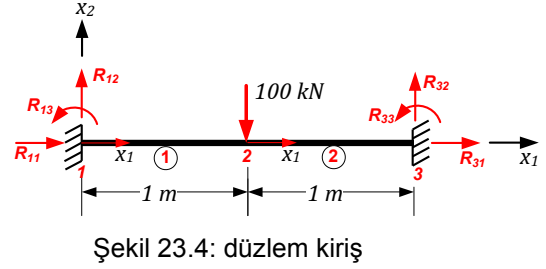
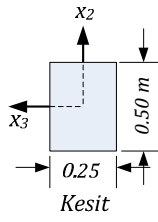
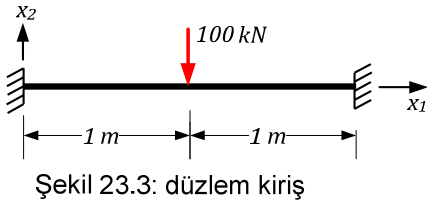
2 noktasındaki yükler

3 noktasındaki yükler

4 noktasındaki yükler

### 23. Sistem denge denklemlerinin direkt kurulması

**Örnek 23.2:** Şekil 23.3 de görülen kirişin denge denklemleri kurulacaktır. Sistem 2 elemanla modellenmiştir. Numaralandırma şekil 23.4 deki gibidir. Genel ve yerel eksenler paraleldir, transformasyon matrisi birim matris olur.



Düzlem çerçeve elemanın yerel denge matrisi 22.17 den(transformasyon olmadığından yerel dengeyi kullanıyoruz):

$$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad \text{Yerel denge} \quad (23.3)$$

Yerel denge matrisi

Boş sistem denge matrisi:

		Eleman numaraları						Reaksiyon bilinmeyenleri							
		1		2											
						$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$				
Sistemin düğüm numaraları	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		$\underline{N}$													

- Her noktada 3 denklem olduğundan her nokta için üç boş satır hazırlandı
- Her elemanın 3 bilinmeyen olduğundan her eleman için üç boş kolon hazırlandı.
- Her reaksiyon bir bilinmeyen olduğundan her reaksiyon için bir boş kolon hazırlandı

Elemanların denge matrislerinin 23.3 e göre kurulması,  $\underline{N}$  matrisine kopyalanması

		Eleman numaraları						Reaksiyon bilinmeyenleri							
		1		2											
						$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$				
1. elemanın yerel denge matrisi	1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
	2	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
	3	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
2. elemanın yerel denge matrisi	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		
	2	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0		
	3	0	0	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0		
		$\underline{N}$													

### 23. Sistem denge denklemlerinin direkt kurulması

Şekil 23.4 deki verilmiş dış yük dikkate alınarak  $\underline{P}$  vektörü kurulur. 23.1 e göre sistemin denge denklemleri aşağıdaki gibi olur.  $n=9$ ,  $m=12$ ,  $r=12-9=3$

$$\underline{N} \underline{F} = \underline{P} \quad (23.4)$$

Elemanların bilinmeyenleri						Reaksiyon bilinmeyenleri						Sistemin yük vektörü		
1	2	3	4	5	6	$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

$\underline{N}$

$\underline{F}$

$\underline{P}$

Sistemin yük vektörü

1 noktasındaki yükler

2 noktasındaki yükler

3 noktasındaki yükler

Sistemin bilinmeyenleri

Sistemin düğüm numaraları