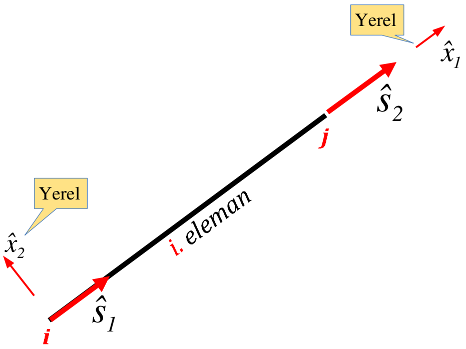
22. Eleman tipleri ve matrisleri

Kuvvet metodunda kullanılabilecek eleman tipleri sınırlıdır. Przeminiecki'[1] ana kaynak alınmıştır. Çubuk(düzlem/uzay kafes, çerçeve) ve yüzeysel elemanların (levha ve plak) denge, esneklik, gerilme matrislerine yer verilecektir. Denge matrisleri hem yerel hem de genel koordinatlarda verilecek, esneklik matrislerinin teorik temeline inilmeyecektir.

22.1 Düzlem kafes eleman matrisleri

Yerel denge matrisi:

Şekil 22.1 de bir düzlem kafes sistemin i. elemanı görülmektedir. $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ yerel koordinatlar ve $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ yerel kuvvetleridir. Bu iki kuvvet birbirinden bağımsız değildir, biri diğeri cinsinden ifade edilebilir. Eleman dengede olmak zorunda olduğundan $\sum \hat{x}_1 = 0$ olmalıdır, $\hat{S}_1 + \hat{S}_2$ =0. Bunlardan biri, örneğin $\hat{S}_2$, bağımsız bilinmeyen olarak seçilirse $\hat{S}_1 = -\hat{S}_2$ olur. O halde elemanın tüm kuvvetlerini bilinmeyen olarak almak gerekmez. Kuvvet metodunda bağımsız değişkenler F harfi ile gösterilir. Bu elemanın bir bağımsız kuvveti olduğundan j ucundaki $\hat{S}_2$ yi bağımsız kuvvet olarak seçelim(şekil 22.2): $\hat{S}_2 = F_1$, $\hat{S}_1 = -F_1$ olur. Matris notasyonunda



Şekil 22.1: düzlem kafes elemanın yerel uç kuvvetleri

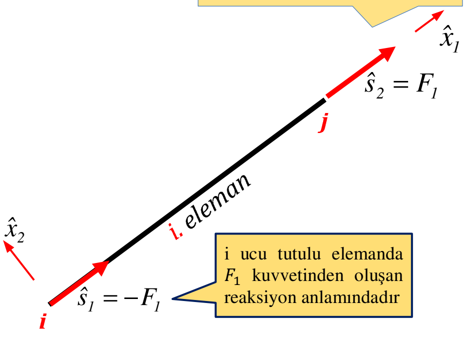
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{S}_1\\ \hat{S}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{S}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \quad (22.1)$$

Yerel denge

$$\underline{\hat{S}} = \underline{\hat{B}}\ \underline{F} \quad (22.1a)$$

22.1 veya 22.1a elemanın yerel denge koşulu(denge denklemleri), F_1 elemanın bağımsız kuvveti(elemanın bilinmeyeni), $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ ise F_1 e bağımlı yerel uç kuvvetleridir. $\underline{\hat{B}}$ ye elemanın yerel denge matrisi denir.

j ucundaki kuvvet elemanın bağımsız kuvvetleri olarak seçildi



i ucu tutulu elemanda F_1 kuvvetinden oluşan reaksiyon anlamındadır

Şekil 22.2: düzlem kafes elemanın bağımsız ve bağımlı yerel uç kuvvetleri

Transformasyon ve genel denge matrisi:

Düzlem kafes elemanın transformasyon matrisi 4.1 de verilmişti:

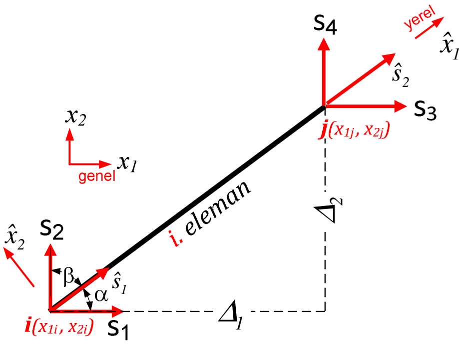
$$\underline{T} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & \Delta_2/L & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L\end{bmatrix}}_{\underline{T}} \quad (22.3)$$

Şekil 22.3 de elemanın yerel ve genel uç kuvvetleri gösterilmiştir. S_1, S_2,S_3, S_4 kuvvetleri $\hat{S}_1$ ve $\hat{S}_2$ nin genel eksenler yönündeki bileşenleri dir. 4.2 ye göre,

$$\underbrace{\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & 0\\ \Delta_2/L & 0\\ 0 & \Delta_1/L\\ 0 & \Delta_2/L\end{bmatrix}}_{\underline{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{S}_1\\ \hat{S}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{S}}}$$

22.1 den $\underline{\hat{S}}$ yerine yazılırsa

$$\underbrace{\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & 0\\ \Delta_2/L & 0\\ 0 & \Delta_1/L\\ 0 & \Delta_2/L\end{bmatrix}}_{\underline{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}}$$



Şekil 22.3: düzlem kafes elemanın genel ve yerel uç kuvvetleri

$$\begin{array}{c}i\\ \\ j\\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ \hline S_3\\ S_4\end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-c_1\\ -c_2\\ \hline c_1\\ c_2\end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \quad (22.4)$$

genel denge

$i(x_{1i}, x_{2i})$ ve $j(x_{1j}, x_{2j})$ genel koordinatları geometriden bilinir.
$\Delta_1 = x_{1j} - x_{1i}$, $\Delta_2 = x_{2j} - x_{2i}$
$L = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$, $c_1 = \frac{\Delta_1}{L}$, $c_2 = \frac{\Delta_2}{L}$

$$\underline{S} = \underline{B}\ \underline{F} \quad (22.4a)$$

---

[1] Przemieniecki, J., S, Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill, 1968.

22.4 veya 22.4a elemanın genel denge koşulu(denge denklemleri), $\underline{F}$ elemanın bilinmeyeni(elemanın bağımsız kuvveti), $\underline{S}$ bağımlı yerel uç kuvvetleridir. $\underline{B}$ ye elemanın genel denge matrisi denir.

Esneklik matrisi:

Elemanın esnekli bağıntısı 20.5 de çıkarılmıştı(basitleştirmek için i indisi kullanılmayacaktır):

$$f = \frac{L}{EA} \tag{22.5}$$

$$\underline{f} = \left[\frac{L}{EA}\right] \tag{22.5a}$$

$\underline{f}$: Esneklik matrisi
L: elemanın boyu
E: Elastisite modülü
A: Kesit alanı

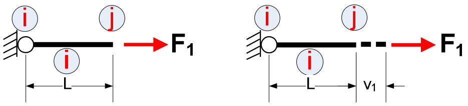
Göreceli yer değiştirme:

i ucu tutulu elemanda F_1 bağımsız kuvveti j ucunda v_1 yer değiştirmesine(elemanın boyca değişimi) neden olur. $v_1,\ f,\ F_1$ arasındaki ilişki

$$\underbrace{[v_1]}_{\underline{v}} = \underbrace{\left[\frac{L}{EA}\right]}_{\underline{f}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \tag{22.6}$$

$$\underline{v} = \underline{f}\,\underline{F} \tag{22.6a}$$

Göreceli yer değiştirmeler



Kafes elemanın göreceli yer değiştirmesi

Gerilme(mukavemetten):

$$\underbrace{[\sigma_{11}]}_{\underline{\sigma}} = \underbrace{\left[\frac{1}{A}\right]}_{\underline{H}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \tag{22.7}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{H}\,\underline{F} \tag{22.7a}$$

22.2 Uzay kafes eleman matrisleri

Yerel denge matrisi:

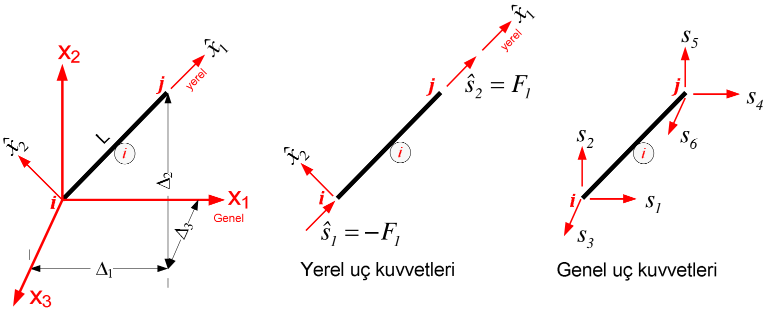
Şekil 22.4 de bir uzay kafes sistemin i. elemanı görülmektedir. $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ yerel koordinatlar $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ yerel kuvvetleridir. Bu elemanın bir bağımsız kuvveti olduğundan j ucundaki $\hat{S}_2$ bağımsız kuvvet olarak seçilmiştir. F_1 elemanın bilinmeyenidir(bağımsız kuvvet) $\hat{S}_2 = F_1$, $\hat{S}_1 = -F_1$ olur. Matris notasyonunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{S}_1\\ \hat{S}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{S}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \tag{22.8}$$

Yerel denge

$$\underline{\hat{S}} = \underline{\hat{B}}\,\underline{F} \tag{22.8a}$$

Uzay ve düzlem kafes elemanın yerel denge denklemleri aynıdır.



Şekil 22.4: Uzay kafes eleman

Transformasyon ve genel denge matrisi:

Uzay kafes elemanın transformasyon matrisi 4.4 de verilmişti:

$$\underline{T} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & \Delta_2/L & \Delta_3/L & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L & \Delta_3/L\end{bmatrix}}_{\underline{T}} \tag{22.9}$$

Şekil 22.4 de elemanın yerel ve genel üç kuvvetleri gösterilmiştir. S_1, S_2, S_3 genel kuvvetleri $\hat{S}_1$ yerel kuvvetinin genel eksenler üzerindeki izdüşümüdür. 4.5 ye göre,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1/L & 0 \\ \Delta_2/L & 0 \\ \Delta_3/L & 0 \\ 0 & \Delta_1/L \\ 0 & \Delta_2/L \\ 0 & \Delta_3/L \end{bmatrix}}_{\underline{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{S}}},$$

22.8 yerine yazılırsa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1/L & 0 \\ \Delta_2/L & 0 \\ \Delta_3/L & 0 \\ 0 & \Delta_1/L \\ 0 & \Delta_2/L \\ 0 & \Delta_3/L \end{bmatrix}}_{\underline{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}}$$

Genel denge

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \hline s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ -c_3 \\ \hline c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \qquad (22.10)$$

$i(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ ve $j(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j})$ genel koordinatları geometriden bilinir.

$\Delta_1 = x_{1j} - x_{1i}\ ,\quad \Delta_2 = x_{2j} - x_{2i}\ ,\ \ \Delta_3 = x_{3j} - x_{3j}$

$L = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}\ ,\qquad c_1 = \frac{\Delta_1}{L},\qquad c_2 = \frac{\Delta_2}{L},\qquad c_3 = \frac{\Delta_3}{L},$

$$\underline{S} = \underline{B}\ \underline{F} \qquad (22.10a)$$

Esneklik matrisi:

$$f = \frac{L}{EA} \qquad (22.11)$$

$$\underline{f} = \left[\frac{L}{EA}\right] \qquad (22.11a)$$

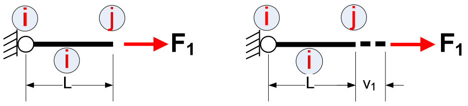
$\underline{f}$: Esneklik matrisi
L: elemanın boyu
E: Elastisite modülü
A: Kesit alanı

Uzay ve düzlem kafes elemanın esneklik matrisi aynıdır.

Göreceli yer değiştirme:

i ucu tutulu elemanda F_1 bağımsız kuvveti v_1 yer değiştirmesine(elemanın boyca değişimi) neden olur. $v_1,\ f,\ F_1$ arasındaki ilişki

$$\underbrace{[v_1]}_{\underline{v}} = \underbrace{\left[\frac{L}{EA}\right]}_{\underline{f}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \qquad (22.12)$$



Kafes elemanın göreceli yer değiştirmesi

$$\underline{v} = \ \underline{f}\ \underline{F} \qquad (22.12a)$$

Göreceli yer değiştirmeler

Gerilme:

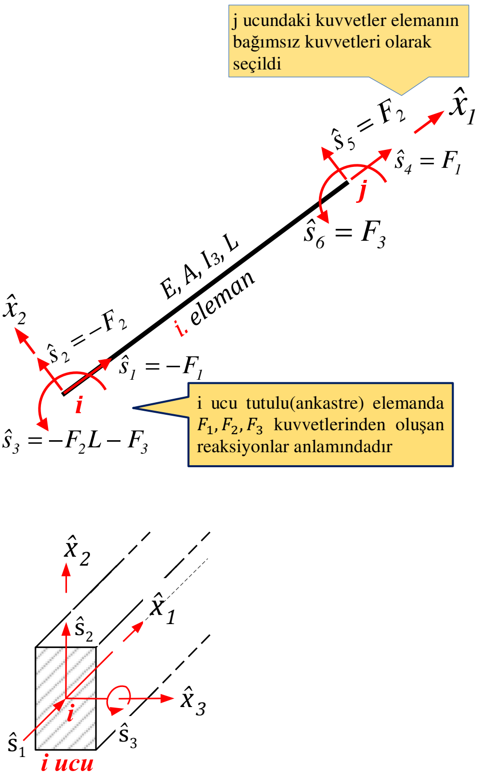
$$\underbrace{[\sigma_{11}]}_{\underline{\sigma}} = \underbrace{\left[\frac{1}{A}\right]}_{\underline{H}} \underbrace{[F_1]}_{\underline{F}} \qquad (22.13)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{H}\ \underline{F} \qquad (22.13a)$$

22.3 Düzlem çerçeve eleman matrisleri

Düzlem çerçeve elemanın yerel koordinatlardaki uç kuvvetleri şekil 22.5 de gösterilmiştir. $\hat{x}_3$ lokal ekseni kâğıt(ekran) düzlemine dik ve okuyucuya doğru yönlenmiştir. Her uçta 3 adet olmak üzere toplam 6 yerel kuvvet vardır.

$$\hat{s}^i = \begin{array}{c} i \\ \\ \\ j \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hline \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}} \begin{array}{l} \text{i noktasında } \hat{x}_1 \text{ yönünde eksenel kuvvet} \\ \text{i noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde kesme kuvveti} \\ \text{i noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında moment} \\ \text{j noktasında } \hat{x}_1 \text{ yönünde eksenel kuvvet} \\ \text{j noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde kesme kuvveti} \\ \text{j noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında moment} \end{array} \qquad (22.14)$$



j ucundaki kuvvetler elemanın bağımsız kuvvetleri olarak seçildi

i ucu tutulu(ankastre) elemanda F_1, F_2, F_3 kuvvetlerinden oluşan reaksiyonlar anlamındadır

Şekil 22.5: Düzlem çerçeve eleman

Yerel denge matrisi:

Bu altı kuvvet $\sum \hat{x}_1 = 0,\ \sum \hat{x}_2 = 0,\ \sum M_{\hat{x}_3} = 0$ denge koşullarını sağlamalıdır. j ucundakiler

$$\hat{s}_4 = F_1,\ \hat{s}_5 = F_2,\ \hat{s}_6 = F_3 \qquad (22.15)$$

elemanın bilinmeyen kuvvetleri(bağımsız kuvvetler) olarak seçilir ve elemanın dengesi yazılırsa:

$$\begin{aligned} &\sum \hat{x}_1 = 0:\ \hat{s}_1 + F_1 = 0 \rightarrow \hat{s}_1 = -F_1 && \text{$\hat{x}_1$ yönü denge} \\ &\sum \hat{x}_2 = 0:\ \hat{s}_2 + F_2 = 0 \rightarrow \hat{s}_2 = -F_2 && \text{$\hat{x}_2$ yönü denge} \qquad (22.16) \\ &\sum M_{\hat{x}_3} = 0:\ \hat{s}_3 + F_2\, L + F_3 = 0 \rightarrow \hat{s}_3 = -F_2\, L - F_3 && \text{$\hat{x}_3$ etrafında moment dengesi} \end{aligned}$$

olur. 22.15 ve 22.16 bağıntıları matris olarak

$$\begin{array}{c} i \\ \\ \\ j \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hline \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{S}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \qquad (22.17)$$

Yerel denge

Yerel denge matrisi

$$\underline{\hat{S}} = \underline{\hat{B}}\ \underline{F} \qquad (22.17a)$$

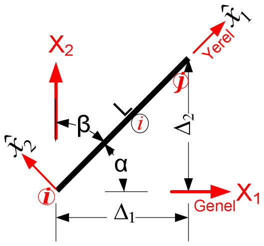
yazılabilir. $\underline{\hat{S}}$ yerel kuvvetler, $\underline{\hat{B}}$ yerel denge matrisi ve $\underline{F}$ bağımsız bilinmeyenlerdir.

Transformasyon ve genel denge matrisi:

Düzlem çerçeve elemanın transformasyon matrisi 9.4 de verilmişti:

$L = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}\ ,\ c_1 = \frac{\Delta_1}{L},\ c_2 = \frac{\Delta_2}{L}$ olmak üzere

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (22.18)$$



$$\underline{s} = \underline{T}^T \underline{\hat{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix}}_{\underline{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}} \qquad (22.18a)$$

22.17 yerine yazılırsa

$$\underbrace{\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\\s_5\\s_6\end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix}c_1 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_1 & -c_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -L & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{\underline{F}}$$

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\ \hline s_4\\s_5\\s_6\end{bmatrix}}_{\underline{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-c_1 & c_2 & 0\\ -c_2 & -c_1 & 0\\ 0 & -L & -1\\ \hline c_1 & -c_2 & 0\\ c_2 & c_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{22.19}$$

Genel denge

Genel denge matrisi

$$\underline{S} = \underline{B}\;\underline{F} \tag{22.19a}$$

Göreceli yer değiştirmeler ve esneklik matrisi:

i ucu tutulu(ankastre) elemanda j ucundaki kuvvetlerden oluşan yer değiştirmeler şekil 22.6 da gösterilmiştir. i ucu tutulu olduğundan $\hat{u}_1 = 0, \hat{u}_2 = 0, \hat{u}_3 = 0$ fakat $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$ dır. 9.3 e göre, yüksüz elemanda yer değiştirmeler ve kuvvetler arasında

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\\hat{s}_2\\\hat{s}_3\\ \hline F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}} = \begin{array}{c|c} & i & j \\ i & \begin{matrix}\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L}\end{matrix} & \begin{matrix}-\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2}\\ 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L}\end{matrix} \\ \hline j & \begin{matrix}-\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L}\end{matrix} & \begin{matrix}\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2}\\ 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L}\end{matrix} \end{array}_{\underline{\hat{k}}} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\\hat{u}_2\\\hat{u}_3\\ \hline v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}}$$

Yerel kuvvetler

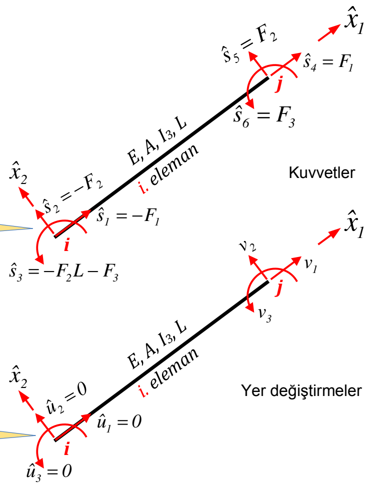
Yerel rijitlik matrisi

$\underline{\hat{k}}_{jj}$

Yerel yer değiştirmeler

tutulu(ankastre) uç

tutulu(ankastre) uç



Şekil 22.6: i. Ucu tutulu(ankastre) düzlem çerçeve eleman

bağıntısı vardır. $\hat{u}_1 = 0, \hat{u}_2 = 0, \hat{u}_3 = 0$ olduğu dikkate alınarak ilk üç kolon ve satır silinirse

$$\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{F}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2}\\ 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L}\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}_{jj}} \underbrace{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}}_{\underline{v}}$$

olur. Bu bağıntıdan $\hat{k}_{jj}$ nin tersi alınarak $\underline{v}$ hesaplanabilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{L}{EA} & 0 & 0\\ 0 & \frac{L^3}{3EI_3} & \frac{L^2}{2EI_3}\\ 0 & \frac{L^2}{2EI_3} & \frac{L}{EI_3}\end{bmatrix}}_{\underline{f}} \underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{F}}} \tag{22.20}$$

$\underline{f}$: Esneklik matrisi
L: elemanın boyu
E: Elastisite modülü
A: Kesit alanı
I3: $\hat{x}_3$ ekseni atalet momenti

Göreceli yer değiştirmeler

Esneklik matrisi

Bağımsız kuvvetler

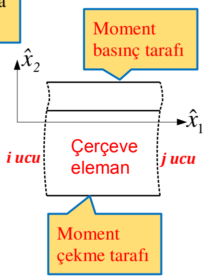
$$\underline{v} = \underline{f}\;\underline{F} \tag{22.20a}$$

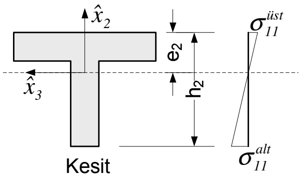
Göreceli yer değiştirmeler

Gerilmeler(mukavemetten):

A: Kesit alanı
A₂: $\hat{x}_2$ doğrultusunda kesme alanı

$$\begin{array}{c}\\ i\\ \\ \\ j\\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_{11}^{üst}\\ \sigma_{11}^{alt}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{11}^{üst}\\ \sigma_{11}^{alt}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}}=\begin{array}{c}\\ i\\ \\ \\ j\\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{A} & 0 & \frac{e_2}{I_3} & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{A} & 0 & -\frac{h_2-e_2}{I_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{e_2}{I_3}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 & -\frac{h_2-e_2}{I_3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_2} & 0\end{bmatrix}}_{\underline{H}}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{S}_1\\ \hat{S}_2\\ \hat{S}_3\\ \hat{S}_4\\ \hat{S}_5\\ \hat{S}_6\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{S}}}\qquad(22.21)$$

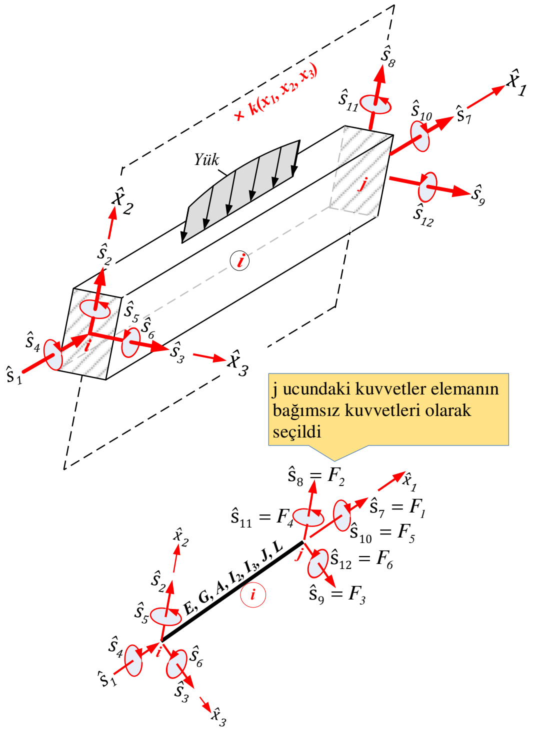




$$\underline{\sigma}=\underline{H}\ \underline{F}\qquad(22.21a)$$

22.4 Uzay çerçeve eleman matrisleri

Şekil 22.7 de elemanın yerel eksenleri ve yerel kuvvetleri gösterilmiştir. Yerel eksen takımının orijini i noktasındadır. Elemanın uzayda konumunun belirlenmesi, transformasyon matrisinin kurulabilmesi için i ve j düğümlerinin ve bir yardımcı k noktasının genel koordinatlarının bilinmesi gerekir. $\hat{x}_1$ yerel ekseni daima çubuk eksenidir. $\hat{x}_2$ yerel ekseni daima i-j-k noktalarının tanımladığı düzlem içindedir, yani, k noktası $\hat{x}_2$ ekseninin yönünü belirler. k noktası yardımıyla elemanın ekseni etrafında dönük olarak tanımlanabilmesi mümkün olur. k noktası, eleman ekseni üzerinde olmamak kaydıyla, sistemin herhangi bir noktası veya sistemde olmayan herhangi bir özel nokta olabilir. Özel bir nokta olması durumunda k noktasında serbestlik derecesi yoktur. k noktasının $\hat{x}_2$ yerel ekseninin yönünü belirlemek dışında başka bir işlevi yoktur.



j ucundaki kuvvetler elemanın bağımsız kuvvetleri olarak seçildi

Şekil 22.7: Çerçeve eleman

$$\underline{\hat{s}}=\begin{array}{c|c|l} & \hat{s}_1 & i \text{ noktasında } \hat{x}_1 \text{ yönünde eksenel kuvvet}\\ & \hat{s}_2 & i \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde kesme kuvveti}\\ i & \hat{s}_3 & i \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ yönünde kesme kuvveti}\\ & \hat{s}_4 & i \text{ noktasında } \hat{x}_1 \text{ etrafında burulma momenti}\\ & \hat{s}_5 & i \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ etrafında eğilme momenti}\\ & \hat{s}_6 & i \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında eğilme momenti}\\ \hline & \hat{s}_7 & j \text{ noktasında } \hat{x}_1 \text{ yönünde eksenel kuvvet}\\ & \hat{s}_8 & j \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde kesme kuvveti}\\ j & \hat{s}_9 & j \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ yönünde kesme kuvveti}\\ & s_{10} & j \text{ noktasında } \hat{x}_1 \text{ etrafında burulma momenti}\\ & s_{11} & j \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ etrafında eğilme momenti}\\ & s_{12} & j \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında eğilme momenti}\end{array}\qquad(22.22)$$

Yerel denge matrisi:

Bu 12 kuvvet $\sum\hat{x}_1=0,\ \sum\hat{x}_2=0,\ \sum\hat{x}_3=0,\ \sum M_{\hat{x}_1}=0,\ \sum M_{\hat{x}_2}=0,\ \sum M_{\hat{x}_3}=0$ denge koşullarını sağlamalıdır. j ucundakiler bilinmeyenler olarak seçilir ve denge koşulları yazılırsa

$$\begin{array}{c}\\ \\ i\\ \\ \\ \\ \\ \\ j\\ \\ \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\\ \hat{s}_3\\ \hat{s}_4\\ \hat{s}_5\\ \hat{s}_6\\ \hat{s}_7\\ \hat{s}_8\\ \hat{s}_9\\ s_{10}\\ s_{11}\\ s_{12}\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & L & 0 & -1 & 0\\ 0 & -L & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}}\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ F_6\end{bmatrix}}_{\underline{F}}\qquad(22.23)$$

Yerel denge

Yerel denge matrisi

$$\underline{\hat{S}}=\underline{\hat{B}}\ \underline{F}\qquad(22.23a)$$

Transformasyon matrisi:

11.1-11.3 bağıntıları ile

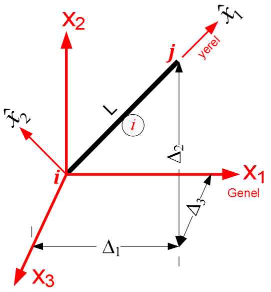
$i(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}),\ j(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}),\ k(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}\ )$ *i, j, k* noktalarının koordinatları(geometriden biliniyor)

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta_1 = x_{1j} - x_{1i},\ \ \Delta_2 = x_{2j} - x_{2i},\ \ \Delta_3 = x_{3j} - x_{3i} \\
\beta_1 = x_{1k} - x_{1i},\ \ \beta_2 = x_{2k} - x_{2i},\ \ \beta_3 = x_{3k} - x_{3i} \\
\gamma_1 = \Delta_2\beta_3 - \Delta_3\beta_2,\ \ \gamma_2 = \Delta_3\beta_1 - \Delta_1\beta_3,\ \ \gamma_3 = \Delta_1\beta_2 - \Delta_2\beta_1 \\
\delta_1 = \gamma_2\Delta_3 - \gamma_3\Delta_2,\ \ \delta_2 = \gamma_3\Delta_1 - \gamma_1\Delta_3,\ \ \delta_3 = \gamma_1\Delta_2 - \gamma_2\Delta_1 \\
L = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2},\ \ L_2 = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2},\ \ L_3 = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \\
t_{11} = \frac{\Delta_1}{L}, t_{12} = \frac{\Delta_2}{L}, t_{13} = \frac{\Delta_3}{L} \\
t_{21} = \frac{\delta_1}{L_2}, t_{22} = \frac{\delta_2}{L_2}, t_{33} = \frac{\delta_3}{L_2} \\
t_{31} = \frac{\gamma_1}{L_3}, t_{32} = \frac{\gamma_2}{L_3}, t_{33} = \frac{\gamma_3}{L_3}
\end{array}\right\} \underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \tag{22.24}$$

i, j, k noktalarının koordinatlarından hesaplanan $\underline{t}$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{t} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{t} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{t} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{t} \end{bmatrix}$$

Transformasyon matrisi



Genel denge matrisi:

22.23 ve 22.24 bağıntılarıyla:

$$\underline{s} = \underline{T}^T \underline{\hat{s}} = \begin{bmatrix} \underline{t} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{t} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{t} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \\ \hline \hat{s}_7 \\ \hat{s}_8 \\ \hat{s}_9 \\ s_{10} \\ s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{t} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{t} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{t} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{t} \end{bmatrix}}_{\underline{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}}_{\underline{F}}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ \hline s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \\ s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -t_{11} & -t_{21} & t_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -t_{12} & -t_{22} & -t_{32} & 0 & 0 & 0 \\ -t_{13} & -t_{23} & -t_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_{31}L & t_{21}L & -t_{11} & -t_{21} & -t_{31} \\ 0 & -t_{32}L & t_{22}L & -t_{12} & -t_{22} & -t_{32} \\ 0 & -t_{33}L & t_{23}L & -t_{13} & -t_{23} & -t_{33} \\ \hline t_{11} & t_{21} & t_{31} & 0 & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & 0 & 0 & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ 0 & 0 & 0 & t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & 0 & t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{22.25}$$

Genel denge

Genel denge matrisi

$$\underline{S} = \underline{B}\ \underline{F} \tag{22.25a}$$

Göreceli yer değiştirmeler ve esneklik matrisi:

Düzlem çerçevedeki yol izlenerek çıkartılır.

$$\underline{v} = \underline{f}\,\underline{F} \tag{22.26}$$

Göreceli yer değiştirmeler

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI_3} \\ 0 & 0 & \frac{L^3}{3EI_2} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI_2} & 0 & \frac{L}{EI_2} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI_3} \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{22.26a}$$

$\underline{f}$: Esneklik matrisi
L: elemanın boyu
E: Elastisite modülü
G: Kayma modülü
A: Kesit alanı
I_2: $\hat{x}_2$ ekseni atalet momenti
I_3: $\hat{x}_3$ ekseni atalet momenti
J: Burulma atalet momenti(=I_1)

Göreceli yer değiştirmeler

Esneklik matrisi

Bağımsız kuvvetler

Gerilmeler(mukavemetten):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{üst} \\ \sigma_{11}^{alt} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_b \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{e_3}{I_2} & \frac{e_2}{I_3} \\ \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{h_3-e_3}{I_2} & \frac{h_2-e_2}{I_3} \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{W_b} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{22.27}$$

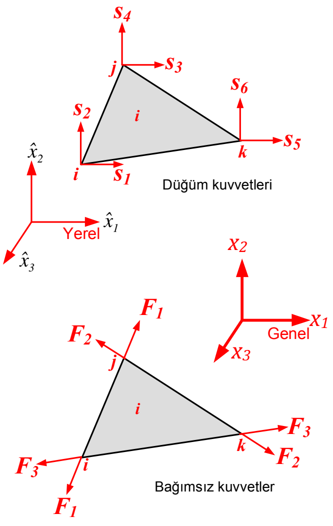
A: Kesit alanı
A_2: $\hat{x}_2$ doğrultusunda kesme alanı
A_3: $\hat{x}_3$ doğrultusunda kesme alanı
σ_b: Burulmadan oluşan gerilme
W_b: Burulma mukavemet momenti

ÇİZİM konacak!

$$\underline{\sigma} = \underline{H}\,\underline{F} \tag{22.27a}$$

22.5 Üçgen levha eleman matrisleri- Düzlem gerilme

Elemanların sadece düğümlerde birbirine bağlı olduğu, düğümler arasındaki ortak kenarlarda bağ olmadığı varsayılmaktadır. x_1, x_2 düzlemindeki *i*. eleman şekil 22.8 de gösterilmiştir. Düğüm numaraları, *i-j-k*, saat yönündedir. Genel ve yerel koordinat sistemi birbirine paraleldir. Transformasyon matrisi birim matris olduğundan, genel ve yerel denge denklemleri aynı olacaktır. E elastisite modülü, υ: Poisson oranı, t: elemanın kalınlığı, (x_{1i}, x_{2i}): *i* noktasının koordinatları, (x_{1j}, x_{2j}): *j* noktasının koordinatları, (x_{1k}, x_{2k}): *k* noktasının koordinatları biliniyor varsayılmaktadır.



Şekil 22.8: Üçgen elemanın üç kuvvetleri

Kendi içinde dengede olan eleman bilinmeyenleri(bağımsız kuvvetler) F_1, F_2, F_3 şekilde görüldüğü gibi seçilmiştir. Bunlar x_1, x_2 eksenleri yönündeki $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ kuvvetleri ile dengededir.

$$\underline{s} = \begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ k \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \hline s_3 \\ s_4 \\ \hline s_5 \\ s_6 \end{bmatrix}$$

i noktasındaki F_1, F_3 kuvvetlerinin x_1 yönündeki izdüşümleri toplamı
i noktasındaki F_1, F_3 kuvvetlerinin x_2 yönündeki izdüşümleri toplamı
j noktasındaki F_1 , F_2 kuvvetlerinin x_1 yönündeki izdüşümleri toplamı
j noktasındaki F_1, F_2 kuvvetlerinin x_2 yönündeki izdüşümleri toplamı
k noktasındaki F_2, F_3 kuvvetlerinin x_1 yönündeki izdüşümleri toplamı
k noktasındaki F_2, F_3 kuvvetlerinin x_2 yönündeki izdüşümleri toplamı

22. Eleman tipleri ve matrisleri

Yerel ve genel denge matrisi:

$$c_1 = x_{1j} - x_{1i}\,,\ c_2 = x_{2j} - x_{2i}\,,\ c_3 = x_{1k} - x_{1j}\,,\ c_4 = x_{2k} - x_{2j}\ ,\ c_5 = x_{1i} - x_{1k},\ c_6 = x_{2i} - x_{2k}$$

$$L_{ij} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\ ,\ \ L_{jk} = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}\ ,\ L_{ki} = \sqrt{c_5^2 + c_6^2} \tag{22.28}$$

$$m_{ij} = \frac{c_1}{L_{ij}}\ ,\ \ n_{ij} = \frac{c_2}{L_{ij}}\ ,\ m_{jk} = \frac{c_3}{L_{jk}}\ ,\ n_{jk} = \frac{c_4}{L_{jk}}\ ,\ m_{ki} = \frac{c_5}{L_{ki}}\ ,\ n_{ki} = \frac{c_6}{L_{ki}}$$

olmak üzere $\underline{s}$ ve $\underline{F}$ arasında denge bağıntısı

$$\begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ k \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix}}_{\underline{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_{ij} & 0 & m_{ki} \\ -n_{ij} & 0 & n_{ki} \\ \hline m_{ij} & -m_{jk} & 0 \\ n_{ij} & -n_{jk} & 0 \\ \hline 0 & m_{jk} & -m_{ki} \\ 0 & n_{jk} & -n_{ki} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{22.29}$$

Yerel ve genel denge

Yerel ve genel denge matrisi

$$\underline{S} = \underline{B}\ \underline{F} \tag{22.29a}$$

Göreceli yer değiştirmeler ve esneklik matrisi:

$$\underline{v} = \ \underline{f}\ \underline{F} \tag{22.30}$$

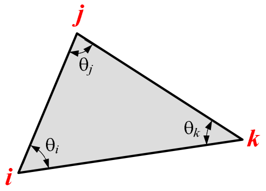
Göreceli yer değiştirmeler

$$u = (L_{ij} + L_{jk} + L_{ki})/2,\ \ z = 2\sqrt{u(u - L_{ij})(u - L_{jk})(u - L_{ki})}$$

$$\text{Sin}\,\theta_i = \frac{z}{L_{ij}L_{ki}}\,,\ \text{Sin}\,\theta_j = \frac{z}{L_{ij}L_{jk}}\,,\ \text{Sin}\,\theta_k = \frac{z}{L_{jk}L_{ki}}$$

$$\text{Cos}\,\theta_i = \frac{1}{2}\frac{L_{ij}^2+L_{ki}^2-L_{jk}^2}{L_{ij}L_{ki}}\,,\ \text{Cos}\,\theta_j = \frac{1}{2}\frac{L_{ij}^2+L_{jk}^2-L_{ki}^2}{L_{ij}L_{jk}}\,,\ \text{Cos}\,\theta_i = \frac{1}{2}\frac{L_{jk}^2+L_{ki}^2-L_{ij}^2}{L_{jk}L_{ki}}$$

$$\text{Cot}\,\theta_i = \frac{Cos\,\theta_i}{Sin\,\theta_i}\,,\ \text{Cot}\,\theta_j = \frac{Cos\,\theta_j}{Sin\,\theta_j}\,,\ \text{Cot}\,\theta_k = \frac{Cos\,\theta_k}{Sin\,\theta_k}$$



ve 22.28 bağıntıları ile esneklik matrisi

$$\underline{f} = \frac{2}{E\,t}\begin{bmatrix} \frac{Sin\,\theta_k}{Sin\,\theta_i\,Sin\,\theta_j} & Cos\,\theta_j\,Cot\,\theta_j - \nu\,Sin\,\theta_j & Cos\,\theta_i\,Cot\,\theta_i - \nu\,Sin\,\theta_i \\ Cos\,\theta_j\,Cot\,\theta_j - \nu\,Sin\,\theta_j & \frac{Sin\,\theta_i}{Sin\,\theta_j\,Sin\,\theta_k} & Cos\,\theta_k\,Cot\,\theta_k - \nu\,Sin\,\theta_k \\ Cos\,\theta_i\,Cot\,\theta_i - \nu\,Sin\,\theta_i & Cos\,\theta_k\,Cot\,\theta_k - \nu\,Sin\,\theta_k & \frac{Sin\,\theta_j}{Sin\,\theta_k\,Sin\,\theta_i} \end{bmatrix} \tag{22.30a}$$

Esneklik matrisi

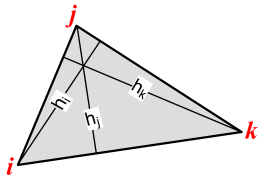
Gerilmeler:

$$A_{ijk} = c_3c_2 - c_1c_4$$

üçgenin alanının iki katı

$$h_i = \frac{A_{ijk}}{L_{jk}}\,,\ h_j = \frac{A_{ijk}}{L_{ki}}\,,\ h_k = \frac{A_{ijk}}{L_{ij}}$$

üçgenin yükseklikleri



ve 22.28 bağıntıları ile gerilmeler

Eleman içinde gerilmeler sabit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \frac{2}{t}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{m_{ij}^2}{h_k} & \frac{m_{jk}^2}{h_i} & \frac{m_{ki}^2}{h_j} \\ \frac{n_{ij}^2}{h_k} & \frac{n_{jk}^2}{h_i} & \frac{n_{ki}^2}{h_j} \\ \frac{m_{ij}n_{ij}}{h_k} & \frac{m_{jk}n_{jk}}{h_i} & \frac{m_{ki}n_{ki}}{h_j} \end{bmatrix}}_{\underline{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\underline{F}}$$

(22.30b)

Asal gerilmeler:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

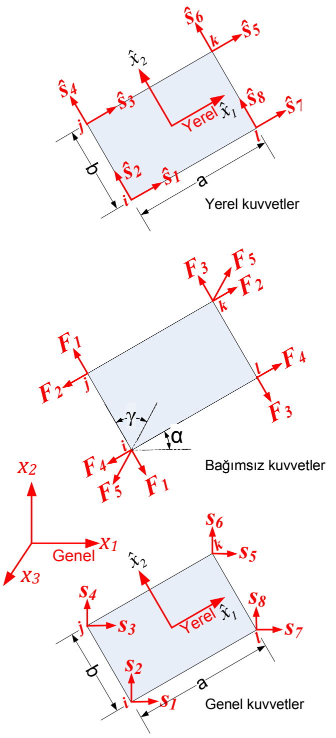
$$2\varphi = ArcTan\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{H}\ \underline{F} \tag{22.30c}$$

22.6 Dörtgen levha eleman matrisleri- Düzlem gerilme

Elemanların sadece düğümlerde birbirine bağlı olduğu, düğümler arasındaki ortak kenarlarda bağ olmadığı varsayılmaktadır. x_1, x_2 düzlemindeki *i.* eleman şekil 22.9 da gösterilmiştir. Düğüm numaraları, *i-j-k-l,* saat yönündedir. Genel ve yerel koordinat sistemi birbirine paraleldir. Transformasyon matrisi birim matris olduğundan, genel ve yerel denge denklemleri aynı olacaktır. E elastisite modülü, υ: Poisson oranı, t: elemanın kalınlığı, (x_{1i}, x_{2i}): i noktasının koordinatları, (x_{1j}, x_{2j}): j noktasının koordinatları, (x_{1k}, x_{2k}): k (x_{1l}, x_{2l}): l noktasının koordinatları biliniyor varsayılmaktadır.

Kendi içinde dengede olan eleman bilinmeyenleri(bağımsız kuvvetler) *F₁, F₂, F₃, F₄ ,F₅* şekilde görüldüğü gibi seçilmiştir. Bunlar $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ yerel eksenleri yönündeki $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, \hat{s}_4, \hat{s}_5, \hat{s}_6, \hat{s}_7, \hat{s}_8$ kuvvetleri ile dengededirler.



Şekil 22.9: Dörtgen levha uç kuvvetleri

$$\underline{\hat{s}} = \begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \\ \hat{s}_7 \\ \hat{s}_8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{i noktasındaki } F_1, F_4, F_5 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_1 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \\ \text{i noktasındaki } F_1, F_4, F_5 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_2 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \\ \text{j noktasındaki } F_1, F_2 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_1 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \\ \text{j noktasındaki } F_1, F_2 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_2 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \\ \text{k noktasındaki } F_2, F_3, F_5 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_1 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \\ \text{k noktasındaki } F_2, F_3, F_5 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_2 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \\ \text{l noktasındaki } F_3, F_4 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_1 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \\ \text{l noktasındaki } F_3, F_4 \text{ kuvvetlerinin } \hat{x}_2 \text{ yönündeki izdüşümleri toplamı} \end{array}$$

$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ kuvvetleri x_1, x_2 genel eksenleri yönündeki genel kuvvetlerdir.

Yerel ve genel denge matrisi:

Elemanın genel koordinatlarından hesaplanan

$$a = \sqrt{(x_{1l} - x_{1i})^2 + (x_{2l} - x_{2i})^2}\ ,\ b = \sqrt{(x_{1j} - x_{1i})^2 + (x_{2j} - x_{2i})^2}\ ,\ d = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \beta = \frac{b}{a}$$

$$Sin\ \alpha = \frac{x_{2l} - x_{2i}}{a},\ Cos\ \alpha = \frac{x_{1l} - x_{1i}}{a}\ ,\ Sin\ \gamma = \frac{a}{d},\ Cos\ \gamma = \frac{b}{d} \qquad (22.31)$$

$$c_s = Sin\ \gamma\ Cos\ \alpha - Cos\ \gamma\ Sin\ \alpha,\ \ c_c = Cos\ \gamma\ Cos\ \alpha + Sin\ \gamma\ Sin\ \alpha$$

sabitleri aşağıdaki matrislerde kullanılacaktır.

$$\begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \\ \hat{s}_6 \\ \hat{s}_7 \\ \hat{s}_8 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -Sin\ \gamma \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -Cos\ \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Sin\ \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Cos\ \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{B}}\ \text{Yerel denge matrisi}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}}_{\underline{F}}\ \text{Yerel denge} \qquad (22.31a)$$

$$\underline{\hat{s}} = \underline{\hat{B}}\ \underline{F} \qquad (22.31b)$$

$$\begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{bmatrix}}_{\underline{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Sin\ \alpha & 0 & 0 & -Cos\ \alpha & -c_s \\ -Cos\ \alpha & 0 & 0 & -Sin\ \alpha & -c_c \\ -Sin\ \alpha & -Cos\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ Cos\ \alpha & -Sin\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\ \alpha & -Sin\ \alpha & 0 & c_s \\ 0 & Sin\ \alpha & Cos\ \alpha & 0 & c_c \\ 0 & 0 & Sin\ \alpha & Cos\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -Cos\ \alpha & Sin\ \alpha & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}\ \text{Genel denge matrisi}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}}_{\underline{F}}\ \text{Genel denge}$$

(22.31c)

$$\underline{s} = \underline{B}\ \underline{F} \qquad (22.31d)$$

Göreceli yer değiştirmeler ve esneklik matrisi:

$$\underline{v} = \underline{f}\,\underline{F} \qquad (22.32)$$

Göreceli yer değiştirmeler

$$\underline{f} = \frac{1}{E\,t}\begin{bmatrix} 4\beta & -\upsilon & -2\beta & -\upsilon & \beta Cos\gamma - \upsilon Sin\gamma \\ -\upsilon & 4/\beta & -\upsilon & -2/\beta & \left(\frac{1}{\beta} - \upsilon\beta\right) Sin\gamma \\ -2\beta & -\upsilon & 4\beta & -\upsilon & \beta Cos\gamma - \upsilon Sin\gamma \\ -\upsilon & -2/\beta & -\upsilon & 4/\beta & \left(\frac{1}{\beta} - \upsilon\beta\right) Sin\gamma \\ \beta Cos\gamma - \upsilon Sin\gamma & \left(\frac{1}{\beta} - \upsilon\beta\right) Sin\gamma & \beta Cos\gamma - \upsilon Sin\gamma & \left(\frac{1}{\beta} - \upsilon\beta\right) Sin\gamma & \frac{1}{\beta} + \beta \end{bmatrix} \qquad (22.32a)$$

Esneklik matrisi

Gerilmeler:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underbrace{\frac{2}{b\,t}\begin{bmatrix} 0 & -1 + 3\frac{\hat{x}_2}{b} & 0 & 2 - 3\frac{\hat{x}_2}{b} & \frac{1}{2} Sin\gamma \\ \beta(2 - 3\frac{\hat{x}_1}{a}) & 0 & \beta(-1 + 3\frac{\hat{x}_1}{a}) & 0 & \frac{\beta^2}{2} Sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{2} Sin\gamma \end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{H}}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{F}}} \qquad (22.33)$$

Normal gerilmeler doğrusal, kayma gerilmesi sabit

$$\underline{\sigma} = \underline{H}\,\underline{F} \qquad (22.33a)$$

Asal gerilmeler:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

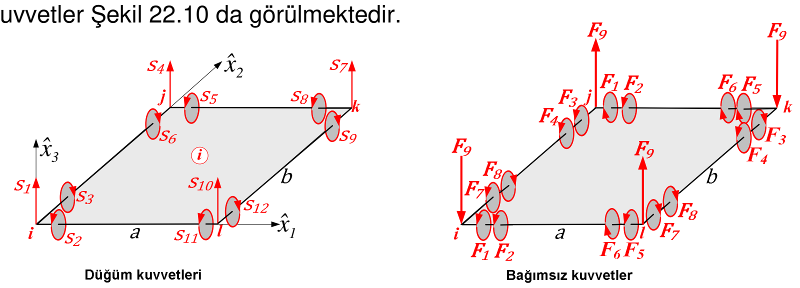
$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \qquad (22.33b)$$

$$2\varphi = ArcTan\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)$$

22.7 Dörtgen plak eleman matrisleri

Şekil 22.10 da dikdörtgen bir plak elemanın düğüm kuvvetleri görülmektedir[1]. Düğüm serbestlik derecesi 3, elemanın serbestlik derecesi 12 dir. Yerel ve genel koordinatlar birbirine paraleldir(transformasyon matrisi=birim matris). Noktalar saat yönünde numaralanmıştır. i noktasında tanımlı s_1, s_2, s_3 **tekil** kuvvetleri, sırasıyla, x_3 yönünde kuvvet, x_1 etrafında moment ve x_2 etrafında momenttir[2]. Eleman için sadece 3 denge koşulu($\sum x_1 = 0,\ \sum x_2 = 0, \sum M_{x_3} = 0$) vardır. 12 kuvvetin 9 tanesi, $F_1, F_2, \dots, F_9$ bağımsız kuvvettir(elemanın bilinmeyenleri). Przeminiecki'den alınan ve kendi içinde dengede olan bu kuvvetler Şekil 22.10 da görülmektedir.

$$\underline{s} = \begin{array}{c} \\ \color{red}{i} \\ \\ \\ \color{red}{j} \\ \\ \\ \color{red}{k} \\ \\ \\ \color{red}{l} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \hline s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ \hline s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ \hline s_{10} \\ s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix}$$



$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix}$$

Şekil 22.10: Dikdörtgen plak eleman (perspektif çizim)

İfadeleri basitleştirmek için elemanlara ait büyüklüklerde i indisi kullanılmayacaktır. E: elastisite modülü, υ: Poisson oranı, t:eleman kalınlığı, (x_{1i}, x_{2i}): i noktasının, (x_{1j}, x_{2j}): j noktasının, (x_{1k}, x_{2k}): k noktasının, (x_{1l}, x_{2l}): l noktasının genel koordinatları, yükler ve mesnet koşulları biliniyor varsayılmaktadır. a ve b kenarları noktaların genel koordinatlarından hesaplanır: $a = |x_{1l} {}_{-} x_{1i}|, b = |x_{2j} {}_{-} x_{2i}|$.

Yerel ve genel denge matrisi:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \\ \color{red}{i} \\ \\ \\ \color{red}{j} \\ \\ \\ \color{red}{k} \\ \\ \\ \color{red}{l} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \hline s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ \hline s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ \hline s_{10} \\ s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/a & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2/b & 0 & 2/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2/a & 0 & 2/b & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/b & 0 & 2/a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \quad (22.34)$$

Yerel ve genel denge

$$\underline{s} = \underline{B}\ \underline{F} \quad (22.34a)$$

Göreceli yer değiştirmeler ve esneklik matrisi: $\beta = \frac{b}{a}$ ile

$$\underline{f} = \frac{12}{E\ t^3} \begin{bmatrix} 4\beta & & & & & & & & \\ 0 & \frac{4}{3}\beta & & & & & & & \\ -\upsilon & \upsilon & \frac{4}{\beta} & & & & Simetrik & & \\ -\upsilon & \upsilon & 0 & \frac{4}{3\beta} & & & & & \\ -2\beta & 0 & -\upsilon & \upsilon & 4\beta & & & & \\ 0 & \frac{2}{3}\beta & -\upsilon & \upsilon & 0 & \frac{4}{3}\beta & & & \\ -\upsilon & -\upsilon & -\frac{2}{\beta} & 0 & -\upsilon & \upsilon & \frac{4}{\beta} & & \\ \upsilon & \upsilon & 0 & \frac{2}{3\beta} & -\upsilon & \upsilon & 0 & \frac{4}{3\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon)ab \end{bmatrix} \quad (22.35)$$

Esneklik matrisi

$$\underline{v} = \ \underline{f}\ \underline{F} \quad (22.35a)$$

Göreceli yer değiştirmeler

---

[1] Bu elemanın tüm bağıntıları Przemieniecki, J., S, Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill, 1968 den alınmıştır.

[2] Klasik plak teorisinde kesme kuvveti ve momentler birim genişlik için tanımlanır, birimleri, örneğin, kN/m ve kNm/m dir. Burada tanımlanan düğüm kuvvetleri tekildir, birimleri, örneğin, kN ve kNm dir. Bir diğer dikkat edilmesi gereken fark da şudur. Klasik plak teorisinde momentler genellikle x doğrultusunda M_x, y doğrultusunda M_y ile gösterilir. Şekil 22.10 daki momentler ise eksenler etrafındaki momentlerdir, örneğin, s_2 momenti $x_1$ekseni, s_3 momenti ise x_2 ekseni etrafındaki momenttir.

Gerilmeler:

$\xi = \frac{x_1}{a}\,, \eta = \frac{x_2}{b}$ olmak üzere

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \frac{6}{t^2} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & \frac{2}{b}(-1+3\eta) & \frac{2}{b}(-1+3\eta)(1-2\xi) & 0 & 0 & \frac{2}{b}(2-3\eta) & \frac{2}{b}(2-3\eta)(-1+2\xi) & 0 \\ \frac{2}{a}(2-3\xi) & \frac{2}{a}(2-3\xi)(1-2\eta) & 0 & 0 & \frac{2}{a}(-1+3\xi) & \frac{2}{a}(-1+3\xi)(-1+2\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\underline{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \quad (22.36)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{H}\,\underline{F} \quad (22.36a)$$

Asal gerilmeler:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (22.37b)$$

$$2\varphi = ArcTan\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)$$

22. Eleman tipleri ve matrisleri