21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

Serbestlik derecesi(denklem sayısı) n, bilinmeyen sayısı m olan hiperstatik sistemlerde

$$\underline{N}\,\underline{F} = \underline{P} \quad \text{Sistemin denge denklemi} \tag{21.1}$$

denge denkleminin çözümünün (bilinmeyenlerin)

$$\underline{F} = \underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x\underline{x} \tag{21.2}$$

olduğu, $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrislerinin

$$\underline{N}\,\underline{B}_0 = \underline{I} \quad \text{inhomojen denklem sistemi} \tag{21.3}$$

$$\underline{N}\,\underline{B}_x = \underline{0} \quad \text{homojen denklem sistemi} \tag{21.4}$$

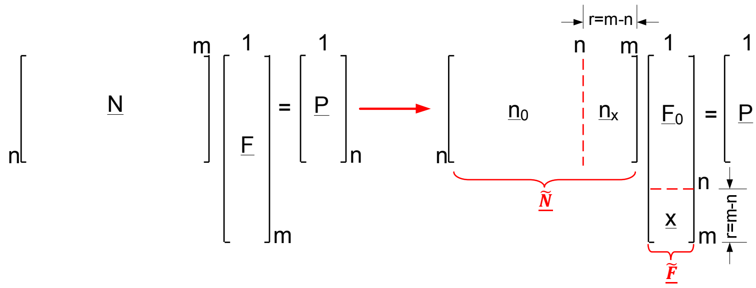
koşullarını sağlaması gerektiği, $\underline{x}$ in hiperstatik bilinmeyenler, $\underline{B}_0$ ın hiperstatik bilinmeyenler sıfır iken birim dış yüklerden, $\underline{B}_x$ in dış yükler sıfır iken birim hiperstatik bilinmeyenlerden izostatik esas sistemde oluşan iç kuvvetler[1] olduğu 20. bölümde açıklanmıştı. Burada 21.3 ve 21.4 koşullarını sağlayan $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrislerinin nasıl hesaplanacağı gösterilecektir.

$\underline{N}$ denge matrisinin n satırı ve m kolonu vardır, n<m dir. $\underline{N}$ satır düzenlidir(satırlar, sistemin farklı düğümlerindeki denge denklemleri olduğundan, doğrusal bağımsızdırlar). Satırları doğrusal bağımsız olan nxm boyutlu dikdörtgen matrisin n kolonu doğrusal bağımsız, r=m-n kolonu doğrusal bağımlıdır. Bu şu anlama gelir: $\underline{N}$ matrisinin nxn boyutlu düzenli[2] bir alt matrisi mutlaka vardır. Ancak, hangi kolonların doğrusal bağımlı hangilerinin bağımsız olduğu önceden bilinemez. Hangi kolonların doğrusal bağımlı olduğunu bildiğimizi **varsayalım** ve bu kolonlara yer değiştirerek 21.1 i

Satırlarının yeri değiştirilmiş $\underline{F}$

$$\underbrace{[\underline{n}_0 \quad \underline{n}_x]}_{\tilde{\underline{N}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{F}_0\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{F}}} = \underline{P} \tag{21.5}$$

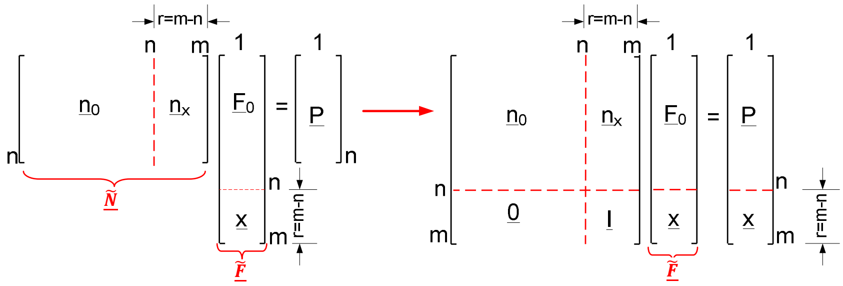
Kolonlarının yeri değiştirilmiş $\underline{N}$



şeklinde düzenleyelim. Burada $\underline{n}_0$ doğrusal bağımsız kolonlar, $\underline{n}_x$ doğrusal bağımlı kolonlar, $\underline{F}_0$ doğrusal bağımsız kuvvetler, $\underline{x}$ hiperstatik bilinmeyenlerdir.

2.15 bağıntısını $\underline{x} = \underline{x}$ veya aynı anlama gelen $\underline{I}\,\underline{x} = \underline{x}$ ile genişletelim:

$$\begin{bmatrix}\underline{n}_0 & \underline{n}_x\\ \underline{0} & \underline{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{F}_0\\ \underline{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix} \tag{21.6}$$



Yapılan işlem sonucu denklem sisteminin katsayılar matrisi mxm kare matris olmuştur. nxn boyutlu $\underline{n}_0$ matrisinin satır ve kolonları doğrusal bağımsız olduğundan tersi vardır. 21.6 nın

1. satırından: $\underline{n}_0\,\underline{F}_0 + \underline{n}_x\,\underline{x} = \underline{P} \quad \rightarrow \underline{F}_0 = \underline{n}_0^{-1}\underline{P} - \underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x\,\underline{x}$
2. satırından: $\underline{x} = \underline{I}\,\underline{x}$

hesaplanan değerler ile bilinmeyenler vektörü 21.2 ile karşılaştırılırsa

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{F}_0\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{F}}} = \begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}\underline{n}_0^{-1}\\ \underline{0}\end{matrix}}_{\underline{B}_0} & \underbrace{\begin{matrix}-\underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x\\ \underline{I}\end{matrix}}_{\underline{B}_x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix} \longrightarrow \tilde{\underline{F}} = \underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x\underline{x} \longrightarrow \underline{B}_0 = \begin{bmatrix}\underline{n}_0^{-1}\\ \underline{0}\end{bmatrix}, \quad \underline{B}_x = \begin{bmatrix}-\underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x\\ \underline{I}\end{bmatrix} \tag{21.7}$$

olur. Anlamı: $\underline{N}$ nin hangi kolonlarının doğrusal bağımsız, hangilerinin doğrusal bağımlı olduğu, yani $\underline{n}_0$ ve $\underline{n}_x$ alt matrislerinin belirlenmesi zorunludur.

[1] $\underline{B}_x$ Matrisine statikte İngilizce self stress matrix denir.

[2] Düzenli matris: determinantı sıfırdan farklı olan yani tersi alınabilen matris.

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B₀ ve Bₓ matrislerinin hesabı

$\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ 21.3 ve 21.4 bağıntılarını sağlamak zorunda idi, sağlıyor mu? Bakalım[1]:

$\underline{\tilde{N}}\,\underline{B}_0 = \underline{I}$ olmalı:

$$\underbrace{[\underline{n}_0 \quad \underline{n}_x]}_{\underline{\tilde{N}}}\,\underline{B}_0 = \underbrace{[\underline{n}_0 \quad \underline{n}_x]}_{\underline{\tilde{N}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{n}_0^{-1}\\ \\ \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0} = \underbrace{\underline{n}_0\ \underline{n}_0^{-1}}_{\underline{I}} + \underline{n}_0\ \underline{0} = \underline{I}\ \checkmark\ sağlanıyor$$

$\underline{\tilde{N}}\,\underline{B}_x = \underline{0}$ olmalı:

$$\underbrace{[\underline{n}_0 \quad \underline{n}_x]}_{\underline{\tilde{N}}}\,\underline{B}_x = \underbrace{[\underline{n}_0 \quad \underline{n}_x]}_{\underline{\tilde{N}}}\underbrace{\begin{bmatrix}-\underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x\\ \\ \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_x} = -\underbrace{\underline{n}_0\ \underline{n}_0^{-1}}_{\underline{I}}\underline{n}_x + \underline{n}_x\ \underline{I} = \underline{0}\ \checkmark\ sağlanıyor$$

21.1 B₀ ve Bₓ matrislerinin sayısal hesap yöntemleri

$\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrisleri sayısal çözümde(programlarda) yukarıda açıklanan teorik bağıntılar temel alınarak hesaplanır. Farklı hesap yöntemleri vardır. Bazıları yukarıdaki teoriyi aynen uygularken bazıları $\underline{n}_0^{-1}$ matrisini doğrudan hesaplamazlar (ters matris hesabı zaman alıcı olduğundan).

> **Yukarıdaki teorik yol bize şunu söylemektedir:**
>
> **Hangi hesap yöntemi kullanılırsa kullanılsın, $\underline{N}$ matrisi kolonlarına (veya satırlarına) yer değiştirilerek determinantı ≠ 0 olan mxm boyutlu matrise dönüştürülmek zorundadır.**

Gauss-Jordan Tekniği temelli, satırda pivot arama-kolonlara yer değiştirme yöntemi:[2] $\underline{N}$ nin doğrusal bağımsız n kolonu belirlenir, bunlar $\underline{N}$ nin ilk n kolonu olacak şekilde kolonlara yer değiştirilir. Son r kolon doğrusal bağımlı kolonlar olur. Kolay programlanır. İşlem sayısı fazladır, $\underline{N}$ matrisinin band yapısı bozulur. Bu yöntemi kullanan ilk algoritmayı 1960 lı yıllarda Denke[3] ve Robinson[4] vermişlerdir. O yıllarda NASA'da yapılan çalışmalar gizli olduğundan, Denke ve Robinson tamamen aynı olan algoritmayı, birbirinden habersiz, geliştirmişlerdir.

Gauss indirgeme metodu temelli, satırda pivot arama-kolonlara yer değiştirme yöntemi: LU çarpanlara ayırma işlemidir. İndirgeme sırasında $\underline{N}$ nin doğrusal bağımsız n kolonu belirlenir, bunlar $\underline{N}$ nin ilk n kolonu olacak şekilde kolonlara yer değiştirilir. Son r kolon doğrusal bağımlı kolonlar olur. Kolay programlanır. Gauss-Jordan Tekniğine nazaran daha az işlem gerektirir, $\underline{N}$ matrisinin band yapısı bozulur.

Gauss indirgeme metodu temelli, kolonda pivot arama-satırlara yer değiştirme yöntemi[5]: LU çarpanlara ayırma işlemidir. İndirgeme sırasında doğrusal bağımlı ve bağımsız kolonların numaraları belirlenir, kolonlar orijinal yerlerinde bırakılır, gerekirse satırlara yer değiştirilir. Doğrusal bağımlı bir kolon belirlendiğinde 21.7 deki birim matrisin ilgili satırı hemen denklem sistemine eklenir. Programlanması zordur. Yukarıdaki yöntemlere göre daha az işlem gerektirir, $\underline{N}$ matrisinin band yapısı bozulmaz. Bu yönteme yönelik ilk algoritma Thierauf/Topçu[6] tarafından geliştirildi.

Gauss-Jordan Tekniği[7] temelli, satırda pivot arama-kolonlara yer değiştirme yöntemi ile B₀ ve Bₓ hesabı:

nxm boyutlu $\underline{N}$ denge matrisinin kolonlarına yer değiştirerek 21.5 de şematik gösterildiği gibi düzenlendiğini varsayalım:

$$\underbrace{[\underline{n}_0 \quad \underline{n}_x]}_{\underline{\tilde{N}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{F}_0\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{F}}} = \underline{P} \qquad (21.8)$$

burada $\underline{n}_0$ doğrusal bağımsız kolonların katsayılar matrisi, $\underline{n}_x$ doğrusal bağımlı kolonların katsayılar matrisidir. Tanım gereği $\underline{n}_0$ ın tersi vardır, boyutu nxn dır. $\underline{n}_x$ ın boyutu ise nxr dir. Gauss-Jordan tekniğine göre n tane $\underline{T}_1, \underline{T}_2, \underline{T}_3, \ldots, \underline{T}_n$ transformasyon matrisi öyle belirlenir ki

$$\underline{T}_n \ldots \underline{T}_3\ \underline{T}_2\ \underline{T}_1 \underbrace{[\underline{n}_0 \quad \underline{n}_x]}_{\underline{\tilde{N}}} = [\underline{I} \quad \underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x] \qquad (21.9)$$

olur. 21.9 dan anlaşılacağı gibi, $\underline{n}_0$ birim matrise dönüşmüştür, o halde $\underline{n}_0^{-1} = \underline{T}_n \ldots \underline{T}_3\ \underline{T}_2\ \underline{T}_1$ dir.

---

[1] $\underline{N}$ yerine $\underline{\tilde{N}}$ alındı, çünkü $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrisleri kolonlarına yer değiştirilerek oluşturulan eşdeğer $\underline{\tilde{N}}$ den hesaplandı.

[2] Satırdaki mutlak değerce en büyük olan sayının bulunduğu kolon ile indirgeme adımındaki kolonun yerinin değiştirilmesi.

[3] Denke, P.H., A general digital computer analysis of statically indeterminate structures, NASA, TN-1666, Washington, 1962.

[4] Robinson, J., Automatic selection of redundancies in the matrix force method ("The rank technique"), Can. Aero. Space J. 11,9-12, 1965.

[5] Kolondaki mutlak değerce en büyük olan sayının bulunduğu satır ile indirgeme adımındaki satırın yerinin değiştirilmesi.

[6] Thierauf, G., Topçu A., Structural optimization using the force method. in "World congress on finite element methodts in structural mechanics". Ed.: J. Robinson, Bournemouth, England, 1975.

[7] Bakınız: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu/index_dosyalar/Dersler/BilDesNuMAn/BDNA-DersNotlar%C4%B1/BDNA08_TersMatris.pdf

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

$\underline{T}_1, \underline{T}_2, \underline{T}_3, \ldots, \underline{T}_n$ transformasyon matrisleri 21.10 verilen yapıdadır. $\tilde{N}_{ij}$ işlemler sonucu $\underline{N}$ nin değişen değerleridir.

$$\underline{T}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\tilde{N}_{11}} & & & & \\ -\frac{\tilde{N}_{21}}{\tilde{N}_{11}} & 1 & & & \\ -\frac{\tilde{N}_{31}}{\tilde{N}_{11}} & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -\frac{\tilde{N}_{n1}}{\tilde{N}_{11}} & & & & 1\end{bmatrix}, \underline{T}_2=\begin{bmatrix}1 & -\frac{\tilde{N}_{12}}{\tilde{N}_{22}} & & & \\ & \frac{1}{\tilde{N}_{22}} & & & \\ & -\frac{\tilde{N}_{32}}{\tilde{N}_{22}} & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & -\frac{\tilde{N}_{n2}}{\tilde{N}_{22}} & & & 1\end{bmatrix}, \underline{T}_3=\begin{bmatrix}1 & & -\frac{\tilde{N}_{13}}{\tilde{N}_{33}} & & \\ & & -\frac{\tilde{N}_{23}}{\tilde{N}_{33}} & & \\ & & \frac{1}{\tilde{N}_{33}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & -\frac{\tilde{N}_{n3}}{\tilde{N}_{33}} & & 1\end{bmatrix}, \ldots, \underline{T}_n=\begin{bmatrix}1 & & & & -\frac{\tilde{N}_{1n}}{\tilde{N}_{nn}} \\ & 1 & & & -\frac{\tilde{N}_{2n}}{\tilde{N}_{nn}} \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{\tilde{N}_{nn}}\end{bmatrix} \quad (21.10)$$

Sayısal örnek:

Bilinmeyenlerin numaraları=kolon değiştirme vektörü. Kolonlara yer değiştirilirse bu sıra değişir

$$\underline{N}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0.5 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

denge matrisinin 21.3 ve 21.4 ü sağlayan $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrisleri Gauss-Jordan tekniği ile belirlenecektir. n=3, m=5, r=m-n=2 dir. r=2 kolon doğrusal bağımlıdır(hiperstatiklik derecesi).

$$\underline{T}_1=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{T}_1\underline{N}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

1.kolon birim matrisin 1. kolonuna dönüştü. Bir daha kullanılmayacağı için $\underline{T}_1$ in 1.kolonu buraya taşınır. Amaç bellek tasarrufudur.

$$\underline{\tilde{N}}_1=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ -0.5 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

2. diyagonal eleman sıfır. 2. satırda pivot aranır. 3. kolondadır. 2. ve 3. kolona yer değiştirilir.

$$\underline{\tilde{N}}_2=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&2&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0.5 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\underline{T}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & -0.25 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{T}_2\underline{\tilde{N}}_2=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&2&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0\\ -0.25 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.125 & 0 & 0 & -1.25 & 0.75\end{bmatrix}\end{array}$$

2. kolon birim matrisin 2. kolonuna dönüştü. Bir daha kullanılmayacağı için $\underline{T}_2$ nin 2.kolonu buraya taşınır. Amaç bellek tasarrufudur.

$$\underline{\tilde{N}}_3=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&2&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0\\ -0.25 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.125 & -0.25 & 0 & -1.25 & 0.75\end{bmatrix}\end{array}$$

3. diyagonal eleman sıfır. 3. satırda pivot aranır. 4. kolondadır. 3. ve 4. kolona yer değiştirilir.

$$\underline{\tilde{N}}_4=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ -0.25 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.125 & -0.25 & -1.25 & 0 & 0.75\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\underline{T}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0.4\\ 0 & 0 & -0.8\end{bmatrix}, \quad \underline{T}_3\underline{\tilde{N}}_4=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ -0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.8\\ -0.1 & 0.2 & 1 & 0 & -0.6\end{bmatrix}\end{array}$$

3. kolon birim matrisin 3. kolonuna dönüştü. Bir daha kullanılmayacağı için $\underline{T}_3$ ün 3.kolonu buraya taşınır. Amaç bellek tasarrufudur.

2. ve 5. bilinmeyenler hiperstatik bilinmeyen olarak seçildi anlamında

$$\underline{\tilde{N}}_5=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc:cc}0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ -0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0.8\\ -0.1 & 0.2 & -0.8 & 0 & -0.6\end{array}\right]\\ \underbrace{\hspace{6em}}_{\underline{n}_0^{-1}}\;\underbrace{\hspace{4em}}_{\underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x}\end{array}$$

21.7 ile karşılaştırırsak $\underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x$ alt matrisinin işaretini değiştirmemiz gerektiği anlaşılır.

$$\underline{\tilde{N}}_6=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc:cc}0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0\\ -0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & -0.8\\ -0.1 & 0.2 & -0.8 & 0 & 0.6\end{array}\right]\\ \underbrace{\hspace{6em}}_{\underline{n}_0^{-1}}\;\underbrace{\hspace{4em}}_{-\underline{n}_0^{-1}\underline{n}_x}\end{array}$$

21.7 ile karşılaştırırsak genişleterek mxm boyutlu kare matrise dönüştürmemiz gerektiği anlaşılır

Kolonlara yer değiştirdik. Sonucun doğru olması için **satırlara** yer değiştirmeliyiz

$$\underline{\tilde{N}}_7=\begin{array}{c}\\1\\3\\4\\2\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc:cc}0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0\\ -0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & -0.8\\ -0.1 & 0.2 & -0.8 & 0 & 0.6\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array} \longrightarrow \textbf{SONUÇ} \longrightarrow \begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc:cc}0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & -0.8\\ -0.1 & 0.2 & -0.8 & 0 & 0.6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\\ \underbrace{\hspace{6em}}_{\underline{B}_0}\;\underbrace{\hspace{4em}}_{\underline{B}_x}\end{array} \quad (21.11)$$

Sıfır alt matris

Birim alt matris

Yazılımlarda tüm işlemler $\underline{N}$ üzerinde yapılır. $\underline{T}_i$ matrisleri için sadece n boyutlu tek bir vektör kullanılır.

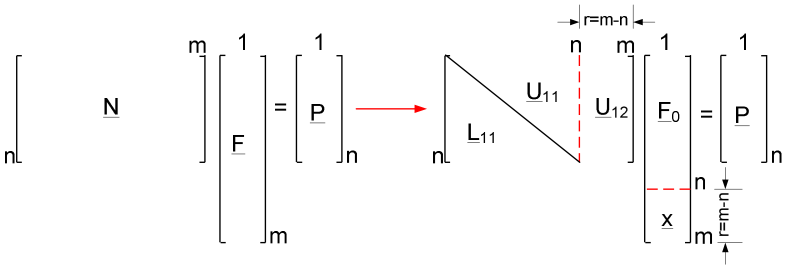
21.11 deki $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrisleri 21.3 ve 21.4 de yerine konursa sağladıkları görülür

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0.5 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{N}}\underbrace{\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -0.2 & 0.4 & 0.4\\ -0.1 & 0.2 & -0.8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{I}} \checkmark \textit{ sağlanıyor}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0.5 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{N}}\underbrace{\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & -0.8\\ 0 & 0.6\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{B}_x}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{0}} \checkmark \textit{ sağlanıyor}$$

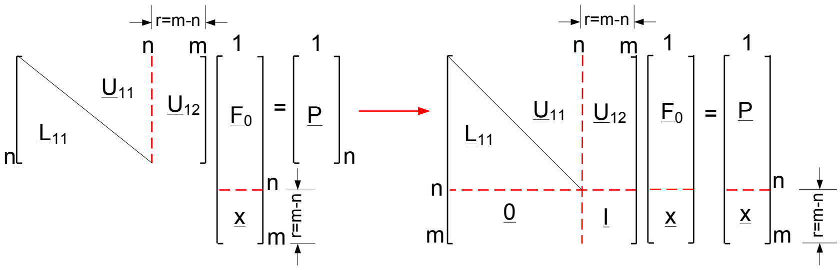
Gauss indirgeme metodu temelli, satırda pivot arama-kolonlara yer değiştirme yöntemi ile $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ hesabı:

LU çarpanlara ayırma işlemi kullanılır[1]. Teorik adımlar şematik olarak açıklanacaktır. Çarpanlara ayırma işlemi sırasında satırda pivot aranır. Doğrusal bağımlı bir kolona rastlandığında kolonlara yer değiştirilir. LU işlemleri tamamlandığında $\underline{N}$ nin ilk n kolonu doğrusal bağımsız kolonlar, son r kolonu doğrusal bağımlı kolonlar(hipestatik bilinmeyenlerin kolonları) olur. Şematik olarak gösterirsek, denklem sistemi 21.12 ye dönüşür.



(21.12)

$\underline{L}_{11}$ ve $\underline{U}_{11}$ üçgen matrislerinin tersi vardır. $\underline{U}_{12}$ dikdörtgen matrisi $\underline{x}$ hiperstatik bilinmeyenlerine ait doğrusal bağımlı kolonlardan oluşur. 21.12 yi aşağıdaki gibi genişletebiliriz.



(21.13)

21.3 e göre $\underline{B}_0$ ın hesabı:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\underline{L}_{11} & \underline{0}\\ \hdashline \underline{0} & \underline{I}\end{array}\right]}_{\underline{L}}\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\underline{U}_{11} & \underline{U}_{12}\\ \hdashline \underline{0} & \underline{I}\end{array}\right]}_{\underline{U}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{01}\\ \hdashline \underline{B}_{02}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0}=\begin{bmatrix}\underline{I}\\ \hdashline \underline{0}\end{bmatrix}$$

21.13 deki $\underline{P}=\underline{I}$ ve $\underline{x}=\underline{0}$ alındı. İzostatik sistemde hiperstatik bilinmeyenler sıfır iken birim dış yüklemesi yapılıyor anlamındadır

olmalıdır. $\underline{y}=\underline{U}\,\underline{B}_0$ dönüştürmesi yaparsak

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\underline{L}_{11} & \underline{0}\\ \hdashline \underline{0} & \underline{I}\end{array}\right]}_{\underline{L}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{y}_1\\ \hdashline \underline{y}_2\end{bmatrix}}_{\underline{y}}=\begin{bmatrix}\underline{I}\\ \hdashline \underline{0}\end{bmatrix} \text{ den } \underline{L}_{11}\,\underline{y}_1+\underline{0}\,\underline{y}_2=\underline{I}\rightarrow \underline{y}_1=\underline{L}_{11}^{-1},\ \underline{I}\,\underline{y}_2=\underline{0}\ \rightarrow\ \underline{y}_2=\underline{0}\ \rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{y}_1\\ \hdashline \underline{y}_2\end{bmatrix}}_{\underline{y}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{L}_{11}^{-1}\\ \hdashline \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{y}}$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\underline{U}_{11} & \underline{U}_{12}\\ \hdashline \underline{0} & \underline{I}\end{array}\right]}_{\underline{U}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{01}\\ \hdashline \underline{B}_{02}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{y}_1\\ \hdashline \underline{y}_2\end{bmatrix}}_{\underline{y}}\rightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\underline{U}_{11} & \underline{U}_{12}\\ \hdashline \underline{0} & \underline{I}\end{array}\right]}_{\underline{U}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{01}\\ \hdashline \underline{B}_{02}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{L}_{11}^{-1}\\ \hdashline \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{y}}\ \rightarrow \underline{I}\,\underline{B}_{02}=\underline{0}\ \rightarrow \underline{B}_{02}=\underline{0},\ \underline{U}_{11}\underline{B}_{01}+\underline{U}_{12}\underline{B}_{02}=\underline{L}_{11}^{-1}\ \rightarrow \underline{B}_{01}=\underline{U}_{11}^{-1}\underline{L}_{11}^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{01}\\ \hdashline \underline{B}_{02}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{U}_{11}^{-1}\underline{L}_{11}^{-1}\\ \hdashline \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0}\ \rightarrow \underline{B}_0=\begin{bmatrix}\underline{U}_{11}^{-1}\underline{L}_{11}^{-1}\\ \hdashline \underline{0}\end{bmatrix} \text{ olur.} \qquad (21.14)$$

[1] Bakınız: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu/index_dosyalar/Dersler/BilDesNuMAn/BDNA-DersNotlar%C4%B1/BDNA06_LU.pdf

21.4 e göre $\underline{B}_x$ ın hesabı:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{L}_{11} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{L}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{U}_{11} & \underline{U}_{12}\\ \underline{0} & \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{U}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{x1}\\ \underline{B}_{x2}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_x}=\begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}$$

21.13 deki $\underline{P}=\underline{0}$ ve $\underline{x}=\underline{I}$ alındı. İzostatik sistemde dış yükler sıfır iken hiperstatik bilinmeyenler birim yüklemesi yapılıyor anlamındadır

olmalıdır. $\underline{y}=\underline{U}\,\underline{B}_x$ dönüştürmesi yaparsak

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{L}_{11} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{L}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{y}_1\\ \underline{y}_2\end{bmatrix}}_{\underline{y}}=\begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix} \text{ den } \underline{L}_{11}\,\underline{y}_1+\underline{0}\,\underline{y}_2=\underline{0}\rightarrow \underline{y}_1=\underline{0},\ \underline{I}\,\underline{y}_2=\underline{I}\rightarrow \underline{y}_2=\underline{I}\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{y}_1\\ \underline{y}_2\end{bmatrix}}_{\underline{y}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{y}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{U}_{11} & \underline{U}_{12}\\ \underline{0} & \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{U}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{x1}\\ \underline{B}_{x2}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_x}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{y}_1\\ \underline{y}_2\end{bmatrix}}_{\underline{y}}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{U}_{11} & \underline{U}_{12}\\ \underline{0} & \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{U}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{x1}\\ \underline{B}_{x2}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_x}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{y}}\rightarrow \underline{I}\,\underline{B}_{x2}=\underline{I}\rightarrow \underline{B}_{x2}=\underline{I},\ \underline{U}_{11}\underline{B}_{x1}+\underline{U}_{12}\underline{B}_{x2}=\underline{0}\rightarrow \underline{B}_{x1}=-\underline{U}_{11}^{-1}\underline{U}_{12}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}_{x1}\\ \underline{B}_{x2}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_x}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\underline{U}_{11}^{-1}\underline{U}_{12}\\ \underline{I}\end{bmatrix}}_{\underline{B}_x}\longrightarrow \underline{B}_x=\begin{bmatrix}-\underline{U}_{11}^{-1}\underline{U}_{12}\\ \underline{I}\end{bmatrix} \text{ olur.} \qquad (21.15)$$

21.14 ve 21.15 incelendiğinde şu sonuca varılır:

1) $\underline{B}_0$ matrisi $\underline{U}_{12}$ den $\underline{B}_x$ ise $\underline{L}_{11}$ den bağımsızdır. Bu özellik dikkate alınarak işlem sayısı azaltılır.
2) Teorik bağıntılardaki ters matris hesabından kaçınılır, çözüm aşağı doğru ve yukarı doğru hesap ile gerçekleştirilir.
3) İşlemler $\underline{N}$ matrisi üzerinde gerçekleştirilir. $\underline{L}_{11}$ ve $\underline{U}_{11}$ ve $\underline{U}_{12}$ matrisleri $\underline{N}$ üzerinde depolanır.
4) $\underline{0}$ ve $\underline{I}$ alt matrisleri depolanmaz, varmış gibi işlem yapılır.

Sayısal örnek:

Bilinmeyenlerin numaraları=kolon değiştirme vektörü. Kolonlara yer değiştirilirse bu sıra değişir

$$\underline{N}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\1&0.5&2&1&1\\0&0&0.5&-1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

denge matrisinin 21.3 ve 21.4 ü sağlayan $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrisleri Gauss indirgeme(satırda pivot arama-kolon değiştirme) yöntemi ile belirlenecektir. n=3, m=5, r=m-n=2 dir. r=2 kolon doğrusal bağımlıdır(hiperstatiklik derecesi). Anlaşılmasını sağlamak için, çözümde teorik yol bire-bir aynen uygulanacaktır. Tekrar belirtelim, yazılımlarda ters matris hesabı yapılmaz.

$$\underline{\tilde{N}}_1=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\0.5&0&2&1&1\\0&0&0.5&-1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

1.indirgeme adımı sonrası

2. diyagonal eleman sıfır. 2. satırda pivot aranır. 3. kolondadır. 2. ve 3. kolona yer değiştirilir

$$\underline{\tilde{N}}_2=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&2&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}2&0&1&0&0\\0.5&2&0&1&1\\0&0.5&0&-1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$l_{ii}=1$ alımış ve depolanmamıştır. Diyagonalin altındaki sayılar $\underline{L}$ ye, üstündeki sayılar $\underline{U}$ ya aittir

$$\underline{\tilde{N}}_3=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&2&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}2&0&1&0&0\\0.5&2&0&1&1\\0&0.25&0&-1.25&0.75\end{bmatrix}\end{array}$$

2.indirgeme adımı sonrası

3. diyagonal eleman sıfır. 3. satırda pivot aranır. 4. kolondadır. 3. ve 4. kolona yer değiştirilir

$$\underline{\tilde{N}}_4=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}2&0&0&1&0\\0.5&2&1&0&1\\0&0.25&-1.25&0&0.75\end{bmatrix}\end{array}$$

3 diyagonal altında sayılar olmadığından indirgeme tamamlanmıştır

2. ve 5. bilinmeyenler hiperstatik bilinmeyen olarak seçildi anlamında

$$\underline{L}=\begin{array}{c}\\1\\3\\4\\2\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0.5&1&0&0&0\\0&0.25&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array},\quad \underline{U}=\begin{array}{c}\\1\\3\\4\\2\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&3&4&2&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}2&0&0&1&0\\0&2&1&0&1\\0&0&-1.25&0&0.75\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

2.13 e göre $\underline{L}$ ve $\underline{U}$ mxm boyutlu matrislere dönüştürüldü

$$\underline{L}_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.5&1&0\\0&0.25&1\end{bmatrix},\quad \underline{U}_{11}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&-1.25\end{bmatrix},\quad \underline{U}_{12}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0.75\end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&0\\0.125&-0.25&1\end{bmatrix},\quad \underline{U}_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}0.5&0&0\\0&0.5&0.4\\0&0&-0.8\end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_{11}^{-1}\,\underline{L}_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}0.5&0&0\\-0.2&0.4&0.4\\-0.1&0.2&-0.8\end{bmatrix},\quad \underline{U}_{11}^{-1}\,\underline{U}_{12}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.8\\0&-0.6\end{bmatrix}$$

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

2.14 ve 2.15 e göre:

Kolonlara yer değiştirdik. Sonucun doğru olması için **satırlara** yer değiştirmeliyiz

$$\tilde{\underline{B}}_0=\begin{bmatrix}\underline{U}_{11}^{-1}\underline{L}_{11}^{-1}\\ \underline{0}\end{bmatrix}=\begin{array}{c}1\\3\\4\\2\\5\end{array}\begin{bmatrix}0.5&0&0\\-0.2&0.4&0.4\\-0.1&0.2&-0.8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \tilde{\underline{B}}_x=\begin{bmatrix}-\underline{U}_{11}^{-1}\underline{U}_{12}\\ \underline{I}\end{bmatrix}=\begin{array}{c}1\\3\\4\\2\\5\end{array}\begin{bmatrix}-0.5&0\\0&-0.8\\0&0.6\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Satırlara yer değiştirdikten sonra:

$$\underline{B}_0=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{bmatrix}0.5&0&0\\0&0&0\\-0.2&0.4&0.4\\-0.1&0.2&-0.8\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \underline{B}_x=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{bmatrix}-0.5&0\\1&0\\0&-0.8\\0&0.6\\0&1\end{bmatrix}\qquad(21.16)$$

Gauss indirgeme metodu temelli, kolonda pivot arama-satırlara yer değiştirme yöntemi ile $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ hesabı:

LU çarpanlara ayırma işlemi kullanılır. Çarpanlara ayırma işlemi sırasında kolonda pivot aranır. Kolonda pivot bulunamaması kolonun doğrusal bağımlı olduğu anlamındadır, o kolona ait bilinmeyen hiperstatik bilinmeyen seçilir. Teorik adımlar aşağıdaki şematik denge denklemleri ile açıklanacaktır. *a, b,…,f* harflerinin her biri farklı bir sayıyı temsil etmektedir..

$$\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}a&a&a&a&a&a&a\\b&b&b&b&b&b&b\\d&d&d&d&d&d&d\\e&e&e&e&e&e&e\\f&f&f&f&f&f&f\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{N}}\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\\F_7\end{bmatrix}}_{\underline{F}}=\underbrace{\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\\P_5\end{bmatrix}}_{\underline{P}}\qquad(21.17)$$

n=5, m=7, r=2(doğrusal bağımlı kolon sayısı=hiperstatiklik derecesi). Hangi kolonların doğrusal bağımlı olduğunu **bilmiyoruz.** 3. ve 6. kolonların doğrusal bağımlı olduğunu varsayalım. Bu F_3 ve F_6 bilinmeyenlerinin hiperstatik bilinmeyen olacağı anlamındadır: $F_3=x_1$ ve $F_6=x_2$. Bu iki eşitliği denklem sisteminin sonuna ekleyelim. 21.18 denklem sistemi oluşur. Bu denklem sisteminin 7x7 boyutlu $\tilde{\underline{N}}$ katsayılar matrisinin tersi vardır. Gauss indirgeme metodu ile LU çarpanlarına ayrılabilir.

$$\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}a&a&a&a&a&a&a\\b&b&b&b&b&b&b\\d&d&d&d&d&d&d\\e&e&e&e&e&e&e\\f&f&f&f&f&f&f\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\tilde{\underline{N}}}\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\\F_7\end{bmatrix}}_{\underline{F}}=\underbrace{\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\\P_5\\x_1\\x_2\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{P}}}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{N}\\ \underline{\tilde{I}}\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{N}}}\underline{F}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{P}}}\qquad(21.18)$$

Bu bağıntıda $\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{P}}}=\begin{bmatrix}\underline{I}\\ \underline{0}\end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F}=\underline{B}_0$, $\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{P}}}=\begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F}=\underline{B}_x$ olur.

LU çarpanlara ayırma adımları:

$$\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\\tilde{d}&\tilde{d}&0&d&d&d&d\\\tilde{e}&\tilde{e}&0&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\\tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\tilde{\underline{N}}}\qquad \begin{array}{c}\\1\\2\\6\\4\\5\\3\\7\end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\0&0&1&0&0&0&0\\\tilde{e}&\tilde{e}&0&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\\tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\\tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}&\tilde{d}&\tilde{d}&\tilde{d}\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\tilde{\underline{N}}}\qquad(21.19)$$

1. ve 2. adım sonrası: $\underline{N}$ deki a,b,…,f sayıları değişir, $\tilde{a},\ \tilde{b},\dots,\tilde{f}$ *olur*. $\underline{N}$ nin 3. diyagonal ve altındaki sayılar sıfır olur(3. kolonu doğrusal bağımlı varsaymıştık). Kolonda pivot bulunamaz. 6.satırın var olduğunu düşünerek(gerçekte yoktur) 3. satır ile 6. satıra yer değiştiririz. $\tilde{\underline{N}}$ sağdaki gibi olur.

$$\begin{array}{c}\\1\\2\\6\\4\\5\\3\\7\end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\0&0&1&0&0&0&0\\\tilde{e}&\tilde{e}&0&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\\tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\\tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\tilde{\underline{N}}}\qquad \begin{array}{c}\\1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\0&0&1&0&0&0&0\\\tilde{e}&\tilde{e}&0&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\\tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\0&0&0&0&0&1&0\\\tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}\end{bmatrix}\end{array}}_{\tilde{\underline{N}}}\qquad(21.20)$$

4. ve 5. adım sonrası: $\underline{N}$ sayıları değişir, 6. diyagonal sıfır olur(6. kolonu doğrusal bağımlı varsaymıştık). Kolonda pivot bulunamaz. 7.satırın var olduğunu düşünerek(gerçekte yoktur) 6. satır ile 7. satıra yer değiştiririz. $\tilde{\underline{N}}$ sağdaki gibi olur. 7. diyagonal≠0 dır, kolon doğrusal bağımsızdır. LU çarpanlara ayırma işlemi tamamlanmıştır.

Sonuç: Yukarıdaki LU adımlarını $\underline{N}$ nin 3. ve 6. kolonlarının doğrusal bağımlı olduğunu **bildiğimizi varsayarak** açıkladık. **İndirgeme öncesi doğrusal bağımlı kolonları bilemeyiz.** Ancak, indirgeme sırasında i. adımda $\underline{N}$ nin i. kolonunun diyagonali ve altındaki sayıların hepsi sıfır ise pivot bulunamayacağı, dolayısıyla i. kolonun doğrusal bağımlı olduğu anlaşılır. Bu durumda mxm boyutlu birim matrisin i. satırı n+1.satırdaymış gibi düşünülür(gerçekte orda değildir). i.satır n+1. satıra aktarılır ve i. satır birim matrisin i. satırı olarak alınır. Böylece F_i bilinmeyeni hiperstatik bilinmeyen olarak seçilmiş olur. Benzer şekilde indirgemeye devam edilir, indirgeme tamamlandığında r tane hiperstatik bilinmeyen belirlenmiş, $\underline{N}$ matrisi 21.20 deki mxm boyutlu $\underline{\tilde{N}}$ matrisine dönüşmüş olur. $\underline{\tilde{N}}$ nin diyagonalı altındaki sayılar $\underline{\tilde{L}}$ ye, digonal ve üstündeki sayılar $\underline{\tilde{U}}$ ya aittir. $\underline{\tilde{L}}$ nin diyagonal elemanları 1 dir, depolanmaz. 21.20 den

$$
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a&a&a&a\\ b&b&b&b&b&b&b\\ d&d&d&d&d&d&d\\ e&e&e&e&e&e&e\\ f&f&f&f&f&f&f\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{N}}
\xrightarrow[\text{INDIRGEME}]{\text{GAUSS}}
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\ \tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ \tilde{e}&\tilde{e}&0&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\ \tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ \tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{N}}}
=
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\ \tilde{b}&1&&&&&\\ 0&0&1&&&&\\ \tilde{e}&\tilde{e}&0&1&&&\\ \tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&1&&\\ 0&0&0&0&0&1&\\ \tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}&\tilde{d}&0&1\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{L}}}
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\ &\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\ &&1&0&0&0&0\\ &&&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\ &&&&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\ &&&&&1&0\\ &&&&&&\tilde{d}\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{U}}}
\qquad (21.21)
$$

$\underline{B_0}$ in hesabı:

21.18 e göre $\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}=\begin{bmatrix}\underline{I}\\ \underline{0}\end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F}=\underline{B_0}$ olur.

$$
\underline{\tilde{P}}=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\ \hline 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{P}}}
\qquad
\underline{\tilde{P}}=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{P}}}
\qquad (21.22)
$$

21.21 deki $\underline{\tilde{N}}$ nin satırları yer değiştirdiğinden $\underline{\tilde{P}}$ de de aynı satır değişikliği yapılmalıdır.

Satırlar değiştirildikten sonra

$$
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\ \tilde{b}&1&&&&&\\ 0&0&1&&&&\\ \tilde{e}&\tilde{e}&0&1&&&\\ \tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&1&&\\ 0&0&0&0&0&1&\\ \tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}&\tilde{d}&0&1\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{L}}}
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\ &\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\ &&1&0&0&0&0\\ &&&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\ &&&&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\ &&&&&1&0\\ &&&&&&\tilde{d}\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{U}}}
\underline{B_0}=
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{P}}}
\rightarrow \underline{\tilde{L}}\,\underline{\tilde{U}}\,\underline{B_0}=\underline{\tilde{P}}
\qquad (21.23)
$$

Bu denklem sisteminden aşağı doğru ve yukarı doğru hesap yoluyla $\underline{B_0}$ bulunur. Sağ taraf 7x5 boyutlu olduğundan $\underline{B_0}$ 7x5 boyutlu olacaktır.

olur.

$\underline{B_x}$ in hesabı:

21.18 e göre $\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}=\begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F}=\underline{B_x}$ olur.

$$
\underline{\tilde{P}}=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\ \hline 1&0\\0&1\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{P}}}
\qquad
\underline{\tilde{P}}=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{P}}}
$$

21.21 deki $\underline{\tilde{N}}$ nin satırları yer değiştirdiğinden $\underline{\tilde{P}}$ de de aynı satır değişikliği yapılmalıdır.

Satırlar değiştirildikten sonra

$$
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\ \tilde{b}&1&&&&&\\ 0&0&1&&&&\\ \tilde{e}&\tilde{e}&0&1&&&\\ \tilde{f}&\tilde{f}&0&\tilde{f}&1&&\\ 0&0&0&0&0&1&\\ \tilde{d}&\tilde{d}&0&\tilde{d}&\tilde{d}&0&1\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{L}}}
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}&\tilde{a}\\ &\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}&\tilde{b}\\ &&1&0&0&0&0\\ &&&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}&\tilde{e}\\ &&&&\tilde{f}&\tilde{f}&\tilde{f}\\ &&&&&1&0\\ &&&&&&\tilde{d}\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{U}}}
\underline{B_x}=
\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\6\\4\\5\\7\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\tilde{P}}}
\rightarrow \underline{\tilde{L}}\,\underline{\tilde{U}}\,\underline{B_x}=\underline{\tilde{P}}
\qquad (21.24)
$$

olur.

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

$\underline{\tilde L}$ ve $\underline{\tilde P}$ nin yapısından dolayı $\underline{B}_x$ in hesabı $\underline{\tilde L}$ den bağımsızdır. Bunun böyle olduğunu gösterelim[1]. $\underline{\tilde L}^{-1}$ ile her iki tarafı çarpalım:

$$\underbrace{\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a \\ 2 & & \tilde b & \tilde b & \tilde b & \tilde b & \tilde b & \tilde b \\ 6 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & & & & \tilde e & \tilde e & \tilde e & \tilde e \\ 5 & & & & & \tilde f & \tilde f & \tilde f \\ 7 & & & & & & 1 & 0 \\ 3 & & & & & & & \tilde d \end{array}}_{\underline{\tilde U}} \underline{B}_x = \underbrace{\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & x & & & & & & \\ 2 & x & x & & & & & \\ 6 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 4 & x & x & 0 & x & & & \\ 5 & x & x & 0 & x & x & & \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 3 & x & x & 0 & x & x & 0 & x \end{array}}_{\underline{\tilde L}^{-1}} \underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}}_{\underline{\tilde P}} = \underbrace{\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}}_{\underline{\tilde P}} \tag{21.25}$$

$\underline{\tilde L}^{-1}\underline{\tilde P} = \underline{\tilde P}$ oldu. O halde, $\underline{B}_x$ in hesabında $\underline{\tilde L}^{-1}$ etkin değildir.

$$\underbrace{\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a & \tilde a \\ 2 & & \tilde b & \tilde b & \tilde b & \tilde b & \tilde b & \tilde b \\ 6 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & & & & \tilde e & \tilde e & \tilde e & \tilde e \\ 5 & & & & & \tilde f & \tilde f & \tilde f \\ 7 & & & & & & 1 & 0 \\ 3 & & & & & & & \tilde d \end{array}}_{\underline{\tilde U}} \underline{B}_x = \underbrace{\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}}_{\underline{\tilde P}} \rightarrow \underline{\tilde U}\,\underline{B}_x = \underline{\tilde P} \tag{21.26}$$

$\underline{B}_x$ matrisi $\underline{\tilde L}$ den bağımsızdır. Bu denklem sisteminden yukarı doğru hesap yoluyla $\underline{B}_x$ bulunur. Sağ taraf 7x2 boyutlu olduğundan $\underline{B}_x$ 7x2 boyutlu olacaktır.

Sayısal örnek:

$$\underline{N} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0.5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1 \end{array}$$

denge matrisinin 21.3 ve 21.4 ü sağlayan $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrisleri Gauss indirgeme(kolonda pivot arama-satır değiştirme) yöntemi ile belirlenecektir. n=3, m=5, r=m-n=2 dir, 2 kolon doğrusal bağımlıdır(=hiperstatiklik derecesi). Anlaşılmasını sağlamak için, çözümde teorik yol bire-bir aynen uygulanacaktır.

1. adım: pivot=2, 1. diyagonaldedir.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1 \end{array}$$

1.adım sonrası

2. adım: 2. diyagonal eleman sıfır. 2. kolonda pivot aranır. 3. diyagonal altındaki sayılar da sıfırdır, pivot yoktur. 2. kolon doğrusal bağımlıdır. n+1=4. satırda 5x5 boyutlu birim matrisin 2 satırı olduğu varsayılır. 2. ve 4.satıra yer değiştirilir.

2. diyagonal=1, altındaki sayılar=0 olduğundan 2. adım sona ermiştir.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1 \\ 2 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

2. adımı sonrası

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1 \\ 2 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

3. adım: 3. kolonda pivot aranır. Pivot=2, 4. satırdadır. 3. ve 4. satıra yer değiştirilir.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0.25 & -1.25 & 0.75 \end{array}$$

3.adım sonrası

4. adım: 4. kolonda pivot aranır. Pivot=-1.25, 4. satırdadır. 4.diyagonal altında sayı yok. 4. adım sona ermiştir.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0.25 & -1.25 & 0.75 \end{array}$$

4.adım sonrası

5. adım: 5. kolonda diyagonal yani pivot yoktur. 5. kolon doğrusal bağımlıdır. 5x5 boyutlu birim matrisin 5. satırının 5. satırda olduğu varsayılır.

$$\underline{\tilde N} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0.25 & -1.25 & 0.75 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

5.adım sonrası

İndirgeme tamamlanmıştır. 2. ve 5 kolonun doğrusal bağımlı olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla $F_2=x_1$ ve $F_5=x_2$ hiperstatik bilinmeyenler olarak seçilmiştir. Diyagonal altındaki sayılar $\underline{\tilde L}$ ye, digonal ve üstündeki sayılar $\underline{\tilde U}$ ya aittir. $\underline{\tilde L}$ nin diyagonal elemanları 1 dir, depolanmamıştır.

[1] Alt üçgen matrisin tersi gene bir alt üçgendir

$$\underline{\tilde{L}}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0.5&0&1&&\\0&0&0.25&1&\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array},\quad \underline{\tilde{U}}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\&1&0&0&0\\&&2&1&1\\&&&-1.25&0.75\\&&&&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$\underline{B_0}$ ın hesabı:

21.18 e göre: $\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\\underline{x}\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}=\begin{bmatrix}\underline{I}\\\underline{0}\end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F}=\underline{B_0}$ olur.

$$\underline{\tilde{P}}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}\end{array}$$

$\underline{\tilde{L}}$ ve $\underline{\tilde{U}}$ nun satırları yer değiştirdiğinden $\underline{\tilde{P}}$ de de aynı satır değişikliği yapılmalıdır.

Satırlar değiştirildikten sonra

$$\underline{\tilde{P}}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}\end{array}$$

21.23 e göre: $\underline{\tilde{L}}\,\underline{\tilde{U}}\,\underline{B_0}=\underline{\tilde{P}}$

$$\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0.5&0&1&&\\0&0&0.25&1&\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{L}}}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\&1&0&0&0\\&&2&1&1\\&&&-1.25&0.75\\&&&&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{U}}}\end{array}\underline{B_0}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}\end{array}$$

$\underline{y}=\underline{\tilde{U}}\,\underline{B_0}$ olsun.

$$\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0.5&0&1&&\\0&0&0.25&1&\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{L}}}\end{array}\underline{y}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}\end{array}\rightarrow\underline{y}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-0.5&1&0\\0.125&-0.25&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\underline{y}}\end{array}$$

Aşağı doğru hesap

$$\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\&1&0&0&0\\&&2&1&1\\&&&-1.25&0.75\\&&&&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{U}}}\end{array}\underline{B_0}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-0.5&1&0\\0.125&-0.25&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\underline{y}}\end{array}\rightarrow\underline{B_0}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\begin{bmatrix}0.5&0&0\\0&0&0\\-0.2&0.4&0.4\\-0.1&0.2&-0.8\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

Yukarı doğru hesap

$\underline{B_x}$ in hesabı:

21.18 e göre $\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\\underline{x}\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}=\begin{bmatrix}\underline{0}\\\underline{I}\end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F}=\underline{B_x}$ olur.

$$\underline{\tilde{P}}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}1&2\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}\end{array}$$

$\underline{\tilde{U}}$ nun satırları yer değiştirdiğinden $\underline{\tilde{P}}$ de de aynı satır değişikliği yapılmalıdır.

Satırlar değiştirildikten sonra

$$\underline{\tilde{P}}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}1&2\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}\end{array}$$

21.26 ya göre $\underline{B_x}$ in hesabı $\underline{\tilde{L}}$ den bağımsızdır: $\underline{\tilde{U}}\,\underline{B_x}=\underline{\tilde{P}}$

$$\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\&1&0&0&0\\&&2&1&1\\&&&-1.25&0.75\\&&&&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{U}}}\end{array}\underline{B_x}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}1&2\end{array}\\\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{P}}}\end{array}\rightarrow\underline{B_x}=\begin{array}{c}\\1\\4\\2\\3\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}1&2\end{array}\\\begin{bmatrix}-0.5&0\\1&0\\0&-0.8\\0&0.6\\0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

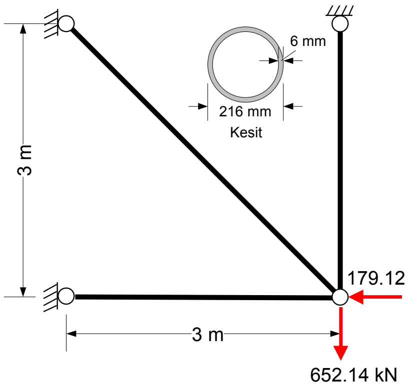
Yukarı doğru hesap

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

Sayısal örnek: Teorik bilgimiz yetersiz olduğu için çözümünü ertelediğimiz örnek 20.12 ye geri dönelim.

Örnek 21.1: Şekil 21.1 de verilen düzlem kafes sistem çelik borulardan imal edilmiştir. Eleman kuvvetlerini, reaksiyonları, göreceli yer değiştirmeleri ve düğüm yer değiştirmelerini bulunuz.

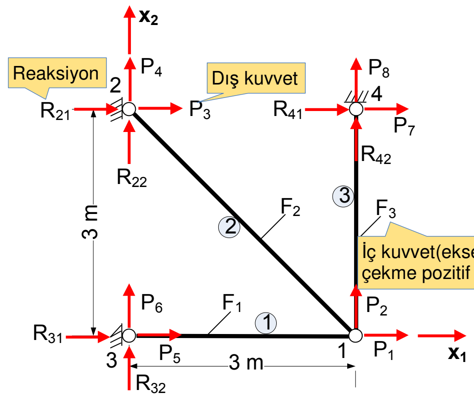
Yapı çeliğinin elastisite modülü E=2.1·10^8 kN/m^2.
Kesit alanı $A = \frac{\pi}{4}(0.216^2 - 0.204^2) = 39584 \cdot 10^{-7}\ m^2$



Şekil 21.1: Çözülmesi istenen kafes sistem

Şekil 21.2 de sistemin verilmiş dış kuvvetleri ile hesaplanması istenen eleman kuvvetleri ve reaksiyonlar pozitif yönlerinde gösterilmiştir.

$P_1, P_2, \dots, P_8$: değerleri verilmiş düğüm kuvvetleridir.
$F_1, F_2, F_3, R_{21} \dots, R_{42}$: hesaplanması istenen eleman ve reaksiyon kuvvetleridir(bilinmeyenler). Bunlardan F_1, F_2, F_3: eleman iç kuvvetleri, $R_{21}, R_{22}, R_{31}, R_{32}, R_{41}, R_{42}$:reaksiyon kuvvetleridir.



Şekil 21.2: Dış ve iç dış kuvvetler

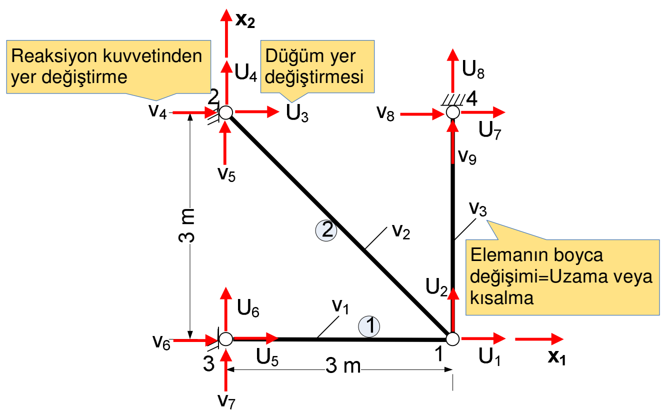
Şekil 21.3 de sistemin hesaplanması istenen düğüm yer değiştirmeleri, elemanların göreceli yer değiştirmeleri(elemanın uzama veya kısalma miktarı) ve reaksiyonlar doğrultusundaki göreceli yer değiştirmeleri(reaksiyonlar doğrultusunda yer değiştirme) gösterilmiştir.

$U_1, U_2, \dots, U_8$: Hesaplanması istenen yer değiştirmelerdir.
$v_1, v_2, \dots, v_9$: hesaplanması istenen göreceli yer değiştirmelerdir. Bunlardan v_1, v_2, v_3: elemanların göreceli yer değiştirmeleri(boyca uzama veya kısalma miktarı), $v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$: reaksiyonlar doğrultusunda göreceli yer değiştirme(uzama-kısalma) dir. Reaksiyolar doğrultusunda $v_i = 0$.

Tanımlanan büyüklükleri matris notasyonunda yazarsak:

$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{bmatrix}$ Sistemin **yük vektörü**,

$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix}$ Sistemin **yer değiştirme vektörü**



Şekil 21.3: Düğüm yer değiştimeleri ve şekil değiştirmeler

$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{31} \\ R_{32} \\ R_{41} \\ R_{42} \end{bmatrix}$ Sistemin **bilinmeyenler vektörü**,

$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix}$ Sistemin **göreceli yer değiştirme vektörü**

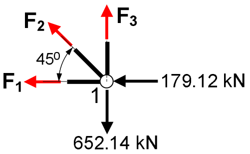
Sitemin denge denklemleri, şimdilik, yapı statiğinden bilinen yolla, düğümlerde denge yazılarak kurulacaktır. Bu, sonlu elemanlar mantığına terstir. Denge denklemlerinin sistematik olarak nasıl kurulacağı 23. bölümde açıklanacaktır.

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

Sistemin denge denklemleri:

Sistemin serbestlik derecesi=8 kadar denge denklemi vardır. Statik derslerinden bilindiği şekli ile sistemin denge denklemlerini kuralım. Her noktada $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ olmalıdır. İşaret kuralı olarak elemanların eksenel kuvvetini çekme pozitif alalım.

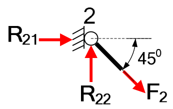
1 noktasında denge:



$$\sum x_1 = 0: \; 179.12 + F_1 + F_2 Cos45 = 0 \rightarrow F_1 + 0.7071 F_2 = -179.12$$

$$\sum x_2 = 0: \; 652.14 - F_2 Sin45 - F_3 = 0 \rightarrow -0.7071 F_2 - F_3 = -652.14$$

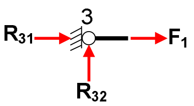
2 noktasında denge:



$$\sum x_1 = 0: \; -F_2 Cos45 - R_{21} = 0 \rightarrow -0.7071 F_2 - R_{21} = 0$$

$$\sum x_2 = 0: \; F_2 Sin45 - R_{22} = 0 \rightarrow 0.7071 F_2 - R_{22} = 0$$

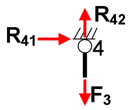
3 noktasında denge:



$$\sum x_1 = 0: - F_1 - R_{31} = 0$$

$$\sum x_2 = 0: - R_{32} = 0$$

4 noktasında denge:



$$\sum x_1 = 0: \; - R_{41} = 0$$

$$\sum x_2 = 0: \; F_3 - R_{42} = 0$$

Bu denklemler matris notasyonunda:

Bilinmeyenlerin numaraları

Denklem no

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}
\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.7071 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.7071 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix} \end{array}}_{\underline{N}}
\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{31} \\ R_{32} \\ R_{41} \\ R_{42} \end{bmatrix}}_{\underline{F}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} -179.12 \\ -652.14 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{P}}
\qquad (21.27)$$

1 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

2 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

3 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

4 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

Sistemin denge matrisi

Sistemin bilinmeyenlerinin vektörü

Sistemin yük vektörü

$$\underline{N}\,\underline{F} = \underline{P} \qquad (21.28)$$

Sistemin denge denklemi

Sistemin serbestlik derecesi(=denklem sayısı) n=8 fakat m=9 bilinmeyen var, n<m dir. Denklem sayısı çözüm için yeterli değildir, sistem hiperstatiktir **hiperstatiklik derecesi** r=m-n=1 dir.

Gauss indirgeme metodu temelli, kolonda pivot arama-satırlara yer değiştirme yöntemi ile $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ hesabı:

LU çarpanlara ayırma işlemi:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix} \end{array}$$

5. adım sonrası: ilk 5 adım sorunsuz yürütüldü

6. adım öncesi: 6. diyagonal eleman sıfırdır. kolonda pivot aranır. 8. satırda pivot= -1 bulunur. 6. ve 8 satırlara yer değiştirilir.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\8\\7\\6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}$$

6. adım sonrası

7. adım öncesi: 7. diyagonal eleman sıfırdır. kolonda pivot aranır. 8. satırda pivot= -1 bulunur. 7. ve 8 satırlara yer değiştirilir.

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}
$$

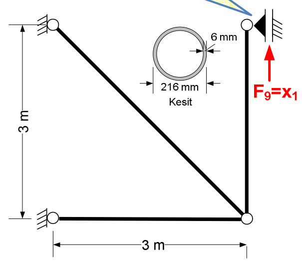
7. adım sonrası

8. adım sonrası

9. adım öncesi: 9. satır, yok, pivot yok.
Bunun anlamı: 9. kolon doğrusal bağımlıdır. 9x9 birim matrisin 9 satırı 9. satır olarak alınır. $F_9=x_1$ hiperstatik bilinmeyen olmuştur.

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

9. adım sonrası.



Şekil 21.4: Seçilen izostatik esas sistem

İndirgeme tamamlanmıştır. Seçilen izostatik esas sistem şekil 21.4 de verilmiştir. Diyagonalin altındaki sayılar $\tilde{\underline{L}}$ ye, diyagonal ve üstündeki sayılar $\tilde{\underline{U}}$ ya aittir. $\tilde{\underline{L}}$ nin diyagonal elemanları 1 dir, depolanmamıştır.

$$
\tilde{\underline{L}} =
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
8 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
,\quad
\tilde{\underline{U}} =
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & & & & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & & & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & & & & & & -1 & 0 & 0 & -1 \\
6 & & & & & & & -1 & 0 & 0 \\
7 & & & & & & & & -1 & 0 \\
9 & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

B_0 ın hesabı:

21.18 e göre: $\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{P} \\ \hline \underline{x} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{P}}} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F} = \underline{B}_0$ olur.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{P} \\ \hline \underline{x} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{P}}} =
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
1 & 1 \\
2 & & 1 \\
3 & & & 1 \\
4 & & & & 1 \\
5 & & & & & 1 \\
6 & & & & & & 1 \\
7 & & & & & & & 1 \\
8 & & & & & & & & 1 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$\tilde{\underline{L}}$ ve $\tilde{\underline{U}}$ nun satırları yer değiştirdiğinden $\tilde{\underline{P}}$ de de aynı satır değişikliği yapılmalıdır.

Satırlar değiştirildikten sonra

$$
\tilde{\underline{P}} =
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
1 & 1 \\
2 & & 1 \\
3 & & & 1 \\
4 & & & & 1 \\
5 & & & & & 1 \\
8 & & & & & & & & 1 \\
6 & & & & & & 1 \\
7 & & & & & & & 1 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

21.23 e göre: $\tilde{\underline{L}}\,\tilde{\underline{U}}\,\underline{B}_0 = \tilde{\underline{P}}$

$$
\underbrace{
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
8 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
}_{\tilde{\underline{L}}}
\underbrace{
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & -1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & & & -1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & -1 & 0 \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}
}_{\tilde{\underline{U}}}
\underline{B}_0 =
\underbrace{
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
1 & 1 \\
2 & & 1 \\
3 & & & 1 \\
4 & & & & 1 \\
5 & & & & & 1 \\
8 & & & & & & & & 1 \\
6 & & & & & & 1 \\
7 & & & & & & & 1 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
}_{\tilde{\underline{P}}}
$$

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

Aşağı doğru hesap: $\underline{y} = \underline{\tilde{U}}\,\underline{B}_0$ olsun.

$$
\underbrace{\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & & & \\
2 & 0 & 1 & & & & & & & \\
3 & 0 & 1 & 1 & & & & & & \\
4 & 0 & -1 & -1 & 1 & & & & & \\
5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & & & & \\
8 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & & & \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}}_{\tilde{L}}
\;\underline{y} =
\underbrace{\begin{array}{c|cccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & & \\
2 & & 1 & & & & & & \\
3 & & & 1 & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & \\
5 & & & & & 1 & & & \\
8 & & & & & & & & 1 \\
6 & & & & & & & 1 & \\
7 & & & & & & 1 & & \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}}_{\tilde{P}}
\rightarrow \underline{y} =
\underbrace{\begin{array}{c|cccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}}_{\underline{y}}
$$

Yukarı doğru hesap:

$$
\underbrace{\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline
1 & 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & & & & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & & & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & & & & & & -1 & 0 & 0 & -1 \\
6 & & & & & & & -1 & 0 & 0 \\
7 & & & & & & & & -1 & 0 \\
9 & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}}_{\tilde{U}}
\;\underline{B}_0 =
\underbrace{\begin{array}{c|cccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}}_{\underline{y}}
$$

$$
\underline{B}_0 =
\underbrace{\begin{array}{c|cccccccc|}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 0 & -1.4142 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4142 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
8 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}}_{\underline{B}_0}
$$

$\underline{B}_x$ in hesabı:

21.18 e göre $\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\tilde{P}} = \begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}$ alınırsa $\underline{F} = \underline{B}_x$ olur.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{P}\\ \underline{x}\end{bmatrix}}_{\tilde{P}} =
\underbrace{\begin{array}{c|c|}
 & 1 \\ \hline
1 & 0 \\
2 & 0 \\
3 & 0 \\
4 & 0 \\
5 & 0 \\
6 & 0 \\
7 & 0 \\
8 & 0 \\
9 & 1 \\ \hline
\end{array}}_{\tilde{P}}
$$

$\underline{\tilde{U}}$ nun satırları yer değiştirdiğinden $\underline{\tilde{P}}$ de de aynı satır değişikliği yapılmalıdır.

Satırlar değiştirildikten sonra

$$
\underline{\tilde{P}} =
\underbrace{\begin{array}{c|c|}
 & 1 \\ \hline
1 & 0 \\
2 & 0 \\
3 & 0 \\
4 & 0 \\
5 & 0 \\
8 & 0 \\
6 & 0 \\
7 & 0 \\
9 & 1 \\ \hline
\end{array}}_{\tilde{P}}
$$

21.26 ya göre $\underline{B}_x$ in hesabı $\underline{\tilde{L}}$ den bağımsızdır, $\underline{\tilde{U}}\,\underline{B}_x = \underline{\tilde{P}}$. Yukarı doğru hesap ile:

$$
\underbrace{\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline
1 & 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & & & & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & & & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & & & & & & -1 & 0 & 0 & -1 \\
6 & & & & & & & -1 & 0 & 0 \\
7 & & & & & & & & -1 & 0 \\
9 & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}}_{\tilde{U}}
\;\underline{B}_x =
\underbrace{\begin{array}{c|c|}
 & 1 \\ \hline
1 & 0 \\
2 & 0 \\
3 & 0 \\
4 & 0 \\
5 & 0 \\
8 & 0 \\
6 & 0 \\
7 & 0 \\
9 & 1 \\ \hline
\end{array}}_{\tilde{P}}
\rightarrow \underline{B}_x =
\underbrace{\begin{array}{c|c|}
 & 1 \\ \hline
1 & 1 \\
2 & -1.4142 \\
3 & 1 \\
4 & 1 \\
5 & -1 \\
8 & -1 \\
6 & 0 \\
7 & 0 \\
9 & 1 \\ \hline
\end{array}}_{\underline{B}_x}
$$

Sistemin esneklik matrisi: 20.6 ve 20.9 dan sistemin $\underline{f}$ esneklik matrisini kuralım.

1.elemanda: $L = 3\ m, E = 2.1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}, A = 39584 \cdot 10^{-7}\ m^2 \rightarrow v_1 = \frac{L}{EA} = \frac{3}{2.1 \cdot 10^8 \cdot 39584 \cdot 10^{-7}} = 3.61 \cdot 10^{-6}\ m/kN$

2.elemanda: $L = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.24\ m, E = 2.1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}, A = 39584 \cdot 10^{-7}\ m^2 \rightarrow v_2 = \frac{L}{EA} = \frac{4.24}{2.1 \cdot 10^8 \cdot 39584 \cdot 10^{-7}} = 5.1 \cdot 10^{-6}\ m/kN$

3.elemanda: $L = 3\ m, E = 2.1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}, A = 39584 \cdot 10^{-7}\ m^2 \rightarrow v_3 = \frac{L}{EA} = \frac{3}{2.1 \cdot 10^8 \cdot 39584 \cdot 10^{-7}} = 3.61 \cdot 10^{-6}\ m/kN$

Mesnetlerde: F_4 doğrultusunda $v_4 = 0, F_5$ doğrultusunda $v_5 = 0,\ F_6$ doğrultusunda $v_6 = 0,\ F_7$ doğrultusunda $v_7 = 0,\ F_8$ doğrultusunda $v_8 = 0,\ F_9$ doğrultusunda $v_9 = 0$ dır. Bu değerler 20.9 da yerine yazılarak $\underline{f}$ esneklik matrisi

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} 3.61 \cdot 10^{-6} & & & & & & & & \\ & 5.1 \cdot 10^{-6} & & & & & & & \\ & & 3.61 \cdot 10^{-6} & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} m/kN$$

Sistemin süreklilik koşulu: x_1 hiperstatik bilinmeyeni 20.22 den heaplanır.

$$\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_x \underline{x} = -\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_0 \underline{P}$$

$$\underline{B}_0 \underline{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.4142 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4142 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} -179.12 \\ -652.14 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -831.26 \\ 922.27 \\ 0 \\ -652.14 \\ 652.14 \\ 831.26 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_0\underline{P}} kN$$

$$\underline{B}_x^T \underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1.4142 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_x^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 3.61 \cdot 10^{-6} & & & & & & & & \\ & 5.1 \cdot 10^{-6} & & & & & & & \\ & & 3.61 \cdot 10^{-6} & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{f}}$$

$$\underline{B}_x^T \underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.61 \cdot 10^{-6} & -7.21 \cdot 10^{-6} & 3.61 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_x^T\underline{f}}$$

$$\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.61 \cdot 10^{-6} & -7.21 \cdot 10^{-6} & 3.61 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_x^T\underline{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1.4142 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_x} = 1742 \cdot 10^{-8}$$

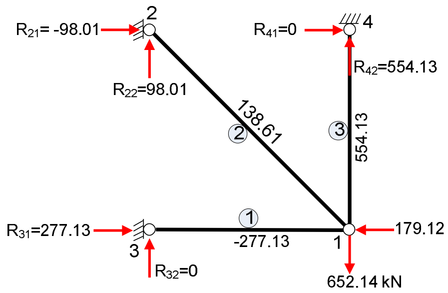
$$\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_0 \underline{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.61 \cdot 10^{-6} & -7.21 \cdot 10^{-6} & 3.61 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_x^T\underline{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} -831.26 \\ 922.27 \\ 0 \\ -652.14 \\ 652.14 \\ 831.26 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_0\underline{P}} = -9653 \cdot 10^{-6}$$

21. İzostatik esas sitemin otomatik seçimi, B_0 ve B_x matrislerinin hesabı

$$\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_x \underline{x} = -\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_0 \underline{P} \;\rightarrow\; 1742 \cdot 10^{-8}\, x_1 = -(-9653 \cdot 10^{-6}) \;\rightarrow\; x_1 = 554.13\ kN$$

Eleman ve reaksiyon kuvvetleri: 20.19 dan

$$\underline{F} = \underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x\underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -831.26 \\ 922.27 \\ 0 \\ -652.14 \\ 652.14 \\ 831.26 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_0\underline{P}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1.4142 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_x} \underbrace{554.13}_{x_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -277.13 \\ 138.61 \\ 554.13 \\ -98.01 \\ 98.01 \\ 277.13 \\ 0 \\ 0 \\ 554.13 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} kN$$



Sistemin düğümlerindeki yer değiştirmeler: 20.23 den

$$\underline{U} = \underline{B}_0^T \underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}}$$

Göreceli yer değiştirmeler

$$\underline{v} = \underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.61\cdot 10^{-6} &&&&&&&& \\ & 5.1\cdot 10^{-6} &&&&&&& \\ && 3.61\cdot 10^{-6} &&&&&& \\ &&& 0 &&&&& \\ &&&& 0 &&&& \\ &&&&& 0 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&& 0 \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} -277.13 \\ 138.61 \\ 554.13 \\ -98.01 \\ 98.1 \\ 277.13 \\ 0 \\ 0 \\ 554.13 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.000707 \\ 0.002 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} m$$

Yer değiştirmeler

$$\underline{U} = \underline{B}_0^T\, \underline{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.4142 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1.4142 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_0^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.000707 \\ 0.002 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.002 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} m$$