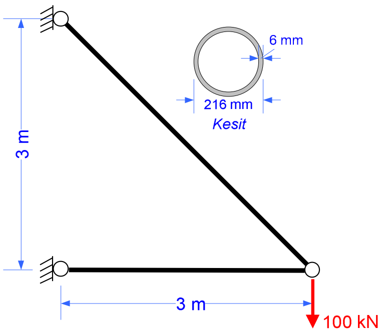
20.1 Tanımlar ve temel bağıntılar: İzostatik sistem

Kuvvet metodunda eleman iç kuvvetleri ve reaksiyonlar ana bilinmeyenlerdir. Bu kuvvetler sistemin düğüm noktalarında yazılan denge denklemlerinden bulunmaya çalışılır. Eğer bilinmeyen sayısı kadar denge denklemi varsa bilinmeyenler denge denklemlerinden hesaplanabilir. Bu tür sistemlere **izostatik sistem**[1] denir.

Örnek 20.1: Şekil 20.1 de verilen düzlem kafes sistem çelik borulardan imal edilmiştir. Eleman kuvvetlerini, reaksiyonları, elemanların boyca değişimlerini ve düğüm yer değiştirmelerini bulunuz**.** Bu sayısal örnek çözülürken, gerektiğinde, teorik bilgi de verilecektir.

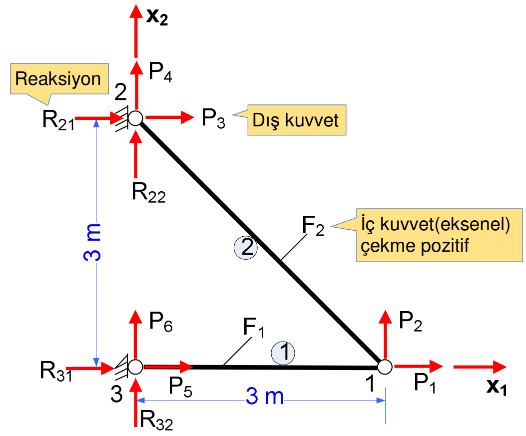


Şekil 20.1: Çözülmesi istenen kafes sistem

Yapı çeliğinin elastisite modülü E=2.1·10^8 kN/m^2.
Kesit alanı $A=\frac{\pi}{4}(0.216^2-0.204^2)=39584\cdot 10^{-7}\ m^2$

Şekil 20.2 de sistemin verilmiş dış yükler ile hesaplanması istenen eleman iç kuvvetleri ve reaksiyonlar pozitif yönlerinde gösterilmiştir.

P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6: değerleri bilinen düğüm yükleridir.
F_1,F_2: hesaplanması istenen eleman iç kuvvetleridir(bilinmeyenler).
$R_{21},R_{22},R_{31},R_{32}$: hesaplanması istenen reaksiyon kuvvetleridir.



Şekil 20.2: Dış ve iç dış kuvvetler

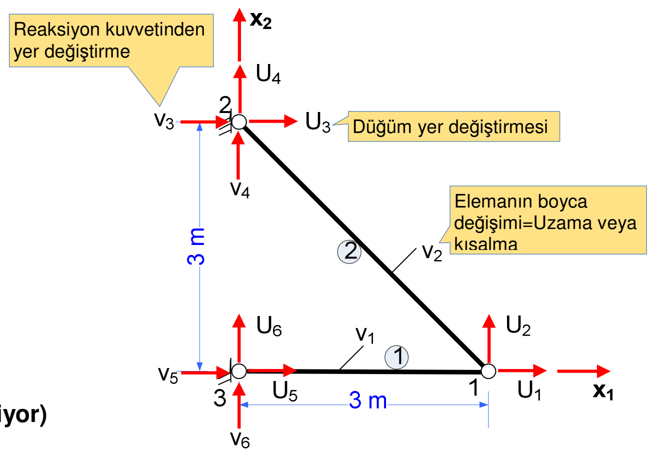
Şekil 20.3 de sistemin hesaplanması istenen düğüm yer değiştirmeleri, elemanların göreceli yer değiştirmeleri(elemanın uzama veya kısalma miktarı=şekil değiştirme) ve reaksiyonlar doğrultusundaki göreceli yer değiştirmeleri(reaksiyonlar doğrultusunda yer değiştirme) gösterilmiştir.

$U_1,U_2,\dots,U_6$: Hesaplanması istenen yer değiştirmelerdir.
v_1,v_2: elemanların hesaplanması istenen göreceli yer değiştirmelerdir (boyca uzama veya kısalma miktarı).
v_3,v_4,v_5,v_6: reaksiyonlar doğrultusunda göreceli yer değiştirmelerdir. Mesnet yer değiştiremeyeceği için bunlar sıfırdır, ancak, iş ifadesinin yazılabilmesi için tanımlanmak zorundadır.

Tanımlanan büyüklükleri matris notasyonunda yazarsak:

$$\underline{P}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\\P_5\\P_6\end{bmatrix}$$ Sistemin **yük vektörü(biliniyor)**,

$$\underline{U}=\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\end{bmatrix}$$ Sistemin **yer değiştirme vektörü(bilinmiyor)**



Şekil 20.3: Düğüm yer değiştimeleri ve şekil değiştirmeler

$$\underline{F}=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\R_{21}\\R_{22}\\R_{31}\\R_{32}\end{bmatrix}$$ Sistemin **bilinmeyenler vektörü**,

$$\underline{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix}$$ Sistemin **göreceli yer değiştirme vektörü(bilinmiyor)**

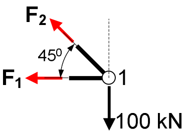
Dikkat edilirse; $\underline{P}$ ile $\underline{U}$ ve $\underline{F}$ ile $\underline{v}$ iş yapacak şekilde tanımlanmışlardır.

[1] Statikçe belirli sistem de denir=Statically determinate system.

Sistemin denge denklemleri:

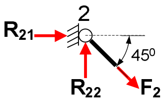
Sistemin serbestlik derecesi=6 kadar denge denklemi vardır. Şimdilik, statik derslerinden bilindiği şekli ile sistemin denge denklemlerini kuralım[1]. Bilindiği gibi, her düğümde $\sum x_1=0$ ve $\sum x_2=0$ olmalıdır. İşaret kuralı olarak elemanların eksenel kuvvetini çekme pozitif alalım.

<u>1 noktasında denge:</u>



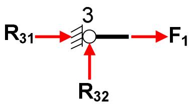
$$\sum x_1=0:\;\; F_1+F_2Cos45=0 \rightarrow F_1+0.7071F_2=0$$
$$\sum x_2=0:\;\; 100-F_2Sin45=0 \;\;\rightarrow\;\; -0.7071F_2=-100$$

<u>2 noktasında denge:</u>



$$\sum x_1=0:\; -F_2Cos45-R_{21}=0 \;\;\rightarrow\;\; -0.7071F_2-R_{21}=0$$
$$\sum x_2=0:\; F_2Sin45-R_{22}=0 \rightarrow 0.7071F_2-R_{22}=0$$

<u>3 noktasında denge:</u>



$$\sum x_1=0:\;\; -F_1-R_{31}=0$$
$$\sum x_2=0:\;\; -R_{32}=0$$

<u>Bu denklemler matris notasyonunda:</u>

Denklem no

Bilinmeyenlerin numaraları

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \underbrace{\begin{bmatrix}1&0.7071&0&0&0&0\\0&-0.7071&0&0&0&0\\0&-0.7071&-1&0&0&0\\0&0.7071&0&-1&0&0\\-1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}}_{\underline{N}}\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\R_{21}\\R_{22}\\R_{31}\\R_{32}\end{bmatrix}}_{\underline{F}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\-100\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{\underline{P}}\qquad(20.1)$$

1 noktasında $\sum x_1=0$ ve $\sum x_2=0$ koşulu

2 noktasında $\sum x_1=0$ ve $\sum x_2=0$ koşulu

3 noktasında $\sum x_1=0$ ve $\sum x_2=0$ koşulu

Sistemin denge matrisi

Sistemin bilinmeyenlerinin vektörü

Sistemin yük vektörü

$$\underline{N}\,\underline{F}=\underline{P} \qquad (20.2)$$

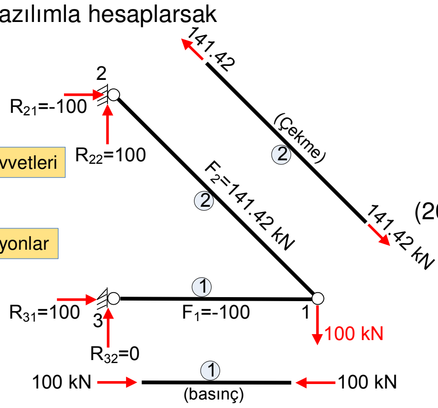
olur. $\underline{N}$ ye sistemin **denge matrisi**[2], $\underline{F}$ ye sistemin **bilinmeyenler vektörü** ve $\underline{P}$ ye sistemin **yük vektörü** denir. **Denklem sayısını n** ile ve **bilinmeyenler sayısını m** ile gösterirsek; örneğimizde n=6 ve m=6 dır. Bilinmeyen sayısı kadar denklem sayısı vardır, **sistem izostatiktir**. Bunun anlamı, bilinmeyenlerin denge denklemlerinden hesaplanabileceğidir. 6x6 boyutlu $\underline{N}$ kare matrisi tekil değildir $(det\,\underline{N}\neq 0)$, tersi vardır.

$\underline{F}$ bilinmeyenleri 20.1 bağıntısından Gauss indirgeme metodu ile veya $\underline{N}$ nin tersi kullanılarak hesaplanır. $\underline{N}$ nin tersini $\underline{B}_0$ ile gösterelim: $\underline{B}_0=\underline{N}^{-1}$. Ters matrisi Matematica veya Matlab benzeri bir yazılımla hesaplarsak

$$\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\R_{21}\\R_{22}\\R_{31}\\R_{32}\end{bmatrix}}_{\underline{F}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&-1.4142&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&-1&0&-1&0&0\\-1&-1&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}}_{\underline{B}_0=\underline{N}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\-100\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{\underline{P}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-100\\141.42\\-100\\100\\100\\0\end{bmatrix}}_{\underline{F}}\qquad(20.3)$$

Eleman kuvvetleri

Reaksiyonlar



Şekil 20.4: Eleman ve reaksiyon kuvvetleri

$$\underline{F}=\underline{B}_0\underline{P} \qquad (20.4)$$

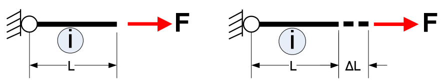
[1] 23. bölümde denge denklemlerinin sistematik(otomatik) nasıl kurulacağı açıklanacaktır.

[2] Equilibrium matrix

20. Tanımlar ve temel bağıntılar: İzostatik sistem, hiperstatik sistem

Elemanların esneklik matrisi ve göreceli yer değiştirmeleri:

Göreceli yer değiştirme elemanın bir ucunun diğer ucuna göre yaptığı yer değiştirmedir. Kafes eleman ekseni doğrultusunda sadece uzar veya kısalır. O halde göreceli yer değiştirme elemanın boy değiştirme miktarıdır. Mukavemet bilgilerini kullanarak i.elemanın göreceli yer değiştirmesini bulalım:



Kafes elemanın göreceli yer değiştirmesi

Soldaki şekilde sol ucu sabitlenmiş(tutulmuş) A kesitli bir kafes eleman F eksenel kuvveti ile çekilirse boyu ΔL kadar uzar, sağ uç ΔL kadar yer değiştirir. Sabit uç yer değiştiremeyeceğinden ΔL yer değiştirmesine **göreceli yer değiştirme** denir.

Mukavemetten bilindiği üzere:

$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F/A}{E}$ dir Buradan $\Delta L = \frac{L}{EA}F$ bulunur. Sonlu elemanlarda göreceli yer değiştirme, genelleştirme açısından, v harfi ile $\frac{L}{EA}$ terimi de f harfi ile gösterilir: $v = \Delta L = fF$. Buradaki

$$f = \frac{L}{EA} \tag{20.5}$$

değerine kafes elemanın **esnekliği(Fleksibilitesi[1])** denir ve rijitliğin tersidir. Birimi uzunluk/kuvvettir, birim kuvvetten oluşan göreceli yer değiştirme anlamındadır. f büyüdükçe eleman esnekleşir(kolay uzar-kısalır), küçüldükçe rijitleşir. $f = 0$ durumunda hiç uzamaz-kısalmaz(sonsuz rijit), $\Delta L = 0$ olur. Mesnetler sonsuz rijit olduğundan **mesnet kuvvetlerine ait $f = 0$ dır.**

i. eleman vurgulamak üzere i indisini kulalım:

$$f_i = \frac{L_i}{E_i A_i} \tag{20.6}$$

Kafes elemanın esnekliği

$$v_i = f_i\, F_i \tag{20.7}$$

Kafes elemanın göreceli yer değiştirmesi

Kafes elemanda v_i ve F_i tek değerdir(sadece boyca değişme var). Çerçeve, levha, plak,… elemanlarda boyca değişim, dönme gibi birden çok göreceli yer değiştirme vardır. Genellik açısından 20.7 ifadesi matris olarak gösterilir:

$$\underline{v}^i = \underline{f}^i\, \underline{F}^i \tag{20.8}$$

Elemanın esneklik matrisi

$\underline{v}^i$ **i.elemanın göreceli yer değişmeleri**, $\underline{f}^i$ kare matrisi **i.elemanın esneklik(fleksibilite)** matrisi, $\underline{F}^i$ **i.elemanın bilinmeyen kuvvetleridir.**

Sistemin göreceli yer değiştirmeleri ve esneklik matrisi:

Sistemin s tane elemanı varsa 20.8 ifadesi her bir eleman için geçerlidir. Bunları topluca 20.9 daki tek bir matris bağıntısı olarak yazabiliriz.

Diyagonallerde elemanların esneklik matrisleri var

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}^1 &= \underline{f}^1\,\underline{F}^1 \\ \underline{v}^2 &= \underline{f}^2\,\underline{F}^2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \underline{v}^s &= \underline{f}^s\,\underline{F}^s \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}^1 \\ \underline{v}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{v}^s \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{f}^1 & & & & \\ & \underline{f}^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \underline{f}^s \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{F}^1 \\ \underline{F}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{F}^s \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{20.9}$$

Sistemin göreceli yer değiştirmeleri

Sistemin esneklik matrisi

Sistemin bilinmeyenleri

$$\underline{v} = \underline{f}\,\underline{F} \tag{20.10}$$

$\underline{v}$ **sistemin göreceli yer değiştirmeleri**, mxm boyutundaki $\underline{f}$ **sistemin esneklik(fleksibilite) matrisi** dır. $\underline{F}$, daha önce tanımlandığı gibi, **sistemin bilinmeyen kuvvetleri(eleman kuvvetleri ve reaksiyonlar),** m bilinmeyen kuvvet sayısıdır. Reaksiyon kuvvetleri yönünde yer değiştirme olamayacağı için reaksiyonlara karşılık gelen esneklikler sıfır alınmalıdır(mesnet çok rijit olduğu için).

[1] Flexibility

Şimdi sayısal örneğimize geri dönelim, 20.9 bağıntısını 20.6 ya göre kuralım:

1.elemanda: $L = 3\ m, E = 2.1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}, A = 39584 \cdot 10^{-7}\ m^2 \rightarrow v_1 = \frac{L}{EA} = \frac{3}{2.1 \cdot 10^8 \cdot 39584 \cdot 10^{-7}} = 3.61 \cdot 10^{-6}\ m/kN$

2.elemanda: $L = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.24\ m, E = 2.1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}, A = 39584 \cdot 10^{-7}\ m^2 \rightarrow v_2 = \frac{L}{EA} = \frac{4.24}{2.1 \cdot 10^8 \cdot 39584 \cdot 10^{-7}} = 5.1 \cdot 10^{-6}\ m/kN$

Mesnetlerde: F_3 doğrultusunda $v_3 = 0, F_4$ doğrultusunda $v_4 = 0,\ F_5$ doğrultusunda $v_5 = 0,\ F_6$ doğrultusunda $v_6 = 0$ dır. Bu değerler ve 20.3 den $\underline{F}$ 20.9 da yerine yazılarak

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.61 \cdot 10^{-6} & & & & & \\ & 5.1 \cdot 10^{-6} & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \underbrace{\begin{bmatrix} -100 \\ 141.42 \\ -100 \\ 100 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3.61 \cdot 10^{-4} \\ 7.21 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v} = \underline{f}\underline{F}} m \tag{20.11}$$

Sistemin esneklik matrisi

Sistemin bilinmeyenleri

Sistemin göreceli yer değiştirmeleri

Sistemin yer değiştirmeleri:

Şekil 20.2 ve Şekil 20.3 de görülen $P_1, P_2, \ldots, P_6,$ dış yükleri kendi doğrultusunda tanımlı $U_1, U_2, \ldots, U_6,$ yer değiştirmeleri ile iş yapar. Bu dış kuvvetlerin işidir: $A_d = P_1 U_1 + P_2 U_2 + \cdots + P_6 U_6 = \underline{P}^T \underline{U}$.

Şekil 20.2 ve Şekil 20.3 de görülen $F_1\ F_2, \ldots, F_6$ iç kuvvetleri kendi doğrultusunda tanımlı $v_1, v_2, \ldots, v_6,$ göreceli yer değiştirmeleri ile iş yapar. Bu iç kuvvetlerin işidir: $A_i = F_1 v_1 + F_2 v_2 + \cdots + F_6 v_6 = \underline{F}^T \underline{v}$.

$A_d = A_i,\ \underline{P}^T \underline{U} = \underline{F}^T \underline{v}$ dir. 20.2 ye göre $\underline{P}^T = \underline{F}^T \underline{N}^T$ ve 20.10 a göre $\underline{v} = \underline{f}\underline{F}$ olduğundan $\underbrace{\underline{F}^T \underline{N}^T}_{\underline{P}^T} \underline{U} = \underline{F}^T \underbrace{\underline{f}\underline{F}}_{\underline{v}}$ olur Buradan

$$\underline{N}^T \underline{U} = \underbrace{\underline{f}\underline{F}}_{\underline{v}} \tag{20.12}$$

Sistemin süreklilik koşulu

olması gerektiği anlaşılır. 20.12 bağıntısına **sistemin süreklilik koşulu**[1] denir. Çünkü sistemin düğümlerindeki $\underline{U}$ yer değiştirmeleri ile elemanlar veya reaksiyonlara ait göreceli yer değiştirmeler arasındaki bir ilişkidir.

Bu sayısal örnekte $\underline{N}$ kare matrisinin tekil olmadığı $(det\ \underline{N} \neq 0)$, tersinin alınabileceği yukarıda belirtilmişti. O halde $\underline{U} = (\underline{N}^T)^{-1} \underline{f}\underline{F}$ yazılabilir. Bir matrisin transpozunun tersi tersinin transpozuna eşittir:

$$\underline{U} = (\underline{N}^T)^{-1} \underbrace{\underline{f}\underline{F}}_{\underline{v}} = (\underline{N}^{-1})^T \underbrace{\underline{f}\underline{F}}_{\underline{v}} \tag{20.13}$$

20.3 e bakıldığında $\underline{B}_0 = \underline{N}^{-1}$ olduğu görülür. Yukarıdaki bağıntıda yerine yazılarak yer değiştirmelerin bağıntısı

$$\underline{U} = \underline{B}_0^T \underbrace{\underline{f}\underline{F}}_{\underline{v}} \tag{20.14}$$

Sistemin yer değiştirme vektörü

bulunur.

Örneğimiz için 20.3 den $\underline{B}_0$ matrisi ve 20.11 den $\underline{v} = \underline{f}\underline{F}$ vektörü 20.14 de yerine yazılarak yer değiştirmeler:

$$\underline{U} = \underline{B}_0^T \underline{v} = \underline{B}_0^T \underbrace{\underline{f}\underline{F}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1.4142 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_0^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -3.61 \cdot 10^{-4} \\ 7.21 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v} = \underline{f}\underline{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.000361 \\ -0.00138 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} m$$

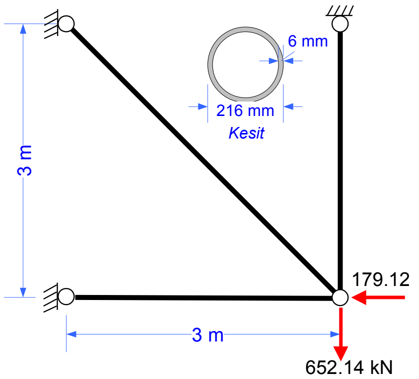
Sistemin yer değiştirmeleri

[1] Compatibility conditions

20.2 Tanımlar ve temel bağıntılar: Hiperstatik sistem

Kuvvet metodunda eleman iç kuvvetleri ve reaksiyonlar ana bilinmeyenlerdir. Bu kuvvetler sistemin düğüm noktalarında yazılan denge denklemlerinden bulunmaya çalışılır. Eğer denge denklemi sayısı bilinmeyen sayısından az ise bilinmeyenler sadece denge denklemlerinden hesaplanamaz, ek koşullara gereksinim vardır. Bu tür sistemlere **Hiperstatik sistem**[1] denir.

Örnek 20.2: Şekil 20.5 de verilen düzlem kafes sistem çelik borulardan imal edilmiştir. Eleman iç kuvvetlerini, reaksiyonları, eleman boyca değişimlerini ve düğüm yer değiştirmelerini bulunuz**.** Bu sayısal örnek çözülürken, gerektiğinde, teorik bilgi de verilecektir.



Şekil 20.5: Çözülmesi istenen kafes sistem

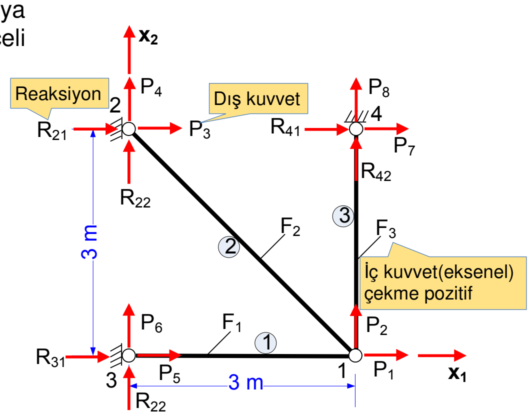
Yapı çeliğinin elastisite modülü E=2.1·10^8 kN/m^2.
Kesit alanı $A = \frac{\pi}{4}(0.216^2 - 0.204^2) = 39584 \cdot 10^{-7}\ m^2$

Şekil 20.6 de sistemin verilmiş dış kuvvetleri ile hesaplanması istenen eleman kuvvetleri ve reaksiyonlar pozitif yönlerinde gösterilmiştir.

$P_1, P_2, \dots, P_8$: değerleri verilmiş düğüm yükleridir.
F_1, F_2, F_3: hesaplanması istenen eleman kuvvetleridir.
$R_{21}, R_{22}, R_{31}, R_{32}, R_{41}, R_{42}$: hesaplanması istenen reaksiyon kuvvetleridir.

Şekil 20.7 de sistemin hesaplanması istenen düğüm yer değiştirmeleri, elemanların göreceli yer değiştirmeleri(elemanın uzama veya kısalma miktarı) ve reaksiyonlar doğrultusundaki göreceli yer değiştirmeleri(reaksiyonlar doğrultusunda yer değiştirme) gösterilmiştir.

$U_1, U_2, \dots, U_8$: Hesaplanması istenen yer değiştirmelerdir.
$v_1, v_2, \dots, v_9$: hesaplanması istenen göreceli yer değiştirmelerdir. Bunlardan v_1, v_2, v_3: elemanların göreceli yer değiştirmeleri(boyca uzama veya kısalma miktarı), $v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$: reaksiyonlar doğrultusunda göreceli yer değiştirmedir. Reaksiyonlar doğrultusunda $v_i = 0$.

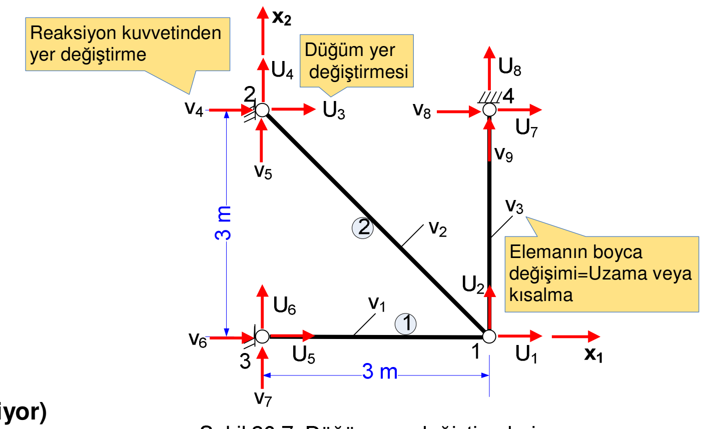


Şekil 20.6: Dış ve iç dış kuvvetler

Tanımlanan büyüklükleri matris notasyonunda yazarsak:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{bmatrix}$$ Sistemin **yük vektörü(biliniyor)**,

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix}$$ Sistemin **yer değiştirme vektörü(bilinmiyor)**



Şekil 20.7: Düğüm yer değiştimeleri ve şekil değiştirmeler

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{31} \\ R_{32} \\ R_{41} \\ R_{42} \end{bmatrix}$$ Sistemin **bilinmeyenler vektörü**,

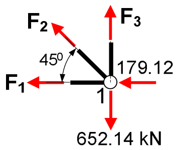
$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix}$$ Sistemin **göreceli yer değiştirme vektörü(bilinmiyor)**

[1] Statikçe belirsiz sistem de denir. Gereğinden çok bağı olan sistem anlamındadır. Statically indeterminate, hyperstatic.

Sistemin denge denklemleri:

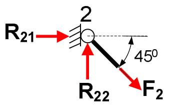
Sistemin serbestlik derecesi=8 kadar denge denklemi vardır. Statik derslerinden bilindiği şekli ile sistemin denge denklemlerini kuralım. Her noktada $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ olmalıdır. İşaret kuralı olarak elemanların eksenel kuvvetini çekme pozitif alalım.

1 noktasında denge:



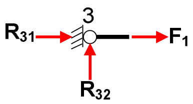
$$\sum x_1 = 0: \; 179.12 + F_1 + F_2 Cos45 = 0 \rightarrow F_1 + 0.7071 F_2 = -179.12$$
$$\sum x_2 = 0: \; 652.14 - F_2 Sin45 - F_3 = 0 \rightarrow -0.7071 F_2 - F_3 = -652.14$$

2 noktasında denge:



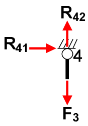
$$\sum x_1 = 0: \; -F_2 Cos45 - R_{21} = 0 \rightarrow -0.7071 F_2 - R_{21} = 0$$
$$\sum x_2 = 0: \; F_2 Sin45 - R_{22} = 0 \rightarrow \; 0.7071 F_2 - R_{22} = 0$$

3 noktasında denge:



$$\sum x_1 = 0: \; -F_1 - R_{31} = 0$$
$$\sum x_2 = 0: -R_{32} = 0$$

4 noktasında denge:



$$\sum x_1 = 0: \; -R_{41} = 0$$
$$\sum x_2 = 0: \; F_3 - R_{42} = 0$$

Bu denklemler matris notasyonunda:

Denklem no

Bilinmeyenlerin numaraları

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}
\underbrace{\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline
1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.7071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.7071 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.7071 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}}_{\underline{N}}
\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{31} \\ R_{32} \\ R_{41} \\ R_{42} \end{bmatrix}}_{\underline{F}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} -179.12 \\ -652.14 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{P}}
\quad (20.15)$$

1 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

2 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

3 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

4 noktasında $\sum x_1 = 0$ ve $\sum x_2 = 0$ koşulu

Sistemin denge matrisi

Sistemin bilinmeyenlerinin vektörü

Sistemin yük vektörü

$\underline{N}\,\underline{F} = \underline{P}$ Sistemin denge denklemi (20.16)

Bu denklem sisteminde n=8 denklem, m=9 bilinmeyen var, n<m dir. Denklem sayısı çözüm için yeterli değildir, yani sistem hiperstatiktir. r=m-n ye **hiperstatiklik derecesi**[1] denir. Çözüm üretebilmek için **r tane ek denklem** bulmalıyız.

Çözüm için gerekli olan **r tane ek denklemi** bulabilmek için biraz matematik ve ek teorik bilgiye ihtiyacımız vardır. Sayısal çözüme ara verelim.

[1] Degree of indeterminacy

20. Tanımlar ve temel bağıntılar: İzostatik sistem, hiperstatik sistem

Matematik bilgi:

20.16 gibi (n<m olan) genel doğrusal denklem sisteminin r=m-n kolonu **doğrusal bağımlıdır**[1]. Bir **özel(inhomojen)** ve bir **genel(homojen)** çözümü vardır[2]:

$$\underline{N}\,\underline{B}_0 = \underline{I} \tag{20.17}$$
özel(inhomojen) çözüm

$$\underline{N}\,\underline{B}_x = \underline{0} \tag{20.18}$$
genel(homojen) çözüm

$\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ 20.17 ve 20.18 sağlanacak şekilde hesaplanmak kaydı ile[3] 20.16 daki denge denklemlerini sağlayan $\underline{F}$ vektörü(bilinmeyenler)

$$\underline{F} = \underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x\underline{x} \tag{20.19}$$

dir. Buradaki $\underline{x}$ vektörüne matematikte serbest değişken[4] denilmektedir. Serbest değişkenin anlamı şudur: Herhangi bir keyfi değer alabilir, yani $\underline{x}$ ne olursa olsun 20.19 çözümü 20.16 denge denklemlerinde yerine konursa eşitlik daima sağlanır[5].

O halde sonsuz sayıda $\underline{x}$ vektörü, dolayısıyla 20.19 a göre, sonsuz $\underline{F}$ vektörü vardır. Ancak, sistemin tek bir tane $\underline{F}$ vektörü(çözümü) vardır. Demek ki sonsuz sayıdaki $\underline{x}$ vektöründen sadece bir tanesi sistemin hem denge denklemlerini ve hem de süreklilik koşullarını sağlar. Soru şudur: Hem denge denklemlerini hem de süreklilik koşullarını sağlayan $\underline{x}$ vektörünü nasıl bulacağız?

Sistemin süreklilik koşulu:

$\underline{F}$ vektörü hem 20.16 yı hem de 20.12 yi sağlamalıdır:

$$\underline{N}^T\underline{U} = \underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}} \tag{20.20}$$
Sistemin süreklilik koşulu

Sağdan $\underline{B}_x^T$ ile her iki tarafı çarpar ve 20.18 i dikkate alırsak

$$\underbrace{\underline{B}_x^T\underline{N}^T}_{\underline{0}}\,\underline{U} = \underline{B}_x^T\,\underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}} \rightarrow \underline{0}\,\underline{U} = \underline{B}_x^T\,\underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}}$$

$$\underline{B}_x^T\,\underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}} = \underline{0} \tag{20.21}$$
20.16 denklem sisteminin çözülebilmesi için gerekli **ek koşul**

Olur. 20.19 u yerine yazalım:

$$\underline{B}_x^T\underline{f}\,\underbrace{(\underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x\underline{x})}_{\underline{F}} = \underline{0}$$

$$\underline{B}_x^T\underline{f}\,\underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x^T\underline{f}\,\underline{B}_x\underline{x} = \underline{0}$$

$$\underline{B}_x^T\underline{f}\,\underline{B}_x\underline{x} = -\underline{B}_x^T\underline{f}\,\underline{B}_0\underline{P} \tag{20.22}$$
Sistemin süreklilik koşulu

bulunur. $\underline{x}$ vektörünün rxr boyutlu katsayılar matrisi $\underline{B}_x^T\underline{f}\,\underline{B}_x$ simetrik ve pozitif tanımlı, $\det(\underline{B}_x^T\underline{f}\,\underline{B}_x) \neq 0$ dır. O halde, bu denklem sisteminden tek bir $\underline{x}$ bulunur. $\underline{x}$ süreklilik koşulu sağlanacak şekilde hesaplandığından, 20.19 da yerine konularak bulunan $\underline{F}$ vektörü de sistemin denge denklemlerini sağlayan çözüm olacaktır. Böylece hem **denge denklemlerini** hem de **süreklilik koşullarını** sağlayan çözüm bulunmuş olur.

---

[1] Doğrusal bağımlılık: $\underline{N}$ matrisinin r tane kolonu diğer n kolon cinsinden ifade edilebilir demektir. Bakınız:: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu/index_dosyalar/Dersler/BilDesNuMAn/BDNA-DersNotlar%C4%B1/BDNA02_Determinant.pdf, Sayfa:26.

[2] Matematikte $\underline{B}_0$ matrisine $\underline{N}$ nin sağ ters matrisi(right invers), $\underline{B}_x$ matrisine $\underline{N}$ nin çekirdeği(kernal, null space) denir.
Homojen, inhomojen denklem sistemleri ve çözümü hakkında genel bilgi için bakınız: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu/index_dosyalar/Dersler/BilDesNuMAn/BDNA-DersNotlar%C4%B1/BDNA10_GenelDenklemSistemleri.pdf

[3] $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrislerinin nasıl hesaplanacağı 21. bölümde sayısal örnek ile gösterilecektir.

[4] Free variable

[5] Daima sağlandığını gösterelim:
$\underline{N}\,\underline{F} = \underline{P}$ (sağlanması gereken denge denklemi)

$\underline{F} = \underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x\underline{x}$ (çözüm)

$\underline{N}\,\underbrace{(\underline{B}_0\underline{P} + \underline{B}_x\underline{x})}_{\underline{F}} = \underline{P} \rightarrow$ 21.17 *ve* 21.18 *dikkate alınırsa* $\rightarrow \underbrace{\underline{N}\,\underline{B}_0}_{\underline{I}}\,\underline{P} + \underbrace{\underline{N}\underline{B}_x}_{\underline{0}}\,\underline{x} = \underline{P}$

$\underline{I}\,\underline{P} + \underline{0}\,\underline{x} = \underline{P}$

$\underline{P} = \underline{P}$ olur. Demek ki $\underline{x}$ ne olursa olsun 21.19 çözümü 21.16 denge denklemini daima sağlar.

Sistemin düğümlerindeki yer değiştirmelerinin hesaplanması:

20.20 süreklilik bağıntısını soldan $\underline{B}_0^T$ ile çarpar ve 20.17 yi dikkate alırsak

$$\underbrace{\underline{B}_0^T \underline{N}^T}_{\underline{I}} \underline{U} = \underline{B}_0^T \underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}}$$

$$\underline{U} = \underline{B}_0^T \underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}} \quad \text{Sistemin yer değiştirme vektörü} \tag{20.23}$$

olur.

Yorum:

Herhangi bir statik sistemin çözümü için yukarıda verilen bağıntıları özetlersek

1) $\underline{N}\,\underline{F} = \underline{P}$ n denklemli ve m bilinmeyenli denge denklemleri

2) $\underline{N}\,\underline{B}_0 = \underline{I}$ özel(inhomojen)

3) $\underline{N}\,\underline{B}_x = \underline{0}$ genel(homojen) çözüm

4) $\underline{B}_x^T \underline{f}\,\underline{B}_x \underline{x} = -\underline{B}_x^T \underline{f}\,\underline{B}_0 \underline{P}$ Süreklilik denklemleri

5) $\underline{F} = \underline{B}_0 \underline{P} + \underline{B}_x \underline{x}$ Bilinmeyenler(eleman ve reaksiyon kuvvetleri)

6) $\underline{U} = \underline{B}_0^T \underbrace{\underline{f}\,\underline{F}}_{\underline{v}}$ Yer değiştirmeler

şu sonuca varırız:

$\underline{N}, \underline{P}, \underline{f}$: sistemin geometrisinden bilinmektedir.

$\underline{F}$ Vektörü(eleman ve reaksiyon kuvvetleri) hesaplanmak istenmektedir.

n denklem sayısı, m bilinmeyen sayısı olmak üzere 3 farklı durum sözkonusudur:

a) n=m ise sistem izostatiktir : 1.bağıntıdan $\underline{B}_0 = \underline{N}^{-1}$ ve $\underline{F} = \underline{B}_0 \underline{P}$ kuvvetleri, 6. bağıntıdan $\underline{U}$ yer değiştirmeleri hesaplanır. 2., 3., 4. ve 5. bağıntılara gerek kalmaz.

b) n<m ise sistem hiperstatiktir: Hiperstatiklik derecesi r=m-n dir. 1.bağıntı $\underline{F}$ nin hesabı için yeterli olmaz, diğer bağıntıların da kullanılması zorunlu olur. 2. ve 3. bağıntılarını sağlayan $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrisleri hesaplanır. 4. bağıntıdan $\underline{x}$ vektörü hesaplanır. 5. bağıntıdan $\underline{F}$ hesaplanır. 6. bağıntıdan $\underline{U}$ yer değiştirmeleri hesaplanır.

   Ancak, 2. ve 3. bağıntılarını sağlayan $\underline{B}_0$ ve $\underline{B}_x$ matrislerinin nasıl hesaplanacağını henüz bilmiyoruz. 21. bölümd bu matrislerin hesabına yöneliktir.

c) n>m ise: sistem oynak(labildir)[1], çözüm yoktur.

Yapı statiği kuvvet metodu ile ilişki:

Yapı statiğinden bilindiği gibi, hiperstatik sistemlerin çözümünde oynak(labil) olmayan) bir izostatik esas sistem elle seçilir. Sonlu elemanlarda izostatik esas sistem otomatik seçilir.

$\underline{x}$: Hiperstatik bilinmeyenlere,

$\underline{B}_0$: $\underline{P} = \underline{I}$, $\underline{x} = \underline{0}$ iken izostatik sistemde birim dış yüklerden oluşan iç kuvvetlere,

$\underline{B}_x$: $\underline{P} = \underline{0}$, $\underline{x} = \underline{I}$ iken izostatik sistemde birim hiperstatik yüklerden oluşan iç kuvvetlere,

$\underline{B}_x^T \underline{f}\,\underline{B}_x \underline{x} = -\underline{B}_x^T \underline{f}\,\underline{B}_0 \underline{P}$: Süreklilik denklemlerine,

$\underline{B}_x^T \underline{f}\,\underline{B}_x \underline{x}$: δ_{ik} sayılarına

karşılık gelir.

[1] Oynak(labil) sistem: Bağları yetersiz, dengesiz, göçer sistem demektir. Örneğin, tek açıklıklı bir kirişin en az bir mesnedi sabit diğer mesnedi kayıcı olmalıdır. İki mesnedi de kayıcı ise kiriş kayıp gider. Böyle bir sistem inşa edilemez.