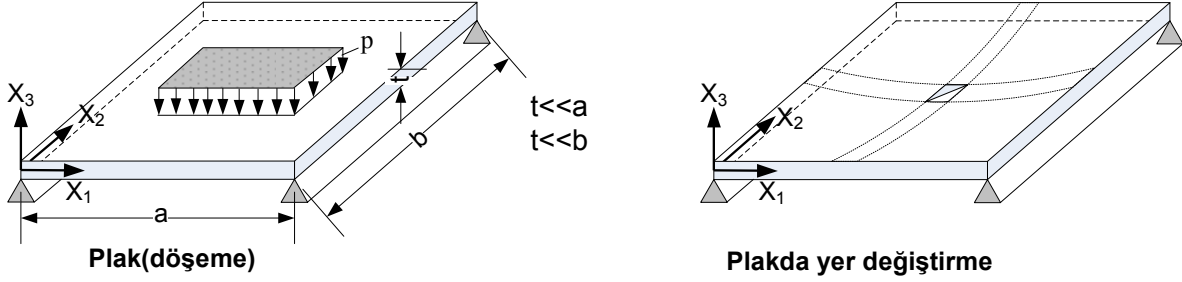




17. Üçgen plak eleman

Kalınlığı diğer boyutlarına göre küçük ve düzlemine dik yük etkisinde olan düzlem taşıyıcı sisteme plak denir. Yapıların döşemeleri, sıvı deposu yan duvarları ve köprü plakları örnek olarak verilebilir. Plak iki doğrultuda kiriş benzeri bir davranış gösterir.

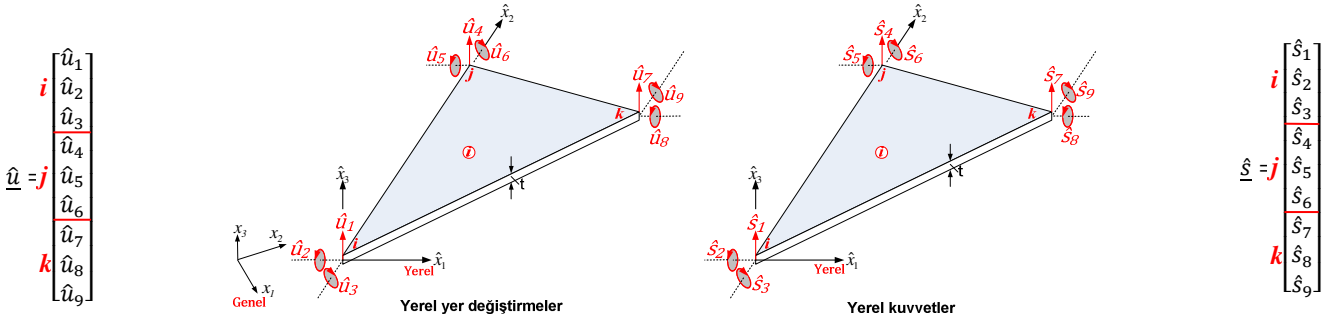


Varsayımlar¹:

- 1) Plak $x_1 - x_2$ düzleminde ve incedir.
- 2) Yükler x_3 doğrultusunda ve $x_1 - x_2$ düzlemine dik etkir.
- 3) Plak sadece x_3 yönünde yer değiştirir, u_3 yer değiştirmesi sadece x_1 ve x_2 nin fonksiyonudur.
- 4) Eğilme sonrası plak kalınlığı değişmez, dönmüş kesit düzlemi orta düzleme dik kalır: $\varepsilon_{13} = 0, \varepsilon_{23} = 0, \varepsilon_{33} = 0, \varepsilon_{12} \neq 0$ (Bu varsayım, kesme kuvvetinin şekil değiştirmeye etkisinin ihmal edildiği anlamına gelir: Kirchhoff plak teorisi)

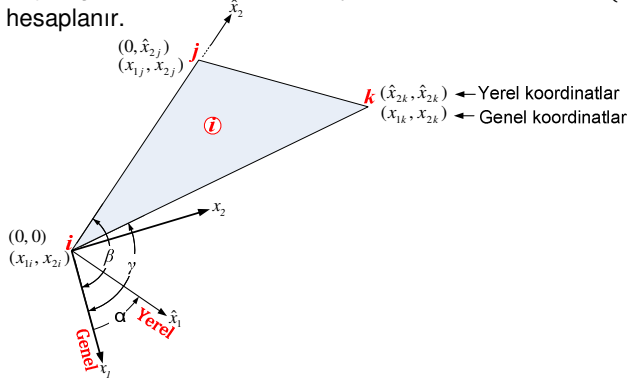
17.1 Üçgen plak elemanın bağıntıları

Çok sayıda plak eleman modeli (90 civarında) vardır. Şekil 17.1 de üçgen bir elemanın yerel yer değiştirmeleri ve bunlar yönünde tanımlı düğüm kuvvetleri görülmektedir. Düğüm serbestlik derecesi 3, elemanın serbestlik derecesi 9 dur. Yerel ve genel koordinatlar birbirine paraleldir **değildir**. Noktalar saat yönünde numaralanmıştır. i noktasında tanımlı $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ büyüklükleri, sırasıyla, \hat{x}_3 yönünde yer değiştirme, \hat{x}_1 etrafında dönme ve \hat{x}_2 etrafında dönmedir. Bunlara karşılık gelen $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$ **tekil** kuvvetleri, sırasıyla, \hat{x}_3 yönünde kuvvet, \hat{x}_1 etrafında moment ve \hat{x}_2 etrafında momenttir².



Şekil 17.1: Üçgen plak elemanın yerel yer değiştirmeleri ve kuvvetleri (perspektif çizim)

İfadeleri basitleştirmek için elemanlara ait büyüklüklerde i indisi kullanılmayacaktır. E : elastisite modülü, ν : Poisson oranı, t : elemanın kalınlığı, (x_{1i}, x_{2i}) : i noktasının, (x_{1j}, x_{2j}) : j noktasının, (x_{1k}, x_{2k}) : k noktasının genel koordinatları, yükler ve mesnet koşulları biliniyor varsayılmaktadır. İfadeleri basitleştirmek için yerel \hat{x}_2 eksenine $i-j$ düğümlerinden geçecek şekilde seçilmiştir. i, j, k noktalarının yerel koordinatları $(0, 0), (0, \hat{x}_{2j}), (\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k})$ dir. $\hat{x}_{2j}, \hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k}$ değerleri genel koordinatlarından hesaplanır.



Yerel Koordinatlar:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_{1j} - x_{1i}, c_2 = x_{2j} - x_{2i}, l_{ij} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ c_3 &= x_{1k} - x_{1i}, c_4 = x_{2k} - x_{2i}, l_{ik} = \sqrt{c_3^2 + c_4^2} \\ \beta &= \text{ArcCos} \frac{c_1}{l_{ij}}, \gamma = \text{ArcCos} \frac{c_3}{l_{ik}}, \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (17.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1i} &= 0, \hat{x}_{2i} = 0 \\ \hat{x}_{1j} &= 0, \hat{x}_{2j} = l_{ij} \\ \hat{x}_{1k} &= l_{ik} \text{Cos}(\gamma - \alpha), \hat{x}_{2k} = l_{ik} \text{Sin}(\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

Yerel ve genel koordinatlar (eleman kağıt düzleminde)

¹ Bu varsayımlara dayanan ince plak teorisine Kirchhoff teorisi denir (Kirchhoff-Love teorisi veya Poisson-Kirchhoff teorisi de denir). Kalın plak teorisi Mindlin-Reissner adını alır. Ayrıca kesme şekil değiştirmelerini de dikkate alan Timoshenko plak teorisi vardır.

² Klasik plak teorisinde kesme kuvveti ve momentler birim genişlik için tanımlanır, birimleri, örneğin, kN/m ve kNm/m dir. Burada tanımlanan düğüm kuvvetleri tekildir, birimleri, örneğin, kN ve kNm dir. Bir diğer dikkat edilmesi gereken fark da şudur. Klasik plak teorisinde momentler x doğrultusunda M_x , y doğrultusunda M_y ile gösterilir. Şekil 16.2'deki momentler ise eksenler etrafındaki momentlerdir, örneğin, \hat{s}_2 momenti \hat{x}_1 eksenine, \hat{s}_3 momenti ise \hat{x}_2 eksenine etrafındaki momenttir.

17. Üçgen plak eleman

Elemanın yer değiştirme fonksiyonu

Elemanın $\hat{u}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ yerel yer değiştirme için seçilecek Ritz fonksiyonu 9 parametrelidir, çünkü serbestlik derecesi 9 dur. Yer değiştirme fonksiyonunu Gallagher¹

$$\hat{u}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = a_1 + a_2\hat{x}_1 + a_3\hat{x}_2 + a_4\hat{x}_1^2 + a_5\hat{x}_1\hat{x}_2 + a_6\hat{x}_2^2 + a_7\hat{x}_1^3 + a_8\hat{x}_1\hat{x}_2^2 + a_9\hat{x}_2^3 \quad (17.2)$$

Tocher² ve Przemieniecki³

$$\hat{u}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = a_1 + a_2\hat{x}_1 + a_3\hat{x}_2 + a_4\hat{x}_1^2 + a_5\hat{x}_1\hat{x}_2 + a_6\hat{x}_2^2 + a_7\hat{x}_1^3 + a_8(\hat{x}_1\hat{x}_2^2 + \hat{x}_1^2\hat{x}_2) + a_9\hat{x}_2^3 \quad (17.3)$$

olarak seçmektedirler. 17.2 fonksiyonu, $\hat{x}_1^2\hat{x}_2$ terimi olmadığından, simetrik değildir. Burada Tocher'e ait 17.3 simetrik fonksiyonu kullanılacak, bu fonksiyon için bağıntılar Przemieniecki³ den alınarak aşağıda verilecektir.

$$\begin{aligned} \hat{x}_3 \text{ yönünde yer değiştirme: } \hat{u}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= a_1 + a_2\hat{x}_1 + a_3\hat{x}_2 + a_4\hat{x}_1^2 + a_5\hat{x}_1\hat{x}_2 + a_6\hat{x}_2^2 + a_7\hat{x}_1^3 + a_8(\hat{x}_1\hat{x}_2^2 + \hat{x}_1^2\hat{x}_2) + a_9\hat{x}_2^3 \\ \hat{x}_1 \text{ etrafında dönme: } \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \hat{u}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= a_3 + a_5\hat{x}_1 + 2a_6\hat{x}_2 + a_8(2\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2) + 3a_9\hat{x}_2^2 \quad \leftarrow \text{Saat ters yönünde dönme: pozitif} \\ \hat{x}_2 \text{ etrafında dönme: } -\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \hat{u}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= -a_2 - 2a_4\hat{x}_1 - a_5\hat{x}_2 - 3a_7\hat{x}_1^2 - a_8(\hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2) \quad \leftarrow \text{Saat yönünde dönme: negatif} \end{aligned} \quad (17.4)$$

Yerel sınır sınır koşulları

$i(0,0)$ noktasında:

$$\hat{u}_1 = a_1 \quad \leftarrow \hat{x}_3 \text{ yönünde yer değiştirme}$$

$$\hat{u}_2 = a_3 \quad \leftarrow \hat{x}_1 \text{ etrafında dönme}$$

$$\hat{u}_3 = -a_2 \quad \leftarrow \hat{x}_2 \text{ etrafında dönme}$$

$j(0, \hat{x}_{2j})$ noktasında:

$$\hat{u}_4 = a_1 + a_3\hat{x}_{2j} + a_6\hat{x}_{2j}^2 + a_9\hat{x}_{2j}^3 \quad \leftarrow \hat{x}_3 \text{ yönünde yer değiştirme}$$

$$\hat{u}_5 = a_3 + 2a_6\hat{x}_{2j} + 3a_9\hat{x}_{2j}^2 \quad \leftarrow \hat{x}_1 \text{ etrafında dönme}$$

$$\hat{u}_6 = -a_2 - a_5\hat{x}_{2j} - a_8\hat{x}_{2j}^2 \quad \leftarrow \hat{x}_2 \text{ etrafında dönme}$$

$k(\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k})$ noktasında:

$$\hat{u}_7 = a_1 + a_2\hat{x}_{1k} + a_3\hat{x}_{2k} + a_4\hat{x}_{1k}^2 + a_5\hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k} + a_6\hat{x}_{2k}^2 + a_7\hat{x}_{1k}^3 + a_8(\hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k}^2 + \hat{x}_{1k}^2\hat{x}_{2k}) + a_9\hat{x}_{2k}^3 \quad \leftarrow \hat{x}_3 \text{ yönünde yer değiştirme}$$

$$\hat{u}_8 = a_3 + a_5\hat{x}_{1k} + 2a_6\hat{x}_{2k} + a_8(2\hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k} + \hat{x}_{1k}^2) + 3a_9\hat{x}_{2k}^2 \quad \leftarrow \hat{x}_1 \text{ etrafında dönme}$$

$$\hat{u}_9 = -a_2 - 2a_4\hat{x}_{1k} - a_5\hat{x}_{2k} - 3a_7\hat{x}_{1k}^2 - a_8(\hat{x}_{2k}^2 + 2\hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k}) \quad \leftarrow \hat{x}_2 \text{ etrafında dönme}$$

17.5 bağıntıları matris olarak:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \\ \hat{u}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \hat{x}_{2j} & 0 & 0 & \hat{x}_{2j}^2 & 0 & 0 & \hat{x}_{2j}^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\hat{x}_{2j} & 0 & 0 & 3\hat{x}_{2j}^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\hat{x}_{2j} & 0 & 0 & -\hat{x}_{2j}^2 & 0 \\ 1 & \hat{x}_{1k} & \hat{x}_{2k} & \hat{x}_{1k}^2 & \hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k} & \hat{x}_{2k}^2 & \hat{x}_{1k}^3 & \hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k}^2 + \hat{x}_{1k}^2\hat{x}_{2k} & \hat{x}_{2k}^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \hat{x}_{1k} & 2\hat{x}_{2k} & 0 & 2\hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k} + \hat{x}_{1k}^2 & 3\hat{x}_{2k}^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2\hat{x}_{1k} & -\hat{x}_{2k} & 0 & -3\hat{x}_{1k}^2 & -\hat{x}_{2k}^2 - 2\hat{x}_{1k}\hat{x}_{2k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} \quad (17.6)$$

Elemanın yerel rijitlik matrisi

$A = \hat{x}_{1k}\hat{x}_{2j}$, $B = \hat{x}_{2j} + \hat{x}_{2k}$, $C = \hat{x}_{2j} + 2\hat{x}_{2k}$, $D = \hat{x}_{2j}^2 + \hat{x}_{2j}\hat{x}_{2k} + \hat{x}_{2k}^2$ olmak üzere:

$$\hat{k} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$(\hat{\phi}^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2A & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)A & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2\nu A & 0 & 2A & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2\hat{x}_{1k}A & 0 & 2\nu\hat{x}_{1k}A & 3\hat{x}_{1k}^2A & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}A(\nu\hat{x}_{1k} + B) & \frac{2}{3}(1-\nu)A(\hat{x}_{1k} + B) & \frac{2}{3}A(\hat{x}_{1k} + \nu B) & \hat{x}_{1k}A(\nu\hat{x}_{1k} + \frac{1}{2}C) & (1-\frac{2}{3}\nu)A(\hat{x}_{1k}^2 + \hat{x}_{1k}C + D) - \frac{1}{3}(1-\nu)\hat{x}_{1k}AC & \\ 0 & 0 & 0 & 2\nu AB & 0 & 2AB & \frac{3}{2}\nu\hat{x}_{1k}AC & A(\frac{1}{2}\hat{x}_{1k}C + \nu D) & 3AD \end{bmatrix} \hat{\phi}^{-1} \quad (17.7)$$

¹ Gallagher, R. H., Finite Element Analysis, Springer Verlag, 1976.

² Tocher, J. L., Analysis of plate bending using triangular elements, Ph. D. dissertation, Civil Engineering Dept., University of California, Berkeley, 1962.

³ Przemieniecki, J., S., Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill, 1968.

Yorum:

Yukarıda bağıntıları verilen üçgen eleman sonlu elemanlar metodunun ilklerindedir ve 1960-1962 arasında Tocher tarafından geliştirilmiştir. Bu nedenle Tocher-T9 plak elemanı da denir.

Tocher-T9 plak elemanının davranışı kötüdür. Ön plana çıkan iki önemli özürü vardır:

1)17.6 daki ϕ matrisi koordinat sisteminin konumuna ve elemanın boyutuna bağlı olarak tekil, yani ϕ^{-1} tanımsız olmaktadır. $2\hat{x}_{2k} = -\hat{x}_{1k} + \hat{x}_{2j}$ olması durumunda ϕ^{-1} hesaplanamaz.

2)Hassasiyeti ve yakınsaması kötüdür. Eleman sayısı arttıkça doğru sonuca varmasının garantisi yoktur.

Netice olarak Tocher-T9 üçgen elemanına güvenilmez. Zaten ticari yazılımların hiç biri bu elemanı kullanmamaktadır. Ticari yazılımlar çok daha yüksek serbestlik derecesi olan üçgen eleman kullanmaktadırlar.

Tarihsel değeri, basitliği ve sonlu eleman geliştirme adımlarının anlaşılır olması nedeniyle burada yer verdik.