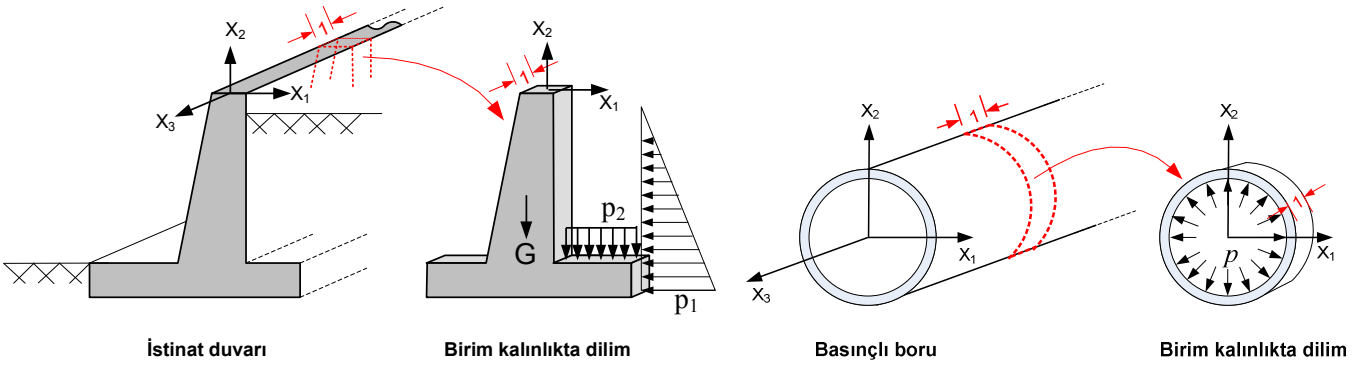




15. Dörtgen levha eleman, düzlem şekil değiştirme durumu

İstinat duvarı, basınçlı uzun boru, tünel, ağırlık barajı gibi yapılar düzlem levha gibi davranırlar. Uzun doğrultuda yer ve şekil değiştire olmaz, şekil değiştirme düzlemdir. Aşağıdaki şekilde görülen örneklerde x_3 doğrultusunda yer ve şekil değiştirme olmaz, ama bu doğrultuda gerilme oluşur. Analiz için yapıdan birim kalınlıkta düzlem bir dilim çıkartılır ve levha olarak çözülür, levha $x_1 - x_2$ düzleminindedir.



Yükler levha düzlemi içindedir, x_3 doğrultusunda yük yoktur.

Sadece x_1 ve x_2 doğrultusunda yer değiştirme vardır: $u_1(x_1, x_2)$ ve $u_2(x_1, x_2)$.

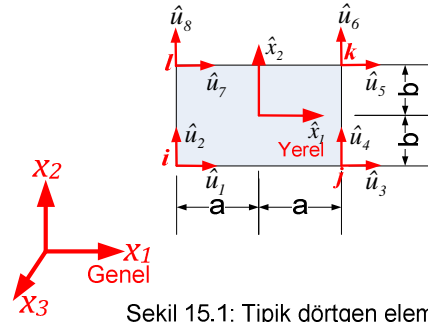
Düzlem şekil değiştirme varsayımları ve bağıntıları için bak: Bölüm 2.6

Düzlem şekil değiştirme durumu söz konusudur. $\sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{33}(x_1, x_2), \sigma_{12}(x_1, x_2)$ gerilmeleri oluşur.

15.1 Dörtgen levha elemanın bağıntıları

Sınırları eğrisel bölgeler içeren sistemlerde tek başına dörtgen eleman geometriyi tanımlamak için yeterli olmaz, eğrisel kenarlarda üçgen elemanlar kullanılır. 13. bölümde üçgen levha elemanın düzlem şekil değiştirme durumu bağıntıları verilmişti. Bu bölümde dörtgen levha elemana yer verilecektir.

Elemanların sadece düğümlerde birbirine bağlı olduğu, düğümler arasındaki ortak kenarlarda bağ olmadığı varsayılmaktadır. Levha sistemin $i-j-k-l$ düğümlerine bağlı i . dörtgen elemanı sistemden çıkarılarak şekil 15.1 de gösterilmiştir. Düğüm numaraları, $i-j-k-l$, saatin ters yönündedir, sistemin tüm elemanları bu kurala göre numaralanmalıdır. Genel ve yerel koordinat sistemi birbirine paraleldir. Transformasyon matrisi birim matris olduğundan, genel ve yerel rijitlik matrisi aynı olacaktır. Düğüm serbestlik derecesi 2, dörtgen elemanın serbestlik derecesi $2 \cdot 4 = 8$ dir:



Şekil 15.1: Tipik dörtgen eleman

\hat{u}_1	i noktasında \hat{x}_1 yönünde yer değiştirme
\hat{u}_2	i noktasında \hat{x}_2 yönünde yer değiştirme
\hat{u}_3	j noktasında \hat{x}_1 yönünde yer değiştirme
\hat{u}_4	j noktasında \hat{x}_2 yönünde yer değiştirme
\hat{u}_5	k noktasında \hat{x}_1 yönünde yer değiştirme
\hat{u}_6	k noktasında \hat{x}_2 yönünde yer değiştirme
\hat{u}_7	l noktasında \hat{x}_1 yönünde yer değiştirme
\hat{u}_8	l noktasında \hat{x}_2 yönünde yer değiştirme

\hat{u} yer değiştirmeleri yönünde tanımlı, fakat şekilde gösterilmemiş, $\hat{s} = [\hat{s}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 \hat{s}_4 \hat{s}_5 \hat{s}_6 \hat{s}_7 \hat{s}_8]^T$ yerel kuvvetleri vardır. Levha probleminde düğüm kuvvetleri değil, eleman içindeki $\sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{33}(x_1, x_2)$ ve $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ gerilmeleri hesaplanır. İfadeleri basitleştirmek için elemanlara ait büyüklüklerde i indisi kullanılmayacaktır. E: elastisite modülü, ν : Poisson oranı, (x_{1i}, x_{2i}) : i noktasının, (x_{1j}, x_{2j}) : j noktasının, (x_{1k}, x_{2k}) : k noktasının, (x_{1l}, x_{2l}) : l noktasının genel koordinatları, yükler ve mesnet koşulları biliniyor varsayılmaktadır. Tüm elemanların kalınlığı sabit ve $t=1$ dir.

Elemanın yer değiştirme fonksiyonları (Ritz fonksiyonları):

Elemanın \hat{x}_1, \hat{x}_2 lokal eksenlerinin orijini ağırlık merkezinde seçilmiştir. a ve b değerleri noktaların genel koordinatlarından hesaplanır: $a = \frac{|x_{1j} - x_{1i}|}{2}, b = \frac{|x_{2l} - x_{2i}|}{2}$. Elemanın $\hat{u}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ve $\hat{u}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ yerel yer değiştirmeleri için seçilecek Ritz fonksiyonlarının her biri 4 parametrelidir, çünkü serbestlik derecesi 8 dir. Yer değiştirme fonksiyonları:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= a_1 + a_2 \hat{x}_1 + a_3 \hat{x}_2 + a_4 \hat{x}_1 \hat{x}_2 && \hat{x}_1 \text{ yönünde yer değiştirme fonksiyonu} \\ \hat{u}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= a_5 + a_6 \hat{x}_1 + a_7 \hat{x}_2 + a_8 \hat{x}_1 \hat{x}_2 && \hat{x}_2 \text{ yönünde yer değiştirme fonksiyonu} \end{aligned} \quad (15.1)$$

doğrusal olarak seçilebilir. Eleman geometrisi ve yer değiştirme fonksiyonu 14.1 ile aynı olduğundan düzlem gerilme durumuna ait 14.2-14.6 arasındaki tüm bağıntılar düzlem şekil değiştirme durumunda da geçerlidir. Elemanın yer değiştirme fonksiyonu 14.6 ile aynıdır:

15. Dörtgen levha eleman, düzlem şekil değiştirme durumu

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \\ \hat{u}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

Elemanın yer değiştirme fonksiyonlarının \hat{u} cinsinden ifadesi

\underline{N} matrisinin terimleri (şekil fonksiyonları 14.15 de tanımlıdır). (15.2)

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları:

2.18 e göre

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} u_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \\ u_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{33} = 0 \quad (15.3)$$

dır. 15.2 bağıntısı 14.7 ile karşılaştırılırsa tek farkın ε_{33} şekil değiştirmesi olduğu görülür. Bunun sonucu olarak 14.7a-14.7 arasındaki bağıntılar, ε_{33} hariç, aynı olur:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{4ab} \underbrace{\begin{bmatrix} -b + \hat{x}_2 & 0 & b - \hat{x}_2 & 0 & b + \hat{x}_2 & 0 & -b - \hat{x}_2 & 0 \\ 0 & -a + \hat{x}_1 & 0 & -a - \hat{x}_1 & 0 & a + \hat{x}_1 & 0 & a - \hat{x}_1 \\ -a + \hat{x}_1 & -b + \hat{x}_2 & -a - \hat{x}_1 & b - \hat{x}_2 & a + \hat{x}_1 & b + \hat{x}_2 & a - \hat{x}_1 & -b - \hat{x}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix} \quad (15.3a)$$

Elemanın şekil değiştirme fonksiyonlarının \hat{u} cinsinden ifadesi

$$\varepsilon_{33} = 0$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{\hat{u}} \quad (15.3b)$$

Gerilme- şekil değiştirme bağıntıları:

Düzlem şekil değiştirme durumu için, 2.19 a göre

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} \quad (15.4)$$

Düzlem şekil değiştirme durumunda elastisite matrisi

dır. 15.4 ile

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{E}} \frac{1}{4ab} \underbrace{\begin{bmatrix} -b + \hat{x}_2 & 0 & b - \hat{x}_2 & 0 & b + \hat{x}_2 & 0 & -b - \hat{x}_2 & 0 \\ 0 & -a + \hat{x}_1 & 0 & -a - \hat{x}_1 & 0 & a + \hat{x}_1 & 0 & a - \hat{x}_1 \\ -a + \hat{x}_1 & -b + \hat{x}_2 & -a - \hat{x}_1 & b - \hat{x}_2 & a + \hat{x}_1 & b + \hat{x}_2 & a - \hat{x}_1 & -b - \hat{x}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix} \quad (15.4a)$$

$$\alpha = \frac{E}{4ab(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \beta = 1 - \nu, \quad \gamma = \frac{1-2\nu}{2} \quad \text{olmak üzere:}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \beta(-b + \hat{x}_2) & \nu(-a + \hat{x}_1) & \beta(b - \hat{x}_2) & \nu(-a - \hat{x}_1) & \beta(b + \hat{x}_2) & \nu(a + \hat{x}_1) & \beta(-b - \hat{x}_2) & \nu(a - \hat{x}_1) \\ \nu(-b + \hat{x}_2) & \beta(-a + \hat{x}_1) & \nu(b - \hat{x}_2) & \beta(-a - \hat{x}_1) & \nu(b + \hat{x}_2) & \beta(a + \hat{x}_1) & \nu(-b - \hat{x}_2) & \beta(a - \hat{x}_1) \\ \gamma(-a + \hat{x}_1) & \gamma(-b + \hat{x}_2) & \gamma(-a - \hat{x}_1) & \gamma(b - \hat{x}_2) & \gamma(a + \hat{x}_1) & \gamma(b + \hat{x}_2) & \gamma(a - \hat{x}_1) & \gamma(-b - \hat{x}_2) \end{bmatrix}}_{\underline{E} \underline{B}} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix} \quad (15.4a)$$

$$\sigma_{33} = \nu\sigma_{11} + \nu\sigma_{22}$$

15. Dörtgen levha eleman, düzlem şekil değiştirme durumu

$$\underline{\sigma} = \underline{E B u} \quad (15.4b)$$

Elemanın rijitlik matrisi:

14.9 ifadesi geçerlidir. Levha kalınlığı $t=1$ olduğundan

$$\hat{k} = \int_A \underline{B}^T \underline{E B} t dA = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a \underline{B}^T \underline{E B} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \underline{B}^T \underline{E B} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \quad \text{Elemanın rijitlik matrisi} \quad (15.5)$$

15.3a daki \underline{B} ve 15.4a daki $\underline{E B}$ matrislerinin terimleri \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 nin fonksiyonu olduğundan bu matrisler integralin dışına çıkarılamaz. $\underline{B}^T \underline{E B}$ çarpımı yapılarak çarpımın her teriminin integralinin alınması zorunludur. $\underline{B}^T \underline{E B}$ çarpımı karmaşıktır. Çarpım ve 15.5 integrali Mathematica¹ yazılımı ile yapılarak belirlenen rijitlik matrisi aşağıda verilmiştir.

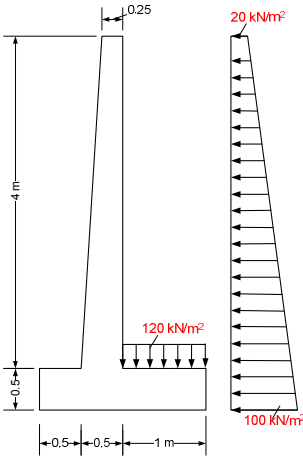
$\alpha = \frac{E}{24ab(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\beta = 1 - \nu$, $\gamma = \frac{1-2\nu}{2}$ olmak üzere:

Elemanın rijitlik matrisi

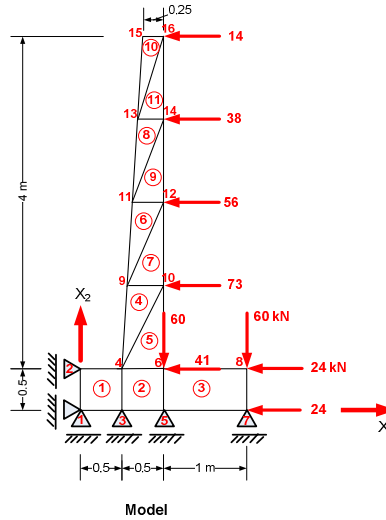
$$\hat{k} = \alpha \begin{bmatrix} 8\gamma a^2 + 8\beta b^2 & 3ab & 8\gamma b^2 + 8\beta a^2 & 4\gamma a^2 - 8\beta b^2 & 3ab(1-4\nu) & 8\gamma a^2 + 8\beta b^2 & -3ab(1-4\nu) & 8\gamma b^2 + 4\beta a^2 & -3ab & 8\gamma b^2 + 8\beta a^2 & -4\gamma a^2 - 4\beta b^2 & -3ab & -8\gamma a^2 + 4\beta b^2 & 3ab(1-4\nu) & 8\gamma a^2 + 8\beta b^2 & -3ab & -4\gamma b^2 - 4\beta a^2 & -3ab(1-4\nu) & 4\gamma b^2 - \beta a^2 & 3ab & 8\gamma b^2 + 8\beta a^2 & -8\gamma a^2 + 4\beta b^2 & -3ab(1-4\nu) & -4\gamma a^2 - 4\beta b^2 & 3ab & 4\gamma a^2 - 8\beta b^2 & 3ab(1-4\nu) & 8\gamma a^2 + 8\beta b^2 & 3ab(1-4\nu) & 4\gamma b^2 - 8\beta a^2 & 3ab & -4\gamma b^2 - 4\beta a^2 & -3ab(1-4\nu) & -8\gamma b^2 + 4\beta a^2 & -3ab & 8\gamma b^2 + 8\beta a^2 \end{bmatrix} \quad \text{Simetrik} \quad (15.5a)$$

Sayısal örnek 15.1:

C30/37 betonu ile inşa edilmesi düşünülen bir istinat duvarından alınan 1 m kalınlığındaki bir dilimin kesiti ve modeli Şekil 15.2 de görülmektedir. Verilen yükler için SEM15 çözümü verilecektir.



Şekil 15.2: Çözülmesi istenen levha sistem



Model

$E=32 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.20$, $t = 1 \text{ m}$

Koordinatlar:

Nokta	X_1 (m)	X_2 (m)
1	0	0
2	0	0.5
3	0.5	0
4	0.5	0.5
5	1	0
6	1	0.5
7	2	0
8	2	0.5
9	0.56	1.5
10	1	1.5
11	0.63	2.5
12	1	2.5
13	0.69	3.5
14	1	3.5
15	0.75	4.5
16	1	4.5

C:\SEM2015\Levha\Veriler\Örnek15-1.mdb

SİSTEM:Düzlem şekil değiştirme
Nokta sayısı: 16
Eleman sayısı: 11
Noktanın serbestlik derecesi: 2
Sistemin serbestlik derecesi: 32
Yarı band genişliği :13
Nokta yük sayısı: 9
Sınır koşulu sayısı: 6

¹ Mathematica 7, Wolfram Research, 2008

15. Dörtgen levha eleman, düzlem şekil değiştirme durumu

SİSTEMİN YER DEĞİŞTİRMELERİ:

Nokta no	U1 (m)	U2 (m)
1	0	0
2	0	2E-6
3	-2E-6	0
4	-8E-6	-2.2E-5
5	-6E-6	0
6	-1.5E-5	2.1E-5
7	-2.3E-5	0
8	-1E-5	-1E-5
9	-0.000179	-3.8E-5
10	-0.000178	4.8E-5
11	-0.000419	-3.5E-5
12	-0.000419	5.8E-5
13	-0.000693	-2.3E-5
14	-0.000692	6.2E-5
15	-0.000974	-7E-6
16	-0.000974	6.3E-5

GERİLMELER:

Eleman no	Sigma11 (kN/m ²)	Sigma22 (kN/m ²)	Sigma12 (kN/m ²)	Sigma33 (kN/m ²)
1	-540	-811.37	-414.83	-270.27
2	-420.06	-145.96	364.1	-113.2
3	-96	358.67	-161.73	52.53
4	-114.94	-940.81	320.5	-211.15
5	-260.96	827.91	-1006.04	113.39
6	-51.19	-483.51	144.01	-106.94
7	221.91	406.59	-612.01	125.7
8	-19.85	-178	24.46	-39.57
9	106.97	149.13	-301.58	51.22
10	-3.3	-34.3	-10.63	-7.52
11	31.56	27.66	-81.75	11.85