14. Dörtgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

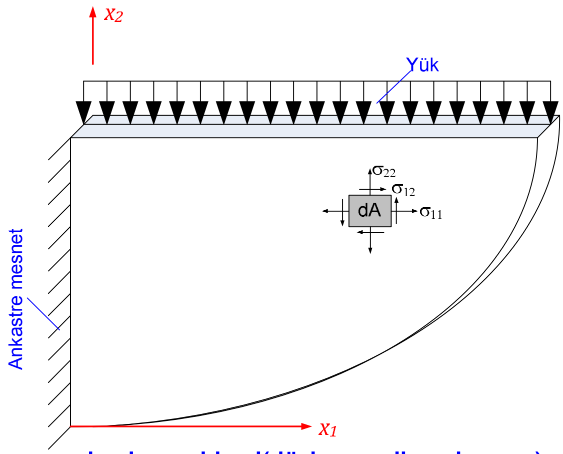
Çok katlı yapılardaki perdeler ve yüksek kirişler düzlem levha gibi davranır. Sağdaki şekilde bir levha sistem ve üçgen elemanlarla yapılan SEM modeli görülmektedir. Levha $x_1 - x_2$ düzlemindedir.

Yükler levha düzlemi içindedir, x_3 doğrultusunda yük yoktur.

Sadece x_1 ve x_2 doğrultusunda yer değiştirme vardır: $u_1(x_1, x_2)$ ve $u_2(x_1, x_2)$.

Düzlem gerilme durumu söz konusudur. $\sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2)$ ve $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ gerilmeleri oluşur, x_3 doğrultusunda gerilme oluşmadığı varsayılır.

Düzlem gerilme varsayımları ve bağıntıları için bak: Bölüm 2.6

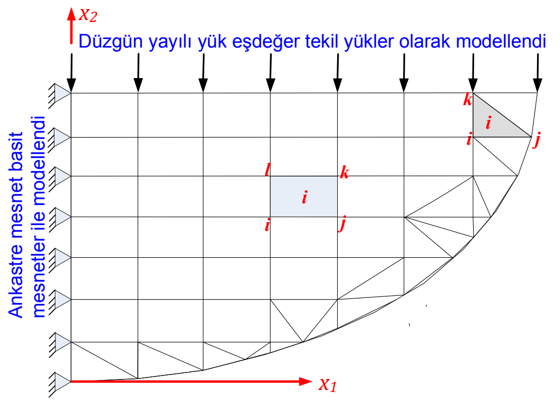


Levha problemi(düzlem gerilme durumu)

14.1 Dörtgen levha elemanın bağıntıları

Sınırları eğrisel bölgeler içeren sistemlerde tek başına dörtgen eleman geometriyi tanımlamak için yeterli olmaz, eğrisel kenarlarda üçgen elemanlar kullanılır. 12. bölümde üçgen levha elemanın düzlem gerilme durumu bağıntıları verilmişti. Bu bölümde dörtgen levha elemana yer verilecektir.

Elemanların sadece düğümlerde birbirine bağlı olduğu, düğümler arasındaki ortak kenarlarda bağ olmadığı varsayılmaktadır. Levha sistemin *i-j-k-l* düğümlerine bağlı *i.* dörtgen elemanı sistemden çıkarılarak şekil 14.1 de gösterilmiştir. Düğüm numaraları, *i-j-k-l,* saatin ters yönündedir, sistemin tüm elemanları bu kurala göre numaralanmalıdır. Genel ve yerel koordinat sistemi birbirine paraleldir. Transformasyon matrisi birim matris olduğundan, genel ve yerel rijitlik matrisi aynı olacaktır. Düğüm serbestlik derecesi 2 dir. Dörtgen elemanın serbestlik derecesi 2·4=8 dır:

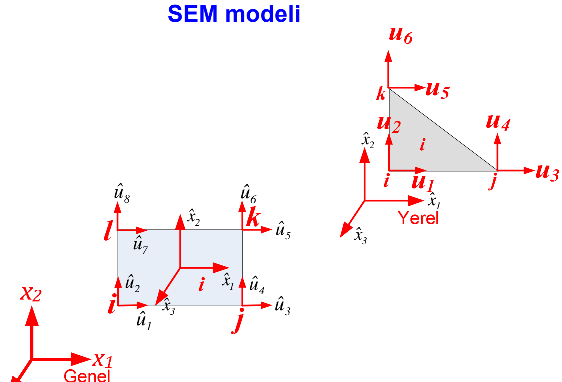


SEM modeli

$$\underline{\hat{u}} = \begin{array}{c|c} i & \hat u_1 \\ & \hat u_2 \\ j & \hat u_3 \\ & \hat u_4 \\ k & \hat u_5 \\ & \hat u_6 \\ l & \hat u_7 \\ & \hat u_8 \end{array}$$

- $\hat u_1$: *i* noktasında $\hat x_1$ yönünde yer değiştirme
- $\hat u_2$: *i* noktasında $\hat x_2$ yönünde yer değiştirme
- $\hat u_3$: *j* noktasında $\hat x_1$ yönünde yer değiştirme
- $\hat u_4$: *j* noktasında $\hat x_2$ yönünde yer değiştirme
- $\hat u_5$: *k* noktasında $\hat x_1$ yönünde yer değiştirme
- $\hat u_6$: *k* noktasında $\hat x_2$ yönünde yer değiştirme
- $\hat u_7$: *l* noktasında $\hat x_1$ yönünde yer değiştirme
- $\hat u_8$: *l* noktasında $\hat x_2$ yönünde yer değiştirme

$\underline{\hat{u}}$ yer değiştirmeleri yönünde tanımlı, fakat şekilde gösterilmemiş, $\underline{\hat{s}} = [\hat s_1 \quad \hat s_2 \quad \hat s_3 \quad \hat s_4 \quad \hat s_5 \quad \hat s_6 \quad \hat s_7 \quad \hat s_8]^T$ kuvvetleri vardır. Levha probleminde düğüm kuvvetleri değil, eleman içindeki $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ ve $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ gerilmeleri hesaplanır. İfadeleri basitleştirmek için elemanlara ait büyüklüklerde i indisi kullanılmayacaktır. E elastisite modülü, v: Poisson oranı, t: elemanın kalınlığı, (x_{1i}, x_{2i}): i noktasının koordinatları, (x_{1j}, x_{2j}): j noktasının koordinatları, (x_{1k}, x_{2k}): k noktasının koordinatları, (x_{1l}, x_{2l}): l noktasının koordinatları, yükler ve mesnet koşulları biliniyor varsayılmaktadır.

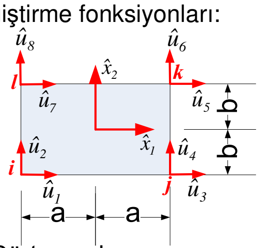


Şekil 14.1: Tipik dörtgen ve üçgen eleman

Elemanın yer değiştirme fonksiyonları(Ritz fonksiyonları):

Elemanın $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ lokal eksenlerinin orijini ağırlık merkezinde seçilmiştir. a ve b değerleri noktaların genel koordinatlarından hesaplanır: $a = \left|\frac{x_{1j} - x_{1i}}{2}\right|, b = \left|\frac{x_{2l} - x_{2i}}{2}\right|$. Elemanın $\hat u_1(\hat x_1, \hat x_2)$ ve $\hat u_2(\hat x_1, \hat x_2)$ yerel yer değiştirmeleri için seçilecek Ritz fonksiyonlarının her biri 4 parametreli olabilir, çünkü serbestlik derecesi 8 dir. Yer değiştirme fonksiyonları:

$$\hat u_1(\hat x_1, \hat x_2) = a_1 + a_2 \hat x_1 + a_3 \hat x_2 + a_4 \hat x_1 \hat x_2 \quad \text{($\hat x_1$ yönünde yer değiştirme fonksiyonu)}$$
$$\hat u_2(\hat x_1, \hat x_2) = a_5 + a_6 \hat x_1 + a_7 \hat x_2 + a_8 \hat x_1 \hat x_2 \quad \text{($\hat x_2$ yönünde yer değiştirme fonksiyonu)} \qquad (14.1)$$



Dörtgen elemanın yer değiştirmeleri

doğrusal olarak seçilebilir. Matris notasyonunda

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\\ \hat{u}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_1\hat{x}_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_1\hat{x}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\phi}}\underbrace{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\end{bmatrix}}_{\underline{a}} \qquad (14.2)$$

Buradaki a_i parametrelerinin fiziksel bir anlamı yoktur, sadece Ritz fonksiyonunun katsayılarıdır. $\hat{u}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ ve $\hat{u}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ yer değiştirme fonksiyonlarını fiziksel anlamı olan $\underline{u}$ vektörü cinsinden yazmaya çalışmalıyız.
Sınır koşulları: 14.2 yer değiştirmeleri düğüm noktalarında düğüm yer değiştirmelerine eşit olmalıdır.
$i(-a,-b)$ noktasında $\hat{u}_1(-a,-b)=\hat{u}_1$, ve $\hat{u}_2(-a,-b)=\hat{u}_2$ olmalı:

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab\end{bmatrix}\underline{a} \qquad (14.2a)$$

$j(a,-b)$ noktasında $\hat{u}_1(a,-b)=\hat{u}_3$, ve $\hat{u}_2(a,-b)=\hat{u}_4$ olmalı:

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab\end{bmatrix}\underline{a} \qquad (14.2b)$$

$k(a,b)$ noktasında $\hat{u}_1(a,b)=\hat{u}_5$, ve $\hat{u}_2(a,b)=\hat{u}_5$ olmalı:

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_5\\ \hat{u}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab\end{bmatrix}\underline{a} \qquad (14.2c)$$

$l(-a,b)$ noktasında $\hat{u}_1(-a,b)=\hat{u}_7$, ve $\hat{u}_2(-a,b)=\hat{u}_8$ olmalı:

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_7\\ \hat{u}_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab\end{bmatrix}\underline{a} \qquad (14.2d)$$

14.2a, 14.2b, 14.2c ve 14.2d birleştirilerek:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\\ \hat{u}_5\\ \hat{u}_6\\ \hat{u}_7\\ \hat{u}_8\end{bmatrix}}_{\hat{u}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab\\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab\\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab\\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab\end{bmatrix}}_{\tilde{\phi}}\underbrace{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\end{bmatrix}}_{\underline{a}} \rightarrow \underline{a}=\underline{\tilde{\phi}}^{-1}\underline{u}$$

olur. $\underline{\tilde{\phi}}$ nin tersi hesaplanarak, $\underline{a}=\underline{\tilde{\phi}}^{-1}\underline{u}$ bulunabilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\end{bmatrix}}_{\underline{a}}=\underbrace{\frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0\\ -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b & 0\\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab\\ 0 & -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b\\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}}_{\tilde{\phi}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\\ \hat{u}_5\\ \hat{u}_6\\ \hat{u}_7\\ \hat{u}_8\end{bmatrix}}_{\hat{u}} \qquad (14.3)$$

Burada 4ab=2·Dörtgenin alanı dır. Dörtgenin alanı sıfır veya negatif olmamalıdır. Numaralandırma satın ters yönünde yapılmaz, aksine saat yönünde yapılırsa alan negatif olur. *i-j-k-l* noktaları aynı doğru üzerinde olursa alan=0 olur, $\underline{\tilde{\phi}}^{-1}$ hesaplanamaz. Alan çok küçük olursa nümerik sorun yaratır. Bunun anlamı, sistemin hasta bir denklem sistemi olacağı, çözümün sağlıklı olmayacağıdır.

14.3 bağıntısı 14.2 de yerine yazar

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\\ \hat{u}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_1\hat{x}_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_1\hat{x}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\phi}}\underbrace{\frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0\\ -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b & 0\\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab\\ 0 & -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b\\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}}_{\tilde{\phi}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\\ \hat{u}_5\\ \hat{u}_6\\ \hat{u}_7\\ \hat{u}_8\end{bmatrix}}_{\hat{u}} \qquad (14.4)$$

ve çarpım sonucu bulunan matrisin terimlerini

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{4ab}(ab - b\hat{x}_1 - a\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2) \\
N_j &= \frac{1}{4ab}(ab + b\hat{x}_1 - a\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2) \\
N_k &= \frac{1}{4ab}(ab + b\hat{x}_1 + a\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2) \\
N_l &= \frac{1}{4ab}(ab - b\hat{x}_1 + a\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2)
\end{aligned} \tag{14.5}$$

ile gösterirsek

Elemanın yer değiştirme fonksiyonlarının $\underline{\hat{u}}$ cinsinden ifadesi

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \\ \hat{u}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}} \tag{14.6}$$

olur. $\hat{u}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ ve $\hat{u}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ yer değiştirme fonksiyonları, fiziksel anlamı olan $\underline{\hat{u}}$ vektörü cinsinden elde edilir. $N_i, N_j,\ N_k, N_l$ terimlerine şekil fonksiyonları denilmektedir.

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları:

2.18 e göre

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} u_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \\ u_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{1-\upsilon}(-\upsilon\varepsilon_{11} - \upsilon\varepsilon_{22}) \tag{14.7}$$

dır. 14.6 ile

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}N_i & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1}N_j & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1}N_k & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1}N_l & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2}N_i & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2}N_j & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2}N_k & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2}N_l \\ \frac{\partial}{\partial x_2}N_i & \frac{\partial}{\partial x_1}N_i & \frac{\partial}{\partial x_2}N_j & \frac{\partial}{\partial x_1}N_j & \frac{\partial}{\partial x_2}N_k & \frac{\partial}{\partial x_1}N_k & \frac{\partial}{\partial x_2}N_l & \frac{\partial}{\partial x_1}N_l \end{bmatrix}}_{\underline{D}\,\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}} \tag{14.7a}$$

14.7a daki türevler 14.5 den hesaplanır ve 14.7a da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}N_i &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_1}(ab - b\hat{x}_1 - a\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(-b + \hat{x}_2) \\
\frac{\partial}{\partial x_1}N_j &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_1}(ab + b\hat{x}_1 - a\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(b - \hat{x}_2) \\
\frac{\partial}{\partial x_1}N_k &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_1}(ab + b\hat{x}_1 + a\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(b + \hat{x}_2) \\
\frac{\partial}{\partial x_1}N_l &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_1}(ab - b\hat{x}_1 + a\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(-b - \hat{x}_2) \\
\\
\frac{\partial}{\partial x_2}N_i &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_2}(ab - b\hat{x}_1 - a\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(-a + \hat{x}_1) \\
\frac{\partial}{\partial x_2}N_j &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_2}(ab + b\hat{x}_1 - a\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(-a - \hat{x}_1) \\
\frac{\partial}{\partial x_2}N_k &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_2}(ab + b\hat{x}_1 + a\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(a + \hat{x}_1) \\
\frac{\partial}{\partial x_2}N_l &= \frac{1}{4ab}\frac{\partial}{\partial x_2}(ab - b\hat{x}_1 + a\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2) = \frac{1}{4ab}(a - \hat{x}_1)
\end{aligned} \tag{14.7b}$$

Elemanın şekil değiştirme fonksiyonlarının $\underline{\hat{u}}$ cinsinden ifadesi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} -b+\hat{x}_2 & 0 & b-\hat{x}_2 & 0 & b+\hat{x}_2 & 0 & -b-\hat{x}_2 & 0 \\ 0 & -a+\hat{x}_1 & 0 & -a-\hat{x}_1 & 0 & a+\hat{x}_1 & 0 & a-\hat{x}_1 \\ -a+\hat{x}_1 & -b+\hat{x}_2 & -a-\hat{x}_1 & b-\hat{x}_2 & a+\hat{x}_1 & b+\hat{x}_2 & a-\hat{x}_1 & -b-\hat{x}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}}, \varepsilon_{33} = \frac{1}{1-\upsilon}(-\upsilon\varepsilon_{11} - \upsilon\varepsilon_{22}) \tag{14.7c}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}\,\underline{\hat{u}} \tag{14.7d}$$

Gerilme- şekil değiştirme bağıntıları:

Düzlem gerilme durumu için, 2.18 e göre

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} \tag{14.8}$$

Düzlem gerilme durumunda elastisite matrisi

dır. 14.7c ile

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underbrace{\frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}-b+\hat{x}_2 & 0 & b-\hat{x}_2 & 0 & b+\hat{x}_2 & 0 & -b-\hat{x}_2 & 0\\ 0 & -a+\hat{x}_1 & 0 & -a-\hat{x}_1 & 0 & a+\hat{x}_1 & 0 & a-\hat{x}_1\\ -a+\hat{x}_1 & -b+\hat{x}_2 & -a-\hat{x}_1 & b-\hat{x}_2 & a+\hat{x}_1 & b+\hat{x}_2 & a-\hat{x}_1 & -b-\hat{x}_2\end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\\ \hat{u}_5\\ \hat{u}_6\\ \hat{u}_7\\ \hat{u}_8\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{4ab(1-\upsilon^2)}\begin{bmatrix}-b+\hat{x}_2 & \upsilon(-a+\hat{x}_1) & b-\hat{x}_2 & \upsilon(-a-\hat{x}_1) & b+\hat{x}_2 & \upsilon(a+\hat{x}_1) & -b-\hat{x}_2 & \upsilon(a-\hat{x}_1)\\ \upsilon(-b+\hat{x}_2) & -a+\hat{x}_1 & \upsilon(b-\hat{x}_2) & -a-\hat{x}_1 & \upsilon(b+\hat{x}_2) & a+\hat{x}_1 & \upsilon(-b+\hat{x}_2) & a-\hat{x}_1\\ \frac{1-\upsilon}{2}(-a+\hat{x}_1) & \frac{1-\upsilon}{2}(-b+\hat{x}_2) & \frac{1-\upsilon}{2}(-a-\hat{x}_1) & \frac{1-\upsilon}{2}(b-\hat{x}_2) & \frac{1-\upsilon}{2}(a+\hat{x}_1) & \frac{1-\upsilon}{2}(b+\hat{x}_2) & \frac{1-\upsilon}{2}(a-\hat{x}_1) & \frac{1-\upsilon}{2}(-b-\hat{x}_2)\end{bmatrix}}_{\underline{E}\,\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\\ \hat{u}_5\\ \hat{u}_6\\ \hat{u}_7\\ \hat{u}_8\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}} \tag{14.8a}$$

$\sigma_{33} = 0$

$$\underline{\sigma} = \underline{E}\,\underline{B}\,\hat{\underline{u}} \tag{14.8b}$$

14.7c den hesaplanan şekil değiştirmeler ve 14.8a dan hesaplanan gerilmeler $\hat{x}_1$ ve $\hat{x}_2$ nin fonksiyonudur. Bunun anlamı eleman içinde sabit olmadığı, aksine doğrusal değiştiğidir. Dolayısıyla dörtgen elemanın CST elemana nazaran daha doğru sonuç vereceği beklenir.

Elemanın rijitlik matrisi:

Üçgen eleman için çıkartılmış olan 12.9 ifadesi dörtgen eleman için de geçerlidir:

$$\hat{\underline{k}} = \int_V \underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{B}\;dV \tag{14.9}$$

Elemanın rijitlik matrisi

$dV = t dA = t\,d\hat{x}_1 d\hat{x}_2$ dir. t levhanın sabit kalınlığıdır.

$$\hat{\underline{k}} = \int_A \underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{B}\;t\,dA = t\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{B}\;d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \tag{14.9a}$$

14.7c deki $\underline{B}$ ve 14.8a daki $\underline{E}\,\underline{B}$ matrislerinin terimleri $\hat{x}_1$ ve $\hat{x}_2$ nin fonksiyonu olduğundan bu matrisler integralin dışına çıkarılamaz. $\underline{B}^T\underline{E}\,\underline{B}$ çarpımı yapılarak çarpımın her teriminin integralının alınması zorunludur. $\underline{B}^T\underline{E}\,\underline{B}$ çarpımı karmaşıktır. Çarpım ve 14.9 integrali Mathematica[1] yazılımı ile yapılarak belirlenen rijitlik matrisi aşağıda verilmiştir.

Elemanın rijitlik matrisi

$$\hat{\underline{k}} = \frac{Et}{24ab(1-\upsilon^2)}\begin{bmatrix}8b^2+4a^2(1-\upsilon) & & & & & & & \\ 3ab(1+\upsilon) & 8a^2+4b^2(1-\upsilon) & & & & & & \\ -8b^2+2a^2(1-\upsilon) & 3ab(1-3\upsilon) & 8b^2+4a^2(1-\upsilon) & & & & Simetrik & \\ -3ab(1-3\upsilon) & 4a^2-4b^2(1-\upsilon) & -3ab(1+\upsilon) & 8a^2+4b^2(1-\upsilon) & & & & \\ -4b^2-2a^2(1-\upsilon) & -3ab(1+\upsilon) & 4b^2-4a^2(1-\upsilon) & 3ab(1-3\upsilon) & 8b^2+4a^2(1-\upsilon) & & & \\ -3ab(1+\upsilon) & -4a^2-2b^2(1-\upsilon) & -3ab(1-3\upsilon) & -8a^2+2b^2(1-\upsilon) & 3ab(1+\upsilon) & 8a^2+4b^2(1-\upsilon) & & \\ 4b^2-4a^2(1-\upsilon) & -3ab(1-3\upsilon) & -4b^2-2a^2(1-\upsilon) & 3ab(1+\upsilon) & -8b^2+2a^2(1-\upsilon) & 3ab(1-3\upsilon) & 8b^2+4a^2(1-\upsilon) & \\ 3ab(1-3\upsilon) & -8a^2+2b^2(1-\upsilon) & 3ab(1+\upsilon) & -4a^2-2b^2(1-\upsilon) & -3ab(1-3\upsilon) & 4a^2-4b^2(1-\upsilon) & -3ab(1+\upsilon) & 8a^2+4b^2(1-\upsilon)\end{bmatrix}$$

[1] Mathematica 7, Wolfram Research, 2008

Sayısal örnek 14.1:

Şekil 14.2 deki betonarme perde C25/30 betonu ile inşa edilecektir. Tepe noktasında 1000 kN yatay yük etkimektedir.

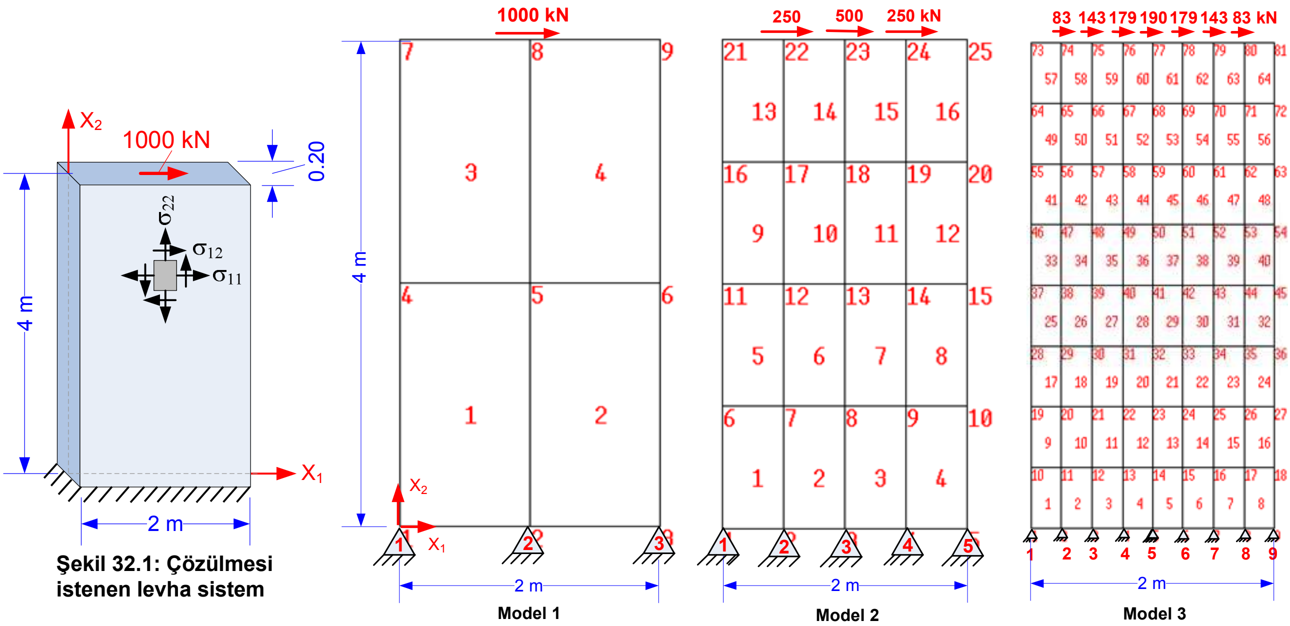
a) 1 noktasındaki σ_{22} gerilmesi
b) Tepe noktasının δ yatay yer değiştirmesi

hesaplanacaktır.

Malzeme: C25/30 betonu için E=30.10^6 kN/m^2 , υ=0.2 dir(TS500-2000).
Teorik çözüm[1]**:** $\delta = 6.2$ mm, $\sigma_{22} = 30000$ kN/m^2 dir.

Aşağıdaki üç farklı modelin sonuçları özetlenecektir.. Model 1 de sadece 4 eleman 9 nokta, model 2 de 16 eleman 25 nokta, model 3 de 64 eleman 81 nokta vardır. En alt noktalar sabit mesnetlidir(Model 3 de mesnetler, yer darlığı nedeniyle, çizilmemiştir).

.



Şekil 32.1: Çözülmesi istenen levha sistem

SEM2015

Örnek14-01-Model1

```
SİSTEM:Düzlem gerilme
Nokta sayısı: 9
Eleman sayısı: 4
Noktanın serbestlik derecesi: 2
Sistemin serbestlik derecesi: 18
Yarı band genişliği :9
Nokta yük sayısı: 1
Sınır koşulu sayısı: 6
```

SİSTEMİN YER DEĞİŞTİRMELERİ:

Nokta no	U1(m)	U2(m)
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0.001475	0.001043
5	0.00141	0
6	0.001475	-0.001043
7	0.004239	0.001386
8	0.004303	0
9	0.004239	-0.001386

$\delta = 4.3$ mm (hata: %31)
$\sigma_{22} = 7941\ kN/m^2$ (hata %74)

GERİLMELER:

Eleman no	Sigma11(kN/m²)	Sigma22(kN/m²)	Sigma12(kN/m²)	Sigma33(kN/m²)
1	606.01	7940.72	2500	0
2	-606.01	-7940.72	2500	0
3	509.56	2676.09	2500	0
4	-509.56	-2676.09	2500	0

[1] Girkmann, K., Flächentragwerke, Sayfa 51, Springer, 1963.

SEM2015

Örnek 14-01-Model2

```
SİSTEM:Düzlem gerilme
Nokta sayısı: 25
Eleman sayısı: 16
Noktanın serbestlik derecesi: 2
Sistemin serbestlik derecesi: 50
Yarı band genişliği :13
Nokta yük sayısı: 3
Sınır koşulu sayısı: 10
```

SİSTEMİN YER DEĞİŞTİRMELERİ:

Nokta no	U1 (m)	U2 (m)
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0.000654	0.000805
7	0.000591	0.000362
8	0.000575	0
9	0.000591	-0.000362
10	0.000653	-0.000805
11	0.001912	0.001364
12	0.001882	0.000653
13	0.001869	0
14	0.001884	-0.000653
15	0.001916	-0.001365
16	0.003637	0.001711
17	0.003614	0.00082
18	0.003615	-6E-6
19	0.00362	-0.000822
20	0.003639	-0.001698
21	0.005598	0.001828
22	0.005617	0.000878
23	0.005576	-5E-6
24	0.005561	-0.000877
25	0.005546	-0.001801

δ = 5.6 mm (hata: %10)
$\sigma_{22} = 17844\ kN/m^2$ (hata %40)

GERİLMELER:

Eleman no	Sigma11 (kN/m²)	Sigma22 (kN/m²)	Sigma12 (kN/m²)	Sigma33 (kN/m²)
1	1695.66	17843.89	2246.22	0
2	613.69	5558.05	2761.52	0
3	-615.57	-5550.25	2757.37	0
4	-1704.01	-17851.69	2234.89	0
5	-245.5	12689.12	1512.31	0
6	0.11	4355.18	3477.52	0
7	56.38	-4349.72	3485.98	0
8	291.05	-12694.58	1524.2	0
9	-75.26	7703.4	1574.48	0
10	157.36	2450.4	3258.55	0
11	64.13	-2618.86	3395.74	0
12	27.05	-7534.94	1771.23	0
13	392.2	2699.75	1749.75	0
14	-1055.74	661.4	3419.96	0
15	-463.95	-912.4	3279.27	0

SEM2015

Örnek14-01-Model3

SİSTEM:Düzlem gerilme
Nokta sayısı: 81
Eleman sayısı: 64
Noktanın serbestlik derecesi: 2
Sistemin serbestlik derecesi: 162
Yarı band genişliği :21
Nokta yük sayısı: 7
Sınır koşulu sayısı: 18

SİSTEMİN YER DEĞİŞTİRMELERİ:

Nokta	U1(m)	U2(m)		
1	0	0	0.002949	0.000815
2	0	0	0.002942	0.000403
3	0	0	0.00294	0
4	0	0	0.002942	-0.000403
5	0	0	0.002949	-0.000815
6	0	0	0.002961	-0.001243
7	0	0	0.002977	-0.001697
8	0	0	0.003955	0.001849
9	0	0	0.003945	0.001357
10	0.000278	0.000487	0.003937	0.000891
11	0.000235	0.000326	0.003932	0.000442
12	0.000212	0.000205	0.003931	0
13	0.000202	0.0001	0.003932	-0.000442
14	0.000199	0	0.003937	-0.000891
15	0.000202	-0.0001	0.003945	-0.001357
16	0.000212	-0.000205	0.003955	-0.001849
17	0.000235	-0.000326	0.004995	0.001939
18	0.000278	-0.000487	0.004989	0.001426
19	0.000711	0.000876	0.004985	0.000937
20	0.00068	0.000628	0.004983	0.000465
21	0.000655	0.000403	0.004982	0
22	0.000641	0.000197	0.004983	-0.000465
23	0.000637	0	0.004985	-0.000937
24	0.000641	-0.000197	0.004989	-0.001426
25	0.000655	-0.000403	0.004995	-0.001939
26	0.00068	-0.000628	0.006057	0.001968
27	0.000711	-0.000876	0.006061	0.001449
28	0.001324	0.00121	0.006064	0.000953
29	0.001297	0.000878	0.006066	0.000472
30	0.001279	0.000572	0.006067	0
31	0.001267	0.000281	0.006066	-0.000472
32	0.001263	0	0.006064	-0.000953
33	0.001267	-0.000281	0.006061	-0.001449
34	0.001279	-0.000572	0.006057	-0.001968
35	0.001297	-0.000878		
36	0.001324	-0.00121		
37	0.002089	0.001484		
38	0.002068	0.001084		
39	0.002053	0.000708		
40	0.002044	0.00035		
41	0.002041	0		
42	0.002044	-0.00035		
43	0.002053	-0.000708		
44	0.002068	-0.001084		
45	0.002089	-0.001484		
46	0.002977	0.001697		
47	0.002961	0.001243		

GERİLMELER:

Eleman	Sigma11(kN/m²)	Sigma22(kN/m²)	Sigma12(kN/m²)	Sigma33(kN/m²)
1	2387.26	24857.19	2366.95	0
2	1931.52	16310.01	2574.94	0
3	1250.31	9394.55	2540.59	0
4	429.91	3075.56	2517.52	0
5	-429.91	-3075.56	2517.52	0
6	-1250.31	-9394.55	2540.59	0
7	-1931.52	-16310.01	2574.94	0
8	-2387.26	-24857.19	2366.95	0
9	-303.99	20673.66	731.78	0

$\delta = 6.01$ mm (hata: %0.03)
$\sigma_{22} = 24857\ kN/m^2$ (hata %0.17)