

12. Üçgen levha eleman¹, düzlem gerilme durumu

Çok katlı yapılardaki deprem perdeleri ve yüksek kirisler düzlem levha gibi davranır. Sağdaki şekilde bir levha sistem ve üçgen elemanlarla yapılan SEM modeli görülmektedir. Levha $x_1 - x_2$ düzleminde.

Yükler levha düzlemi içindedir, x_3 doğrultusunda yük yoktur.

Sadece x_1 ve x_2 doğrultusunda yer değiştirme vardır: $u_1(x_1, x_2)$ ve $u_2(x_1, x_2)$.

Düzlem gerilme durumu söz konusudur. $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ ve $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ gerilmeleri oluşur, x_3 doğrultusunda gerilme oluşmadığı varsayılır.

Düzlem gerilme varsayımları ve bağıntıları için bak: Bölüm 2.6

12.1 Üçgen levha elemanın bağıntıları

Elemanların sadece düğümlerde birbirine bağlı olduğu, düğümler arasındaki ortak kenarlarda bağ olmadığı varsayılmaktadır. Levha sistemin $i-j-k$ düğümlerine bağlı i . elemanı sistemden çıkarılarak şekil 12.1 de gösterilmiştir. Düğüm numaraları, $i-j-k$, saatin ters yönündedir, sistemin tüm elemanları bu kurala göre numaralanmalıdır. Genel ve yerel koordinat sistemi birbirine paraleldir. Transformasyon matrisi birim matris olduğundan, genel ve yerel rijitlik matrisi aynı olacaktır. Bağıntılar genel koordinat sisteminde yazılacaktır. Düğüm serbestlik derecesi 2, elemanın serbestlik derecesi $2 \times 3 = 6$ dir:

| | | | |
|-----------------|-----|-------|---|
| \underline{u} | i | u_1 | i noktasında x_1 yönünde genel yer değiştirme |
| | | u_2 | i noktasında x_2 yönünde genel yer değiştirme |
| | j | u_3 | j noktasında x_1 yönünde genel yer değiştirme |
| | | u_4 | j noktasında x_2 yönünde genel yer değiştirme |
| | k | u_5 | k noktasında x_1 yönünde genel yer değiştirme |
| | | u_6 | k noktasında x_2 yönünde genel yer değiştirme |

\underline{u} yer değiştirmeleri yönünde tanımlı, fakat şekilde gösterilmemiş, $\underline{s} = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6]^T$ genel kuvvetleri vardır. Levha probleminde düğüm kuvvetleri değil, eleman içindeki $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ ve $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ gerilmeleri hesaplanır. İfadeleri basitleştirmek için elemanlara ait büyüklüklerde i indisi kullanılmayacaktır. E elastisite modülü, ν : Poisson oranı, t : elemanın kalınlığı, (x_{1i}, x_{2i}) : i noktasının koordinatları, (x_{1j}, x_{2j}) : j noktasının koordinatları, (x_{1k}, x_{2k}) : k noktasının koordinatları, yükler ve mesnet koşulları biliniyor varsayılmaktadır.

Elemanın yer değiştirme fonksiyonları(Ritz fonksiyonları):

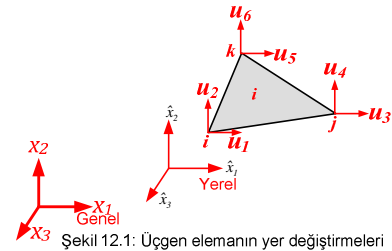
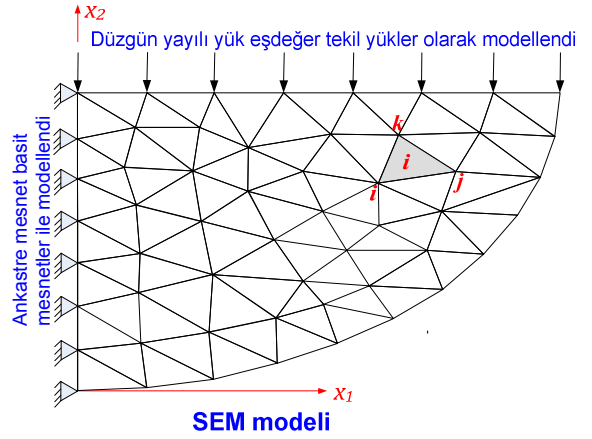
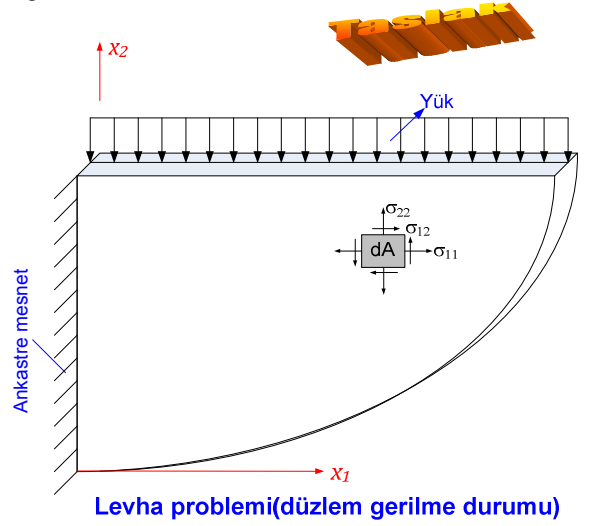
Elemanın $u_1(x_1, x_2)$ ve $u_2(x_1, x_2)$ yer değiştirmeleri için seçilecek Ritz fonksiyonlarının her biri 3 parametrelidir, çünkü serbestlik derecesi 6 dir. Yer değiştirme fonksiyonları:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 && x_1 \text{ yönünde yer değiştirme fonksiyonu} \\ u_2(x_1, x_2) &= a_4 + a_5 x_1 + a_6 x_2 && x_2 \text{ yönünde yer değiştirme fonksiyonu} \end{aligned} \quad (12.1)$$

doğrusal olarak seçilebilir. Matris notasyonunda

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

Buradaki a_i parametrelerinin fiziksel bir anlamı yoktur, sadece Ritz fonksiyonunun katsayılarıdır. $u_1(x_1, x_2)$ ve $u_2(x_1, x_2)$ yer değiştirme fonksiyonlarının fiziksel anlamı olan \underline{u} vektörü cinsinden yazmaya çalışmalıyız.



¹ Burada bağıntıları verilen üçgen eleman yüzeysel taşıyıcılar için geliştirilen ilk elemandır. Turner üçgeni, CST(Constant Strain Triangle veya Constant Stress Triangle =şekil değiştirmeler veya gerilmeler eleman içinde sabit üçgen) da denir. "Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, pp. 805-824, Sept. 1956" adlı çalışma ile duyuruldu.

12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

Sınır koşulları: 12.2 yer değiştirmeleri düğüm noktalarında düğüm yer değiştirmelerine eşit olmalıdır.

$i(x_{1i}, x_{2i})$ noktasında $u_1(x_{1i}, x_{2i}) = u_1$, ve $u_2(x_{1i}, x_{2i}) = u_2$ olmalı:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1i} & x_{2i} \end{bmatrix} \underline{a} \quad (12.2a)$$

$j(x_{1j}, x_{2j})$ noktasında $u_1(x_{1j}, x_{2j}) = u_3$, ve $u_2(x_{1j}, x_{2j}) = u_4$ olmalı:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1j} & x_{2j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1j} & x_{2j} \end{bmatrix} \underline{a} \quad (12.2b)$$

$k(x_{1k}, x_{2k})$ noktasında $u_1(x_{1k}, x_{2k}) = u_5$, ve $u_2(x_{1k}, x_{2k}) = u_6$ olmalı:

$$\begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1k} & x_{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} \underline{a} \quad (12.2c)$$

12.2a, 12.2b, 12.2c birleştirilerek:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{a} = \underline{\tilde{\Phi}}^{-1} \underline{u}$$

olur. $\underline{\tilde{\Phi}}$ nin tersi hesaplanarak, $\underline{a} = \underline{\tilde{\Phi}}^{-1} \underline{u}$ bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j} & 0 & x_{1k}x_{2i} - x_{1i}x_{2k} & 0 & x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i} & 0 \\ x_{2j} - x_{2k} & 0 & x_{2k} - x_{2i} & 0 & x_{2i} - x_{2j} & 0 \\ x_{1k} - x_{1j} & 0 & x_{1i} - x_{1k} & 0 & x_{1j} - x_{1i} & 0 \\ 0 & x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j} & 0 & x_{1k}x_{2i} - x_{1i}x_{2k} & 0 & x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i} \\ 0 & x_{2j} - x_{2k} & 0 & x_{2k} - x_{2i} & 0 & x_{2i} - x_{2j} \\ 0 & x_{1k} - x_{1j} & 0 & x_{1i} - x_{1k} & 0 & x_{1j} - x_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

Burada

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (x_{1j}x_{2k} + x_{1i}x_{2j} + x_{1k}x_{2i} - x_{2i}x_{1j} - x_{1i}x_{2k} - x_{2j}x_{1k}) \quad (12.3a)$$

üçgen elemanın alanıdır¹. $i-j-k$ noktaları aynı doğru üzerinde olursa $A=0$ olur, $\underline{\tilde{\Phi}}^{-1}$ hesaplanamaz. Elemanın iki açısı çok dar ise, $i-j-k$ noktaları yaklaşık aynı doğru üzerindedir, A sıfıra yakın olur. Bunun anlamı, sistemin hasta bir denklem sistemi olacağı, çözümün sağlıklı olmayacağıdır. **Çok dar açılı üçgen elemanlardan kaçınmak gerekir.**

Sonraki işlemleri basitleştirmek amacıyla

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j}, & \alpha_j &= x_{1k}x_{2i} - x_{1i}x_{2k}, & \alpha_k &= x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i} \\ \beta_i &= x_{2j} - x_{2k}, & \beta_j &= x_{2k} - x_{2i}, & \beta_k &= x_{2i} - x_{2j} \\ \gamma_i &= x_{1k} - x_{1j}, & \gamma_j &= x_{1i} - x_{1k}, & \gamma_k &= x_{1j} - x_{1i} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i, j, k \text{ noktalarının koordinatlarından hesaplanan} \\ \text{sabit sayılar} \end{array} \quad (12.4)$$

dönüşümü yaparsak 12.3

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & \alpha_j & 0 & \alpha_k & 0 \\ \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 & \alpha_j & 0 & \alpha_k \\ 0 & \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (12.5)$$

olur. \underline{a} yı 12.2 de yerine yazılarak elemanın $u_1(x_1, x_2)$ ve $u_2(x_1, x_2)$ yer değiştirme fonksiyonları, fiziksel anlamı olan, \underline{u} vektörü cinsinden hesaplanır:

¹ Üçgenin alanının $A = \pm \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}$ olduğu analitik geometri kitaplarında bulunabilir. Üçgenin saat ters yönünde ($i-j-k$) numaralanırsa +, saat yönünde ($i-k-j$) numaralanırsa - olur. Eksik olmaması için tüm elemanların $i-j-k$ sırasında numaralanması zorunludur.

12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}} \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & \alpha_j & 0 & \alpha_k & 0 \\ \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 & \alpha_j & 0 & \alpha_k \\ 0 & \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}}_{\underline{u}}$$

Elemanın yer değiştirme fonksiyonlarının \underline{u} cinsinden ifadesi

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2 & 0 & \alpha_j + \beta_j x_1 + \gamma_j x_2 & 0 & \alpha_k + \beta_k x_1 + \gamma_k x_2 & 0 \\ 0 & \alpha_i + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2 & 0 & \alpha_j + \beta_j x_1 + \gamma_j x_2 & 0 & \alpha_k + \beta_k x_1 + \gamma_k x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

Kaynaklarda çoğu kez 12.6 bağıntısı $N_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2)$, $N_j = \frac{1}{2A}(\alpha_j + \beta_j x_1 + \gamma_j x_2)$, $N_k = \frac{1}{2A}(\alpha_k + \beta_k x_1 + \gamma_k x_2)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (12.6a)$$

şeklinde yazılır. Buradaki N_i, N_j, N_k fonksiyonlarına şekil fonksiyonları¹ denir.

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları:

2.18 e göre

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{1-\nu} (-\nu \varepsilon_{11} - \nu \varepsilon_{22})$$

dır. 12.6 ile

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} \alpha_i + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2 & 0 & \alpha_j + \beta_j x_1 + \gamma_j x_2 & 0 & \alpha_k + \beta_k x_1 + \gamma_k x_2 & 0 \\ 0 & \alpha_i + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2 & 0 & \alpha_j + \beta_j x_1 + \gamma_j x_2 & 0 & \alpha_k + \beta_k x_1 + \gamma_k x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{1-\nu} (-\nu \varepsilon_{11} - \nu \varepsilon_{22}) \quad \text{Elemanın şekil değiştirme fonksiyonlarının } \underline{u} \text{ cinsinden ifadesi} \quad (12.7)$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u} \quad (12.7a)$$

¹ Shape functions

Gerilme- şekil değiştirme bağıntıları:

Düzlem gerilme durumu için, 2.18 e göre

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

Düzlem gerilme durumunda elastisite matrisi

dir. 12.7 ile

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{2A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \beta_i & \nu\gamma_i & \beta_j & \nu\gamma_j & \beta_k & \nu\gamma_k \\ \nu\beta_i & \gamma_i & \nu\beta_j & \gamma_j & \nu\beta_k & \gamma_k \\ \frac{1-\nu}{2}\gamma_i & \frac{1-\nu}{2}\beta_i & \frac{1-\nu}{2}\gamma_j & \frac{1-\nu}{2}\beta_j & \frac{1-\nu}{2}\gamma_k & \frac{1-\nu}{2}\beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}, \sigma_{33} = 0 \quad (12.8a)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{B} \underline{u} \quad (12.8b)$$

12.4 e göre $\beta_i, \beta_j, \beta_k, \gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$ büyüklükleri sabit sayılardır. A, E, ν , ve \underline{u} nun terimleri de sabit sayılardır (x_1 ve x_2 den bağımsız). Bunun anlamı 12.7 den hesaplanan şekil değiştirmelerin ve 12.8a dan hesaplanan gerilmelerin de eleman içindeki her noktada sabit olacaktır. Bu nedenle, bu elemana CST (Constant Strain Triangle veya Contant Stress Triangle) denilmektedir.

Elemanın toplam potansiyeli ve rijitlik matrisi:

$$\pi = \pi_i + \pi_d$$

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E} \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV \quad \begin{matrix} \text{İç kuvvetlerin potansiyeli} & \text{Dış kuvvetlerin potansiyeli} \\ \text{Şekil değiştirmeden } \underline{u} & \text{Hacimsel ve yüzeysel yayılı yüklerin} \\ \text{yönünde oluşan kuvvetler} & \underline{u} \text{ yönündeki eşdeğer tekil yükü} \end{matrix}$$

12.7a ile:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{u}^T \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \underline{u} dV \quad \begin{matrix} \text{İç kuvvetlerin potansiyeli} & \text{Dış kuvvetlerin potansiyeli} \\ \text{Şekil değiştirmeden } \underline{u} & \text{Hacimsel ve yüzeysel yayılı yüklerin} \\ \text{yönünde oluşan kuvvetler} & \underline{u} \text{ yönündeki eşdeğer tekil yükü} \end{matrix}$$

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \int_V \underline{B} \underline{E} \underline{B} dV \underline{u} \quad \begin{matrix} \text{İç kuvvetlerin potansiyeli} & \text{Dış kuvvetlerin potansiyeli} \\ \text{Şekil değiştirmeden } \underline{u} & \text{Hacimsel ve yüzeysel yayılı yüklerin} \\ \text{yönünde oluşan kuvvetler} & \underline{u} \text{ yönündeki eşdeğer tekil yükü} \end{matrix}$$

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{k} \underline{u} - \underline{u}^T \underline{s} - \underline{u}^T \underline{s}_{eşdeğer}$$

$$\underline{k} = \int_V \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} dV \quad \text{Elemanın rijitlik matrisi} \quad (12.9)$$

$dV = t dA = t dx_1 dx_2$ yerine konarak ve $\underline{B}, \underline{E}$ matrislerinin sabit terimli olduğu (x_1 ve x_2 den bağımsız) hatırlanarak:

$$\underline{k} = \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \int_V dx_1 dx_2$$

$$\underline{k} = tA \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \quad (12.9a)$$

olur.

12.9a çarpımı:

12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

$$\underline{k} = tA \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} = tA \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \gamma_i \\ 0 & \gamma_i & \beta_i \\ \beta_j & 0 & \gamma_j \\ 0 & \gamma_j & \beta_j \\ \beta_k & 0 & \gamma_k \\ 0 & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix}}_{\underline{B}}$$

Çarpım sonucu oldukça karmaşık terimlidir. Basitleştirmek için \underline{k} rijitlik matrisini iki matrisin toplamı ile ifade etmek uygun olmaktadır:

$$\underline{k} = \underline{k}_n + \underline{k}_s \quad \leftarrow \text{Elemanın rijitlik matrisi}$$

\underline{k}_n normal gerilmelere ait, \underline{k}_s kayma gerilmelerine ait rijitlik terimlerini içermektedir.

$$\underline{k}_n = \frac{Et}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \beta_i^2 & \nu\beta_i\gamma_i & \beta_i\beta_j & \nu\beta_i\gamma_j & \beta_i\beta_k & \nu\beta_i\gamma_k \\ \nu\beta_i\gamma_i & \gamma_i^2 & \nu\beta_j\gamma_i & \gamma_i\gamma_j & \nu\beta_k\gamma_i & \gamma_i\gamma_k \\ \beta_i\beta_j & \nu\beta_j\gamma_i & \beta_j^2 & \nu\beta_j\gamma_j & \beta_j\beta_k & \nu\beta_j\gamma_k \\ \nu\beta_i\gamma_j & \gamma_i\gamma_j & \nu\beta_j\gamma_j & \gamma_j^2 & \nu\beta_k\gamma_j & \gamma_j\gamma_k \\ \beta_i\beta_k & \nu\beta_k\gamma_i & \beta_j\beta_k & \nu\beta_k\gamma_j & \beta_k^2 & \nu\beta_k\gamma_k \\ \nu\beta_i\gamma_k & \gamma_i\gamma_k & \nu\beta_j\gamma_k & \gamma_j\gamma_k & \nu\beta_k\gamma_k & \gamma_k^2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Normal gerilmelere ait rijitlikler}$$

$$\underline{k}_s = \frac{Et}{8A(1+\nu)} \begin{bmatrix} \gamma_i^2 & \beta_i\gamma_i & \gamma_i\gamma_j & \beta_j\gamma_i & \gamma_i\gamma_k & \beta_k\gamma_i \\ \beta_i\gamma_i & \beta_i^2 & \beta_i\gamma_j & \beta_i\beta_j & \beta_i\gamma_k & \beta_i\beta_k \\ \gamma_i\gamma_j & \beta_i\gamma_j & \gamma_j^2 & \beta_j\gamma_j & \gamma_j\gamma_k & \beta_k\gamma_j \\ \beta_j\gamma_i & \beta_i\beta_j & \beta_j\gamma_j & \beta_j^2 & \beta_j\gamma_k & \beta_j\beta_k \\ \gamma_i\gamma_k & \beta_i\gamma_k & \gamma_j\gamma_k & \beta_j\gamma_k & \gamma_k^2 & \beta_k\gamma_k \\ \beta_k\gamma_i & \beta_i\beta_k & \beta_k\gamma_j & \beta_j\beta_k & \beta_k\gamma_k & \beta_k^2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Kayma gerilmelerine ait rijitlikler}$$

(12.9b)

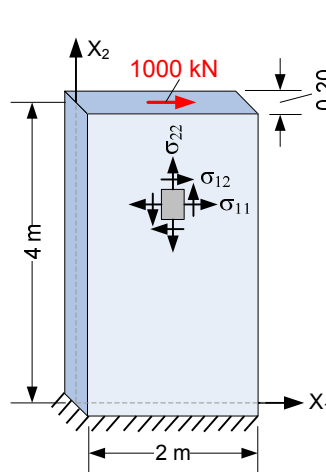
Sayısal örnek 12.1:

Şekil 12.2 deki betonarme perde C25/30 betonu ile inşa edilecektir. Tepe noktasında 1000 kN yatay yük etkimektedir.

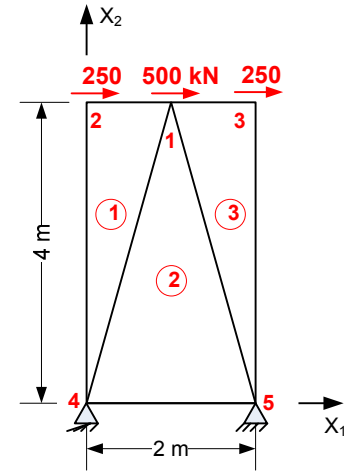
- Elemanlardaki gerilmeleri
- Elemanlardaki asal gerilmeleri
- Tepe noktasının yatay yer değiştirmesini hesaplayınız.

Sistem şekil 12.3 deki gibi üç eleman ve 5 düğüm ile modellenmiştir. Düğüm serbestlik derecesi 2, sistem serbestlik derecesi $2 \cdot 5 = 10$ dur.

Güvenilir doğrulukta sonuç alabilmek için çok daha fazla eleman (100-200) ile modellenmesi gerekir. Ancak el hesabında bu mümkün değildir. Bunun bilincinde olarak, hesap adımlarını göstermek amacıyla, çözümü yapalım.



Şekil 12.2: Çözülmesi istenen levha sistem



Şekil 12.3: Model

El hesaplarını basitleştiren aşağıdaki tabloyu hazırlayalım (birimler kN ve m dir):

Her elemanda: $E = 30 \cdot 10^6$, $\nu = 0.20$ (C25/30 betonu için TS500 – 2000 den), $t = 0.20$ (perde kalınlığı)

| Eleman | Nokta | | | Koordinatlar | | | A^1 | α_i | α_j | α_k | β_i | β_j | β_k | γ_i | γ_j | γ_k |
|--------|-------|---|---|--------------|-----|-----|-------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| | i | j | k | i | j | k | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 2 | 4 | 1,4 | 0,4 | 0,0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 4 | -4 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 2 | 1 | 4 | 5 | 1,4 | 0,0 | 2,0 | 4 | 0 | 8 | 0 | 0 | -4 | 4 | 2 | -1 | -1 |
| 3 | 1 | 5 | 3 | 1,4 | 2,0 | 2,4 | 2 | 8 | 4 | -8 | -4 | 0 | 4 | 0 | -1 | 1 |

α, β, γ sabitleri 12.4 den hesaplanmıştır

¹ Elemanlar dik üçgen olduğundan, alanlar şekilden basitçe hesaplanabilmektedir. Genel olarak 12.3a dan hesaplanır.

12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

Sistem yer değiştirme ve yük vektörü:

Sistemin yer değiştirmeleri ve bunların yönünde tanımlı düğüm yükleri (verilmiş dış yükler ve reaksiyonlar) sağdaki şekilde gösterilmiştir.

$$\underline{U}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ U_{10}]$$

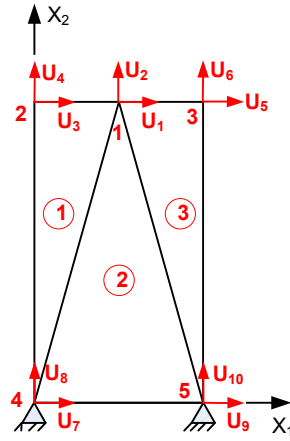
$$\underline{P}_0^T = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6 \ P_7 \ P_8 \ P_9 \ P_{10}]$$

1000 kN yükü, parabolik kayma gerilmesi dağılımını benzetebilmek için 1, 2, 3 düğümlerine şekil 12.3 deki gibi dağıtılmıştır. P_7, P_8, P_9, P_{10} reaksiyonlardır:

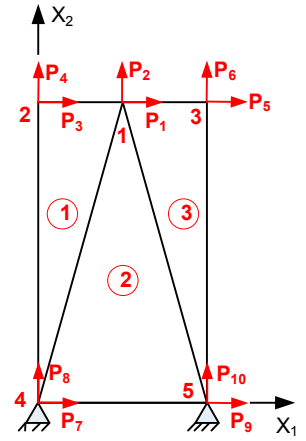
$$\underline{P}^T = [500 \ 0 \ 250 \ 0 \ 250 \ 0 \ P_7 \ P_8 \ P_9 \ P_{10}]$$

Sınır koşulları:

$$1 \cdot U_7 = 0, 1 \cdot U_8 = 0, 1 \cdot U_9 = 0, 1 \cdot U_{10} = 0$$



Sistem yer değiştirmeleri



Sistem düğüm kuvvetleri

Eleman ve sistem rijitlik matrisi: Bak: 12.9b

$$k^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.25 \cdot 10^7 & 0 & -1.25 \cdot 10^7 & 625000 & 0 & -625000 \\ 0 & 5 \cdot 10^6 & 1.25 \cdot 10^6 & -5 \cdot 10^6 & -1.25 \cdot 10^6 & 0 \\ -1.25 \cdot 10^7 & 1.25 \cdot 10^6 & 12812500 & -1875000 & -312500 & 625000 \\ 625000 & -5 \cdot 10^6 & -1875000 & 5781250 & 1.25 \cdot 10^6 & -781250 \\ 0 & -1.25 \cdot 10^6 & -312500 & 1.25 \cdot 10^6 & 312500 & 0 \\ -625000 & 0 & 625000 & -781250 & 0 & 781250 \end{bmatrix}$$

$$k^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 625000 & 0 & -312500 & -1.25 \cdot 10^6 & -312500 & 1.25 \cdot 10^6 \\ 0 & 1562500 & -625000 & -781250 & 625000 & -781250 \\ -312500 & -625000 & 6406250 & 937500 & -6093750 & -312500 \\ -1.25 \cdot 10^6 & -781250 & 937500 & 2890630 & 312500 & -2109380 \\ -312500 & 625000 & -6093750 & 312500 & 6406250 & -937500 \\ 1.25 \cdot 10^6 & -781250 & -312500 & -2109380 & -937500 & 2890630 \end{bmatrix}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.25 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 625000 & 1.25 \cdot 10^7 & -625000 \\ 0 & 5 \cdot 10^6 & 1.25 \cdot 10^6 & 0 & -1.25 \cdot 10^6 & 5 \cdot 10^6 \\ 0 & 1.25 \cdot 10^6 & 312500 & 0 & -312500 & -1.25 \cdot 10^6 \\ 625000 & 0 & 0 & 781250 & -625000 & -781250 \\ -1.25 \cdot 10^7 & -1.25 \cdot 10^6 & -312500 & -625000 & 12812500 & 1875000 \\ -625000 & -5 \cdot 10^6 & -1.25 \cdot 10^6 & -781250 & 1875000 & 5781250 \end{bmatrix}$$

Elemanların 1-1 alt matrislerinin toplamı

Elemanların 1-2 alt matrislerinin toplamı

....

$$K_D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25625000 & 0 & 12500000 & 625000 & 12500000 & -625000 & -312500 & -1875000 & -312500 & 1875000 \\ 0 & 11562500 & 1250000 & -5000000 & -1250000 & -5000000 & -1875000 & -781250 & 1875000 & -781250 \\ -12500000 & 1250000 & 12812500 & -1875000 & 0 & 0 & -312500 & 625000 & 0 & 0 \\ 625000 & -5000000 & -1875000 & 5781250 & 0 & 0 & 1250000 & -781250 & 0 & 0 \\ -12500000 & -1250000 & 0 & 0 & 12812500 & 1875000 & 0 & 0 & -312500 & -625000 \\ -625000 & -5000000 & 0 & 0 & 1875000 & 5781250 & 0 & 0 & -1250000 & -781250 \\ -312500 & -1875000 & -312500 & 1250000 & 0 & 0 & 6718750 & 937500 & -6093750 & -312500 \\ -1875000 & -781250 & 625000 & -781250 & 0 & 0 & 937500 & 3671880 & 312500 & -2109380 \\ -312500 & 1875000 & 0 & 0 & -312500 & -1250000 & -6093750 & 312500 & 6718750 & -937500 \\ 1875000 & -781250 & 0 & 0 & -625000 & -781250 & -312500 & -2109380 & -937500 & 3671880 \end{bmatrix}$$

Sınır koşulları işlenmesi ve denklem sisteminin çözümü:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 250 \\ 0 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

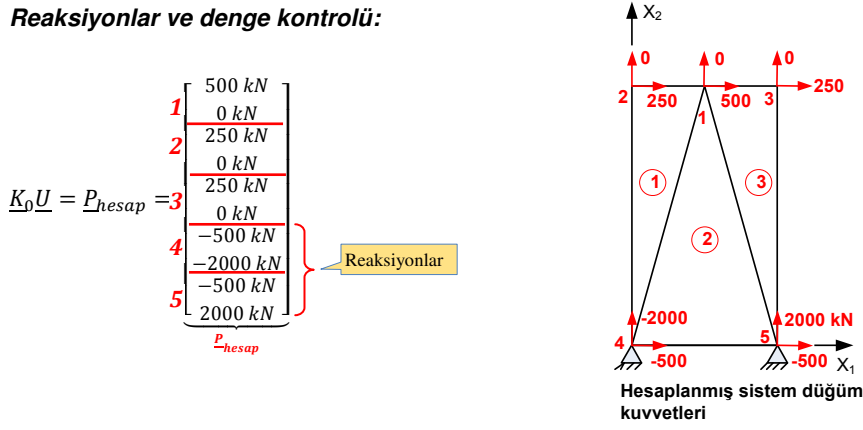
Tepe noktasında yer değiştirme

ÇÖZÜM

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001418 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0.001449 \text{ m} \\ 0.000317 \text{ m} \\ 0.001449 \text{ m} \\ -0.000317 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \end{bmatrix}$$

12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

Reaksiyonlar ve denge kontrolü:



$$K_0 \underline{U} = \underline{P}_{hesap} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 500 \text{ kN} \\ 0 \text{ kN} \\ 250 \text{ kN} \\ 0 \text{ kN} \\ 250 \text{ kN} \\ -500 \text{ kN} \\ -2000 \text{ kN} \\ -500 \text{ kN} \\ 2000 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

Reaksiyonlar

Elemanların yer değiştirmeleri:

$$\underline{u}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001418 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0.001449 \text{ m} \\ 0.000317 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \end{Bmatrix}, \quad \underline{u}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001418 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \end{Bmatrix}, \quad \underline{u}^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001418 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0.001449 \text{ m} \\ -0.000317 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Elemanların kuvvetleri:

$$\underline{S}^1 = \underline{k}^1 \underline{u}^1, \quad \underline{S}^2 = \underline{k}^2 \underline{u}^2, \quad \underline{S}^3 = \underline{k}^3 \underline{u}^3 \text{ bağıntılarından hesaplanabilir.}$$

Elemanlarda gerilmeler: Bak: 12.8a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{30 \cdot 10^6}{2 \cdot 2(1-0.2^2)} \begin{bmatrix} 4 & 0.2 \cdot 0 & -4 & 0.2 \cdot 1 & 0 & 0.2(-1) \\ 0.2 \cdot 4 & 0 & 0.2 \cdot (-4) & 1 & 0.2 \cdot 0 & -1 \\ 1-0.2 & 0 & 1-0.2 & 1 & 1-0.2 & (-4) \\ \frac{1-0.2}{2} \cdot 0 & \frac{1-0.2}{2} \cdot 4 & \frac{1-0.2}{2} & 1 & \frac{1-0.2}{2} & (-4) \\ \frac{1-0.2}{2} & (-4) & \frac{1-0.2}{2} & (-1) & \frac{1-0.2}{2} & (-1) \\ \frac{1-0.2}{2} & 0 & \frac{1-0.2}{2} & 0 & \frac{1-0.2}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001418 \\ 0 \\ 0.001449 \\ 0.000317 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -482.6 \text{ kN/m}^2 \\ 2278.6 \text{ kN/m}^2 \\ 569.6 \text{ kN/m}^2 \end{Bmatrix}$$

alt sol köşede gerilme

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{-482.6 + 2278.6}{2} + \sqrt{\left(\frac{-482.6 - 2278.6}{2}\right)^2 + 569.6^2} = 2391.5 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{-482.6 + 2278.6}{2} - \sqrt{\left(\frac{-482.6 - 2278.6}{2}\right)^2 + 569.6^2} = -595.5 \text{ kN/m}^2$$

1. elemanda asal gerilmeler

$$2\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2 \cdot 569.6}{-482.6 - 2278.6}\right) \rightarrow \varphi = -11.2^\circ$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{30 \cdot 10^6}{2 \cdot 4(1-0.2^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \cdot 2 & -4 & 0.2(-1) & 4 & 0.2(-1) \\ 0.2 \cdot 0 & 2 & 0.2(-4) & -1 & 0.2 \cdot 4 & -1 \\ 1-0.2 & 2 & 1-0.2 & 0 & 1-0.2 & (-4) \\ \frac{1-0.2}{2} & 2 & \frac{1-0.2}{2} & 0 & \frac{1-0.2}{2} & (-4) \\ \frac{1-0.2}{2} & 0 & \frac{1-0.2}{2} & (-4) & \frac{1-0.2}{2} & (-1) \\ \frac{1-0.2}{2} & 4 & \frac{1-0.2}{2} & 0 & \frac{1-0.2}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001418 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \text{ kN/m}^2 \\ 0.0 \text{ kN/m}^2 \\ 4430.3 \text{ kN/m}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{0+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + 4430.3^2} = 4430.3 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{0+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + 4430.3^2} = -4430.3 \text{ kN/m}^2$$

2. elemanda asal gerilmeler

$$2\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2 \cdot 4430.3}{0-0}\right) \rightarrow \varphi = 45^\circ$$

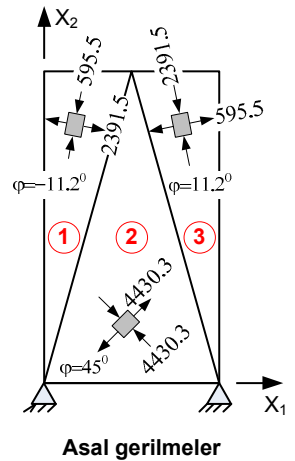
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{30 \cdot 10^6}{2 \cdot 2(1-0.2^2)} \begin{bmatrix} -4 & 0.2 \cdot 0 & 0 & 0.2(-1) & 4 & 0.2 \cdot 1 \\ 0.2(-4) & 0 & 0.2 \cdot 0 & -1 & 0.2 \cdot 4 & 1 \\ 1-0.2 & 0 & 1-0.2 & (-4) & 1-0.2 & 0 \\ \frac{1-0.2}{2} & 0 & \frac{1-0.2}{2} & (-4) & \frac{1-0.2}{2} & 0 \\ \frac{1-0.2}{2} & 0 & \frac{1-0.2}{2} & (-1) & \frac{1-0.2}{2} & 1 \\ \frac{1-0.2}{2} & 4 & \frac{1-0.2}{2} & 1 & \frac{1-0.2}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001418 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.001449 \\ -0.000317 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 482.6 \text{ kN/m}^2 \\ -2278.6 \text{ kN/m}^2 \\ 569.6 \text{ kN/m}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{482.6 - 2278.6}{2} + \sqrt{\left(\frac{482.6 + 2278.6}{2}\right)^2 + 569.6^2} = 595.5 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{482.6 - 2278.6}{2} - \sqrt{\left(\frac{482.6 + 2278.6}{2}\right)^2 + 569.6^2} = -2391.5 \text{ kN/m}^2$$

3. elemanda asal gerilmeler

$$2\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2 \cdot 569.6}{482.6 + 2278.6}\right) \rightarrow \varphi = 11.2^\circ$$



12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

Elemanlarda şekil değiştirmeler:

İstenirse, 12.7 bağıntılarından hesaplanabilir.

© Ahmet TOPÇU, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Sürüm: 18 Ekim 2015

SEM2015

Örnek 12.1

SİSTEM:Düzlem gerilme

Nokta sayısı: 5, Eleman sayısı: 3

Sistemin serbestlik derecesi: 10, Yarı band genişliği :9

Nokta yük sayısı: 3, Sınır koşulu sayısı: 4

SİSTEMİN YER DEĞİŞTİRMELERİ:

| Nokta | U1 (m) | U2 (m) |
|-------|----------|-----------|
| 1 | 0.001418 | 0 |
| 2 | 0.001449 | 0.000317 |
| 3 | 0.001449 | -0.000317 |
| 4 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 |

Kuvvetler:

| Eleman | Nokta | Yön-1 (kN) | Yön-2 (kN) |
|--------|-------|------------|------------|
| 1 | 1 | -193.04 | 227.86 |
| 1 | 2 | 250 | 0 |
| 1 | 4 | -56.96 | -227.86 |
| 2 | 1 | 886.07 | 0 |
| 2 | 4 | -443.04 | -1772.14 |
| 2 | 5 | -443.04 | 1772.14 |
| 3 | 1 | -193.04 | -227.86 |
| 3 | 5 | -56.96 | 227.86 |
| 3 | 3 | 250 | 0 |

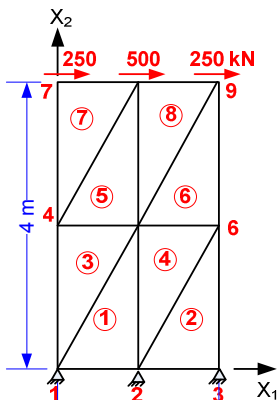
GERİLMELER:

| Eleman | Nokta | Sig11 (kN/m ²) | Sig22 (kN/m ²) | Sig12 (kN/m ²) |
|--------|-------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 | | -482.59 | 2278.56 | 569.64 |
| 2 | | 0 | 0 | 4430.36 |
| 3 | | 482.59 | -2278.56 | 569.64 |

Tepe noktasında yatay yer değiştirme:

Tepe noktasında(1 noktasında) $U_1 = \delta = 0.001418 \text{ m} = 1.4 \text{ mm}$ bulunmuştur. Teorik çözüme göre¹ bu noktadaki yatay yer değiştirme 6.2 mm dir. Görüldüğü gibi sonuç çok farklı, hata %77 dir. Bunun nedeni, el çözümü için sistemin sadece 3 eleman ile modellenmesidir. Doğruya yakın sonuç bulabilmek için 100-200 eleman ile modellemek gerekir, bu kadar çok eleman için el çözümünün imkânsız olduğu açıktır.

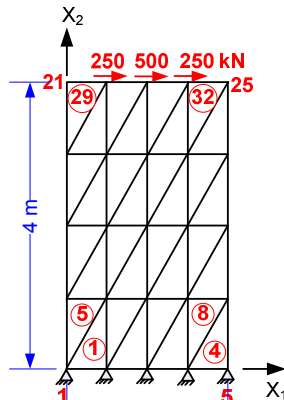
Aşağıdaki Model 1, Model 2 ve Model 3 de SEM2015² programı ile hesaplanan tepe noktasındaki δ yer değiştirmesi ve sol mesnet noktasındaki σ_{22} gerilmesi değerleri gösterilmiştir. Teorik çözüm: $\delta = 6.2 \text{ mm}$, $\sigma_{22} = 30000 \text{ kN/m}^2$ dir.



Model 1 (8 elemanlı)

$$\delta = 2.6 \text{ mm (hata: \%58)}$$

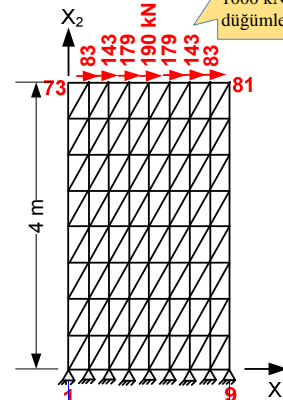
$$\sigma_{22} = 8393 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \text{ (hata: \%72)}$$



Model 2 (32 elemanlı)

$$\delta = 4.4 \text{ mm (hata: \%29)}$$

$$\sigma_{22} = 18760 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \text{ (hata: \%37)}$$



Model 3 (128 elemanlı)

$$\delta = 5.6 \text{ mm (hata: \%10)}$$

$$\sigma_{22} = 26974 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \text{ (hata: \%10)}$$

¹ Girkmann, K., Flächentragwerke, Sayfa 51, Springer, 1963.

² SEM2015: Buradaki örneklerin hesaplanması için hazırlanmış basit bir Sonlu Elemanlar Programı

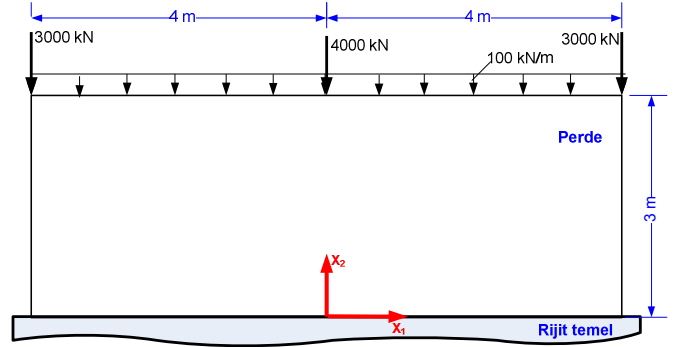
12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

Örnek 12.2:

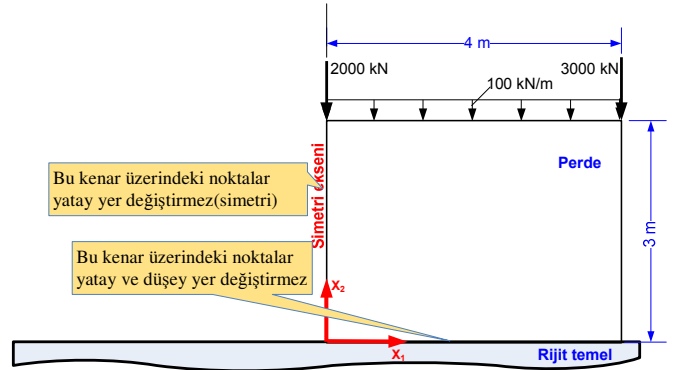
Şekil 12.4 de görülen, 8x3 m boyutlu ve 0.25 m kalınlığındaki betonarme perde rijit temele oturmaktadır. Beton sınıfı C25/30 dur. Levhaya etkiyen yükler üst yapıdaki kolonlardan, duvara ve döşemelerden gelmektedir. Bu yüklerden perdede oluşan σ_{11} , σ_{22} ve σ_{12} gerilmeleri hesaplanacak ve bazı kesitlerdeki dağılımları çizilecektir.

Bu örneğin amacı simetriden yararlanmayı, sınır koşullarının ve yüklerin modellenmesini, sonuçların yorumlanmasını kavratmaktır.

Sistem x_2 eksenine göre simetriktir, yarısıyla hesap yapılabilir. Eşdeğer sistem şekil 12.5 de gösterilmiştir. Perde rijit temele oturduğundan, alt kenar üzerindeki noktalar düşey ve yatay yönde yer değiştiremez. Simetri eksenindeki noktalar ise yatay yer değiştiremez ama düşey yer değiştirebilir.



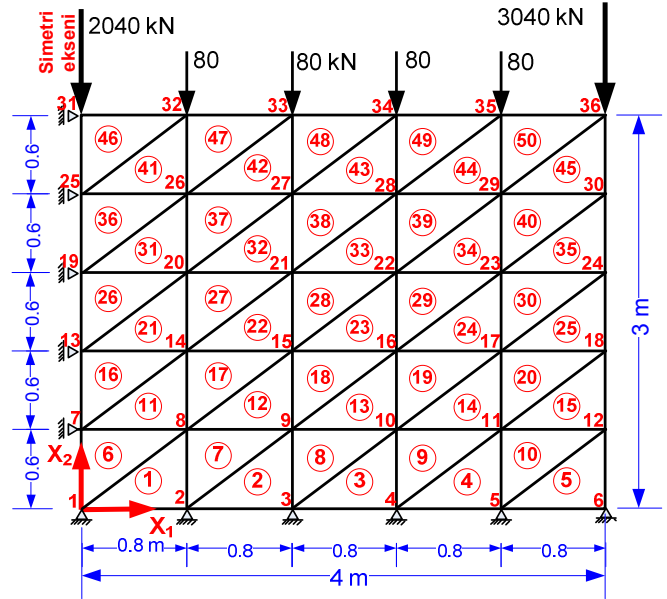
Şekil 12.4: Çözülmesi istenen levha sistem



Şekil 12.5: Çözülecek eşdeğer sistem

Eşdeğer sistemin 50 elemanlı SEM modeli Şekil 12.6 da gösterilmiştir. Alt kenar üzerindeki noktalar yatay ve düşey yönde, sol kenar üzerindeki noktalar yatay yönde yer değiştiremeyecek şekilde mesnetleşmiştir. 0.80 m lik boyda yayılı olan yükün eşdeğer tekil değeri $100 \cdot 0.80 = 80$ kN düğümlere aktarılmıştır.

Sistemin 36 noktası vardır, serbestlik derecesi $36 \cdot 2 = 72$ dir. Elle çözüm yapılamayacak kadar büyük, gerilmelerin doğru olması için küçüktür. Çözüm SEM2015 programı ile yapılmış ve sonuçlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 12.6: SEM modeli

© Ahmet TOPÇU, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Sürüm: 18 Ekim 2015

SEM2015

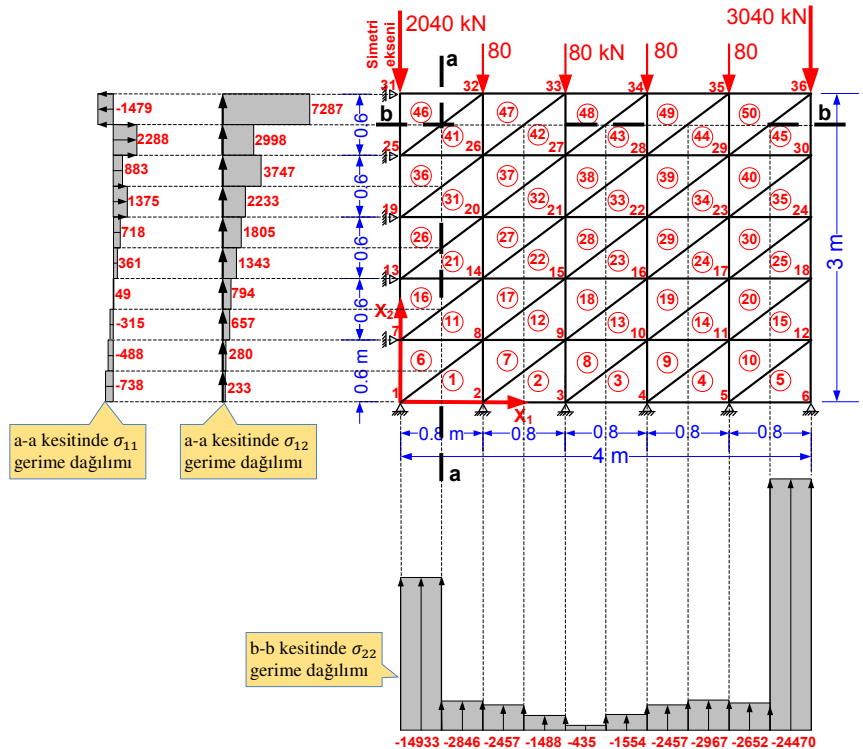
C:\SEM2015\Levha\Veriler\Örnek12.2

SİSTEM:Düzlem gerilme
Nokta sayısı: 36, Eleman sayısı: 50
Sistemin serbestlik derecesi: 72, Yarı band genişliği :15
Nokta yük sayısı: 6, Sınır koşulu sayısı: 17

12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

| SİSTEMİN YER DEĞİŞTİRMELERİ: | | | GERİLMELER: | | | | |
|------------------------------|----------|-----------|-------------|-------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Nokta | U1 (m) | U2 (m) | Eleman | Nokta | Sig11 (kN/m ²) | Sig22 (kN/m ²) | Sig12 (kN/m ²) |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | -738.44 | -3692.22 | 233.03 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | -662.87 | -3314.37 | 61.22 |
| 3 | 0 | 0 | 3 | 3 | -916.83 | -4584.16 | -295.65 |
| 4 | 0 | 0 | 4 | 4 | -1523.61 | -7618.04 | -362.88 |
| 5 | 0 | 0 | 5 | 5 | -2221.76 | -11108.8 | 409.3 |
| 6 | 0 | 0 | 6 | 6 | -488.49 | -4539.7 | 280.46 |
| 7 | 0 | -8.9E-5 | 7 | 7 | -1060.58 | -3756.65 | 346.38 |
| 8 | 1.1E-5 | -7.1E-5 | 8 | 8 | -1332.01 | -3448.2 | -319.71 |
| 9 | 3E-6 | -6.4E-5 | 9 | 9 | -1042.89 | -4609.37 | -1205.81 |
| 10 | -1.4E-5 | -8.8E-5 | 10 | 10 | -75.77 | -7328.48 | -1410.11 |
| 11 | -1.7E-5 | -0.000146 | 11 | 11 | -315.33 | -3673.89 | 657.14 |
| 12 | 2E-5 | -0.000213 | 12 | 12 | -883.02 | -2868.84 | 602.58 |
| 13 | 0 | -0.000194 | 13 | 13 | -1454.7 | -4061.65 | 32.56 |
| 14 | 2.9E-5 | -0.000143 | 14 | 14 | -1650.06 | -7645.23 | -600.99 |
| 15 | 2.6E-5 | -0.000117 | 15 | 15 | -1116.04 | -12529.8 | -484.56 |
| 16 | 6E-6 | -0.000163 | 16 | 16 | 48.9 | -5242.9 | 793.54 |
| 17 | -3E-6 | -0.000293 | 17 | 17 | -863.38 | -3783.5 | 777.1 |
| 18 | 4.7E-5 | -0.000459 | 18 | 18 | -1372.01 | -2966.64 | -228.73 |
| 19 | 0 | -0.000334 | 19 | 19 | -1107.22 | -3992.15 | -1604.33 |
| 20 | 5.6E-5 | -0.000218 | 20 | 20 | 399.14 | -7235.39 | -2297.86 |
| 21 | 7.2E-5 | -0.00016 | 21 | 21 | 361.46 | -3680.09 | 1343.31 |
| 22 | 6.7E-5 | -0.00022 | 22 | 22 | -552.56 | -2229.42 | 1359.8 |
| 23 | 6E-5 | -0.000432 | 23 | 23 | -1395.19 | -3082.56 | 558.33 |
| 24 | 0.000121 | -0.000756 | 24 | 24 | -1774.28 | -7327.46 | -723.74 |
| 25 | 0 | -0.000535 | 25 | 25 | -1163.05 | -15046.31 | -1057.49 |
| 26 | 7.6E-5 | -0.000295 | 26 | 26 | 717.98 | -6845.53 | 1805.02 |
| 27 | 0.000131 | -0.000194 | 27 | 27 | -124.85 | -3777.35 | 1460.65 |
| 28 | 0.000186 | -0.000253 | 28 | 28 | -658.38 | -2250.58 | 27.49 |
| 29 | 0.000215 | -0.000551 | 29 | 29 | -872.36 | -2977.99 | -2044.38 |
| 30 | 0.000294 | -0.001129 | 30 | 30 | 949.51 | -6782.71 | -3763.29 |
| 31 | 0 | -0.000827 | 31 | 31 | 1375.13 | -3559.77 | 2233.08 |
| 32 | 4E-5 | -0.000361 | 32 | 32 | 303.28 | -1636.68 | 2133.98 |
| 33 | 0.000166 | -0.000231 | 33 | 33 | -562.72 | -1772.27 | 1557.94 |
| 34 | 0.000356 | -0.000291 | 34 | 34 | -1522.59 | -6229.14 | -80.84 |
| 35 | 0.000585 | -0.000612 | 35 | 35 | -1486.77 | -18964.11 | -1460.43 |
| 36 | 0.000654 | -0.001611 | 36 | 36 | 882.77 | -9874.11 | 3747.48 |
| | | | 37 | 37 | 1348.68 | -3565.06 | 2006.89 |
| | | | 38 | 38 | 1804.58 | -1336.42 | 302.96 |
| | | | 39 | 39 | 772.16 | -1505.3 | -2163.6 |
| | | | 40 | 40 | 1837.42 | -5557.14 | -5799.46 |
| | | | 41 | 41 | 2288.46 | -2845.68 | 2997.71 |
| | | | 42 | 42 | 1764.09 | -1488 | 2308.41 |
| | | | 43 | 43 | 1761.01 | -1554.27 | 2612.06 |
| | | | 44 | 44 | 479.87 | -2966.75 | 3046.69 |
| | | | 45 | 45 | -1945.06 | -24469.58 | -1541.17 |
| | | | 46 | 46 | -1478.59 | -14933 | 7289.33 |
| | | | 47 | 47 | 4233.17 | -2456.74 | 1286.11 |
| | | | 48 | 48 | 7029.61 | -434.89 | -211.08 |
| | | | 49 | 49 | 8535.61 | -199.35 | -1482.56 |
| | | | 50 | 50 | 2054.89 | -2651.75 | -7907.23 |

a-a ve b-b kesitlerindeki gerilme dağılımı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Kullanılan eleman sabit gerilme elemanı(CST) olduğundan gerilmeler noktadan noktaya sürekli değildir, elemandan-eleman sığrama vardır. Örneğin 1 nolu elemanda $\sigma_{11} = -738 \text{ kN/m}^2$ (basınç) iken hemen yanındaki 6 nolu elemanda $\sigma_{11} = -488 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ dir. 1 ile 6 nın ortak kenarının noktalarında iki farklı gerilme değeri vardır, teorik açıdan bu doğru değildir. Bundan SEMin yaklaşık çözüm verdiği anlaşılıyor. Modelimizde çok az eleman olduğundan gerilme sıçramaları da büyüktür. Eleman sayısı çok olan bir modelle çözüm yapılırsa gerilme sıçramaları azalır.



12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

Örnek 12.3:

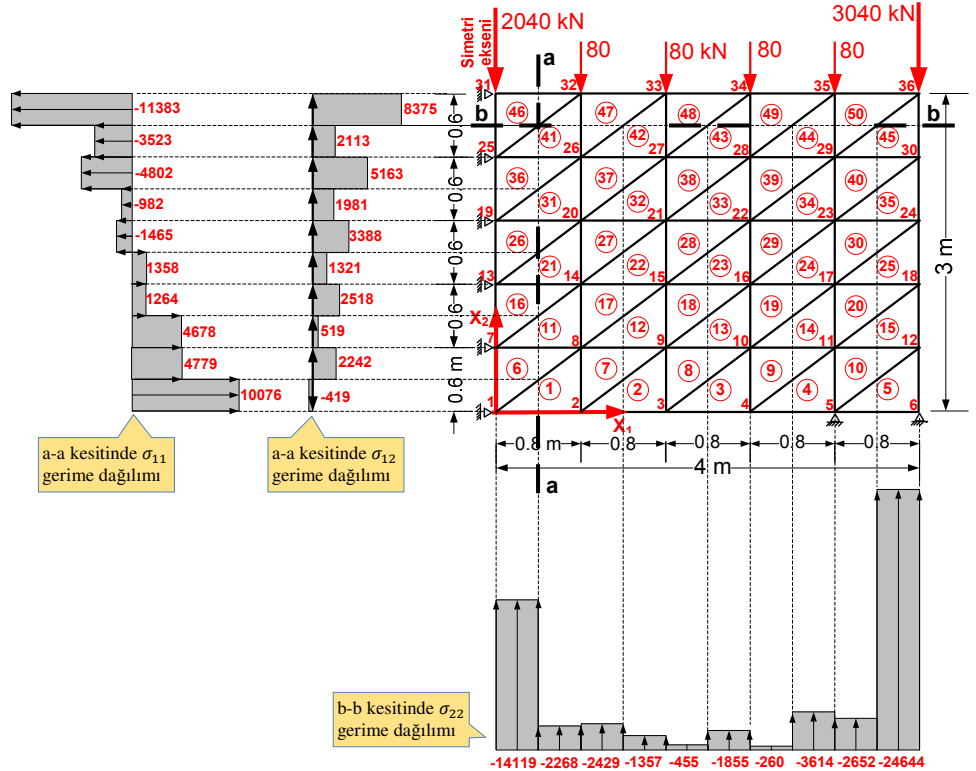
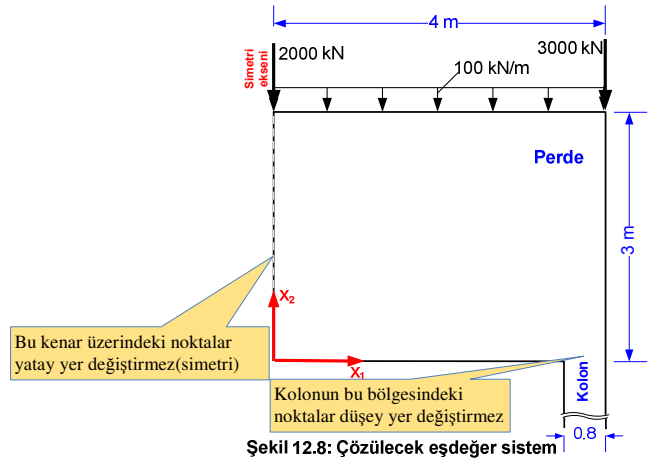
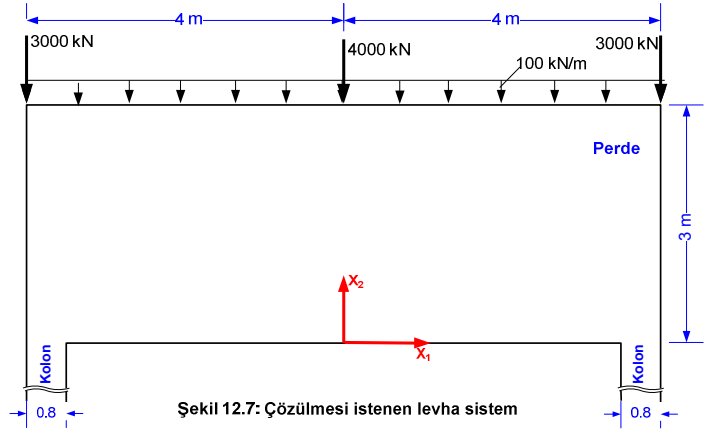
Şekil 12.7 de görülen, 8x3 m boyutlu ve 0.25 m kalınlığındaki betonarme perde rijit kolonlara oturmaktadır. Beton sınıfı C25/30 dur. Levhaya etkiyen yükler üst yapıdaki kolonlardan, duvar ve döşemelerden gelmektedir. Bu yüklerden perdede oluşan σ_{11} , σ_{22} ve σ_{12} gerilmeleri hesaplanacak ve bazı kesitlerdeki dağılımları çizilecektir.

Bu örneğin amacı simetriden yararlanmayı, sınır koşullarının ve yüklerin modellenmesini, sonuçların yorumlanmasını kavratmaktır.

Sistem x_2 eksenine göre simetrik, yarısıyla hesap yapılabilir. Eşdeğer sistem şekil 12.8 de gösterilmiştir. Perdenin kolonlara oturduğu noktalar düşey yönde yer değiştiremez. Simetri eksenindeki noktalar ise yatay yer değiştiremez ama düşey yer değiştirebilir.

Eşdeğer sistemin 50 elemanlı SEM modeli Şekil 12.9 da gösterilmiştir. Alt kenarın kolona oturan noktaları düşey yönde, sol kenar üzerindeki noktalar yatay yönde yer değiştiremeyecek şekilde mesnetleşmiştir. 0.80 m lik boyda yayılı olan yükün eşdeğer tekil değeri $100 \cdot 0.80 = 80$ kN düğümlere aktarılmıştır.

Sistemin 36 noktası vardır, serbestlik derecesi $36 \cdot 2 = 72$ dir. Elle çözüm yapılamayacak kadar büyük, gerilmelerin doğru olması için küçüktür. Çözüm SEM2015 programı ile yapılmış ve bazı kesitlerdeki gerilme dağılımları şekil 12.9 da verilmiştir.



Şekil 12.9: SEM modeli

Yorum:

Komşu elemanlarda gerilme sıçramaları vardır. Bu, üçgen elemanın her noktasında gerilmenin sabit olmasından kaynaklanmaktadır (CST eleman). Sistemin eleman sayısı arttıkça sıçramalar azalır. Bazı araştırmacılar bir noktadaki gerilmeyi o noktada birleşen elemanların gerilmelerinin ortalaması olarak almayı önermektedirler.

12. Üçgen levha eleman, düzlem gerilme durumu

© Ahmet TOPÇU, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Sürüm: 18 Ekim 2015

SEM2015

C:\SEM2015\Levha\Veriler\Örnek12-3

SİSTEM:Düzlem gerilme

Nokta sayısı: 36, Eleman sayısı: 50

Sistemin serbestlik derecesi: 72, Yarı band genişliği :15

Nokta yük sayısı: 6, Sınır koşulu sayısı: 8

SİSTEMİN YER DEĞİŞTİRMELERİ:

| Nokta | U1 (m) | U2 (m) |
|-------|-----------|-----------|
| 1 | 0 | -0.001978 |
| 2 | 0.000266 | -0.001818 |
| 3 | 0.000467 | -0.001488 |
| 4 | 0.000604 | -0.000976 |
| 5 | 0.000692 | 0 |
| 6 | 0.000613 | 0 |
| 7 | 0 | -0.00199 |
| 8 | 0.000126 | -0.001847 |
| 9 | 0.000216 | -0.001514 |
| 10 | 0.000264 | -0.001038 |
| 11 | 0.000322 | -0.000387 |
| 12 | 0.000437 | -0.000173 |
| 13 | 0 | -0.002031 |
| 14 | 4.3E-5 | -0.00187 |
| 15 | 5.4E-5 | -0.001534 |
| 16 | 4.5E-5 | -0.001111 |
| 17 | 6.6E-5 | -0.000666 |
| 18 | 0.000168 | -0.00047 |
| 19 | 0 | -0.002118 |
| 20 | -1.4E-5 | -0.001901 |
| 21 | -5.6E-5 | -0.001549 |
| 22 | -0.0001 | -0.001169 |
| 23 | -0.000115 | -0.000877 |
| 24 | -3.3E-5 | -0.000814 |
| 25 | 0 | -0.002272 |
| 26 | -8.2E-5 | -0.001941 |
| 27 | -0.00016 | -0.00156 |
| 28 | -0.000196 | -0.001199 |
| 29 | -0.000208 | -0.001026 |
| 30 | -0.00013 | -0.00121 |
| 31 | 0 | -0.002508 |
| 32 | -0.000228 | -0.001972 |
| 33 | -0.000331 | -0.001574 |
| 34 | -0.000293 | -0.001229 |
| 35 | -0.000126 | -0.001094 |
| 36 | -6E-5 | -0.001695 |

GERİLMELER:

| Eleman | Nokta | Sig11 (kN/m ²) | Sig22 (kN/m ²) | Sig12 (kN/m ²) |
|--------|-------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 | 1 | 10076.18 | 553.18 | -418.59 |
| 2 | 2 | 7587.77 | 229.14 | -70.13 |
| 3 | 3 | 4721.93 | -2177.01 | 918.26 |
| 4 | 4 | -614.39 | -19470.85 | 7548.37 |
| 5 | 5 | -4878.19 | -9612.63 | -3658.64 |
| 6 | 6 | 4778.69 | 313.94 | 2241.55 |
| 7 | 7 | 3237.66 | -814.52 | 2284.9 |
| 8 | 8 | 1589.94 | -970.43 | 2219.51 |
| 9 | 9 | 1629.11 | -2795.58 | 3083.99 |
| 10 | 10 | 463.62 | -19255.24 | -4350.53 |
| 11 | 11 | 4677.96 | -189.73 | 519.13 |
| 12 | 12 | 3330.75 | -349.04 | 1825.41 |
| 13 | 13 | 1096.58 | -3437.22 | 2875.09 |
| 14 | 14 | -629.77 | -14089.95 | 4827.29 |
| 15 | 15 | 1400.47 | -14570.96 | -2260.57 |
| 16 | 16 | 1264.24 | -1756.57 | 2517.83 |
| 17 | 17 | 207.44 | -1083.83 | 3513.36 |
| 18 | 18 | -576.35 | -1130.46 | 3235.38 |
| 19 | 19 | 43.25 | -3647.88 | 2392.54 |
| 20 | 20 | 1098.21 | -13744.35 | -2278.01 |
| 21 | 21 | 1357.91 | -1288.25 | 1321.3 |
| 22 | 22 | 292.61 | -658 | 2942.39 |
| 23 | 23 | -961.52 | -3056.34 | 3584.31 |
| 24 | 24 | -1385.41 | -10791.19 | 3188.14 |
| 25 | 25 | 423.27 | -17119.06 | -1119.46 |
| 26 | 26 | -1465.39 | -4635.92 | 3387.52 |
| 27 | 27 | -1939.68 | -1947.77 | 4302.77 |
| 28 | 28 | -1889.68 | -1094.46 | 3646.84 |
| 29 | 29 | -1177.35 | -3099.51 | 1536.54 |
| 30 | 30 | 1023.11 | -10309.49 | -2786.59 |
| 31 | 31 | -981.92 | -2218.57 | 1981.31 |
| 32 | 32 | -1726.7 | -882.87 | 3330.13 |
| 33 | 33 | -2054.69 | -1919.52 | 3948.54 |
| 34 | 34 | -2141.01 | -7917.78 | 2630.95 |
| 35 | 35 | -912.24 | -19986.23 | -1036.31 |
| 36 | 36 | -4801.9 | -8662.55 | 5162.52 |
| 37 | 37 | -3466.57 | -2715.5 | 4557.05 |
| 38 | 38 | -1519.59 | -841.45 | 3467.59 |
| 39 | 39 | -784.19 | -1665.42 | 702.8 |
| 40 | 40 | 1497.26 | -7190.13 | -4801.32 |
| 41 | 41 | -3523.04 | -2268.23 | 2112.77 |
| 42 | 42 | -3194.78 | -1356.55 | 2402.88 |
| 43 | 43 | -1721.56 | -1851.33 | 3608.14 |
| 44 | 44 | -1173.85 | -3613.73 | 4408.51 |
| 45 | 45 | -1993.42 | -24643.53 | -1408.43 |
| 46 | 46 | -11382.73 | -14119.01 | 8374.65 |
| 47 | 47 | -4328.49 | -2429.33 | 3177.91 |
| 48 | 48 | 1314.93 | -454.61 | 1829.69 |
| 49 | 49 | 6233.61 | -260.29 | 80.87 |
| 50 | 50 | 1877.9 | -3003.38 | -7675.29 |