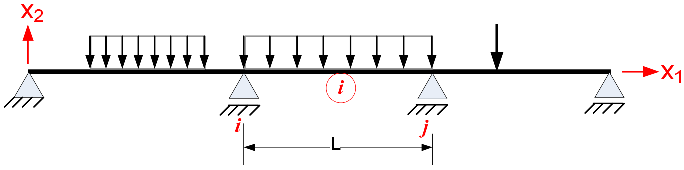
8. Sürekli kiriş elemanı rijitlik matrisi

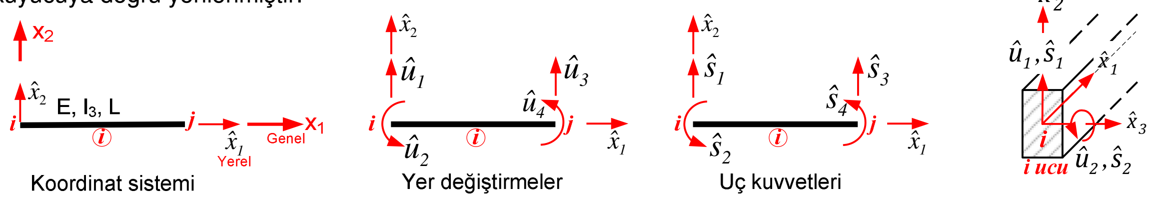
Sağda görülen, eksenel iç kuvveti olmadığı varsayılan, sürekli kirişin çözümünde kullanılabilecek *i.* elemanının yer değiştirme fonksiyonu, toplam potansiyeli, denge koşulu ve rijitlik matrisi belirlenecektir. Böyle bir kirişin herhangi bir noktasında serbestlik derecesi=2 dir: x_2 doğrultusunda yer değiştirme ve x_3 etrafında dönme.



Şekil 8.1 Sürekli kiriş

8.1 Yüksüz kiriş elemanı

Sürekli kirişin *i.* ve *j.* düğümüne bağlı ***i.* elemanının üzerindeki yüklerin eşdeğerinin sistemin düğümlerine aktarıldığını varsayalım.** Önce yüksüz elemanın bağıntılarını kuralım, sonra eşdeğer düğüm yükünün nasıl belirleneceğini görelim. Yüksüz elemanın koordinat sistemi, uç yer değiştirmeleri bunlara karşılık gelen uç kuvvetleri şekil 8.2 de gösterilmiştir. Genel x_3 ve yerel $\hat{x}_3$ eksenleri kâğıt(ekran düzlemine) dik ve okuyucuya doğru yönlenmiştir.



Şekil 8.2 Sürekli kiriş *i.* elemanı

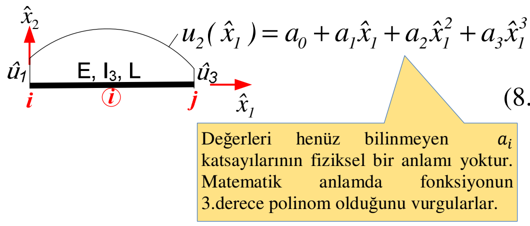
Şekillerin incelenmesinden

- Genel ve yerel koordinat eksenlerinin paralel olduğu,
- Her düğümde bir düşey yer değiştirme ve $\hat{x}_3$ etrafında dönme olduğu,
- Elemanın düğüm yerel değiştirmelerinin genel yer değiştirmeler ile aynı olduğu,
- Elemanın düğüm yerel kuvvetlerinin genel kuvvetler ile aynı olduğu,
- Yerel-genel transformasyonuna gerek olmadığı(transformasyon matrisi birim matris)
- Yerel rijitlik matrisinin genel rijitlik matrisi ile aynı olacağı

anlaşılır. Sistemin düğüm yüklerinden oluşan yer değiştirme ve kuvvet vektörleri:

$$\underline{\hat{u}} = \underline{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} i \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde yer değiştirme} \\ i \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında dönme} \\ j \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde yer değiştirme} \\ j \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında dönme} \end{array} \qquad \underline{\hat{s}} = \underline{s} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} i \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde kesme} \\ i \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında eğilme momenti} \\ j \text{ noktasında } \hat{x}_2 \text{ yönünde kesme} \\ j \text{ noktasında } \hat{x}_3 \text{ etrafında eğilme momenti} \end{array}$$

Elemanın rijitlik matrisi $\underline{\hat{k}} = \underline{k}$ yer değiştirme ve uç kuvvet vektörü arasında bağ kurar: $\underline{\hat{s}} = \underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}}$. Bu bağıntı elemanın denge koşuludur ve elemanın toplam potansiyelinin minimum olma koşulundan bulunur. Yükler nedeniyle eleman boyunca ve $\hat{x}_2$ yönünde $u_2(\hat{x}_1)$ yer değiştirme olacaktır. Toplam potansiyelin hesabı için $u_2(\hat{x}_1)$ için bir fonksiyon seçmemiz gerekir. Bu fonksiyon (RİTZ fonksiyonu, elastik eğri)



$$u_2(\hat{x}_1) = a_0 + a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_1^2 + a_3\hat{x}_1^3 = \underbrace{[1 \quad \hat{x}_1 \quad \hat{x}_1^2 \quad \hat{x}_1^3]}_{\underline{\phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} \tag{8.1}$$

olsun[1]. 8.1 elemanın sınır koşullarını sağlamak zorundadır:

$\hat{x}_1 = 0$ da $u_2(0) = \hat{u}_1$ olmalı $\rightarrow a_0 = \hat{u}_1$

$\hat{x}_1 = 0$ da $\frac{\partial u_2(0)}{\partial \hat{x}_1} = \hat{u}_2$ olmalı $\rightarrow a_1 = \hat{u}_2$ (dönme)[2]

$\hat{x}_1 = L$ de $u_2(L) = \hat{u}_3$ olmalı $\rightarrow a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = \hat{u}_3$

$\hat{x}_1 = L$ de $\frac{\partial u_2(L)}{\partial \hat{x}_1} = \hat{u}_4$ olmalı $\rightarrow a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 = \hat{u}_4$ (dönme)

[1] Mukavemet derslerinden elastik eğri denkleminin $-EIu_2^{iv} = p$ olduğu bilinmektedir. 4 kez integral alınırsa u_2 nin 4. derece polinom olduğu anlaşılır. Elemanı yüksüz varsaydığımızdan burada p=0 ve $-EIu_2^{iv} = 0$ dır. 4 kez integral alınırdığında u_2 4 parametreli 3. derece polinom olur. Zaten, elemanın serbestlik derecesi 4 olduğundan, 4 den fazla parametreli bir fonksiyon seçmemiz mümkün değildir.

[2] Mukavemetten bilindiği gibi, elastik eğrinin birinci türevi dönmeyi verir.

Matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & L & L^2 & L^3\\ 0 & 1 & 2L & 3L^2\end{bmatrix}}_{\tilde{\phi}} \underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}}_{a} \xrightarrow{\text{Ters matris hesabı ile}} \underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L}\\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2}\end{bmatrix}}_{\tilde{\phi}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{u}} \qquad (8.2)$$

8.2 deki $\underline{a}$ yı 8.1 de yerine yazarsak:

$$u_2(\hat{x}_1) = \underbrace{[1 \quad \hat{x}_1 \quad \hat{x}_1^2 \quad \hat{x}_1^3]}_{\phi} \underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{[1 \quad \hat{x}_1 \quad \hat{x}_1^2 \quad \hat{x}_1^3]}_{\phi} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L}\\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2}\end{bmatrix}}_{\tilde{\phi}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{u}}$$

Yer değiştirme:

$$u_2(\hat{x}_1) = \underbrace{\left[\left(1 - \frac{3\hat{x}_1^2}{L^2} + \frac{2\hat{x}_1^3}{L^3}\right) \quad \left(\hat{x}_1 - \frac{2\hat{x}_1^2}{L} + \frac{\hat{x}_1^3}{L^2}\right) \quad \left(\frac{3\hat{x}_1^2}{L^2} - \frac{2\hat{x}_1^3}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{\hat{x}_1^2}{L} + \frac{\hat{x}_1^3}{L^2}\right)\right]}_{\tilde{\phi}} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{u}} \qquad (8.3)$$

Elemanın sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme

Şekil değiştirme(Euler-Bernoilli kirişi): $\varepsilon_{11} = -u_2'' \, \hat{x}_2$ Bak: 3.18

$$u_2'' = \frac{\partial u_2(\hat{x}_1)}{\partial \hat{x}_1^2} = \left[\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{2}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right)\right] \underline{\hat{u}} \qquad (8.4)$$

$$\varepsilon_{11} = \underbrace{-\,\hat{x}_2 \left[\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{2}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right)\right]}_{\hat{D}} \underline{\hat{u}} \qquad (8.5)$$

Elemanın şekil değiştirme fonksiyonu

$$\underline{\varepsilon}^i = \underline{\hat{D}}^i \, \underline{\hat{u}}^i \qquad (8.6)$$

i. elemanın şekil değiştirme fonksiyonu=süreklilik koşulu

Gerilme: $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = -Eu_2'' \, \hat{x}_2$ Bak: 3.19

$$\sigma_{11} = -E\hat{x}_2 \left[\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{2}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right)\right] \underline{\hat{u}} \qquad (8.7)$$

Elemanın gerilme dağılımı fonksiyonu

Moment: $M_3 = -EI_3 u_2''$ Bak: 3.20

$$M_3 = -EI_3 \left[\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12\hat{x}_1}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{2}{L} + \frac{6\hat{x}_1}{L^2}\right)\right] \underline{\hat{u}} \qquad (8.8)$$

Elemanın moment fonksiyonu(doğrusal)

Kesme: $V_2 = \frac{\partial M_3}{\partial \hat{x}_1}$ Bak: 3.21

$$V_2 = -EI_3 \left[\frac{12}{L^3} \quad \frac{6}{L^2} \quad -\frac{12}{L^3} \quad \frac{6}{L^2}\right] \underline{\hat{u}} \qquad (8.9)$$

Elemanın kesme fonksiyonu(sabit)

Yüksüz elemanın toplam potansiyeli: $\Pi = \Pi_i + \Pi_d$ Bak: 3.11

Π_i : gerilmelerin şekil değiştirmelerle yaptığı iştir

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E} \, \underline{\varepsilon} \, dV$$

Π_d : dış kuvvetlerin yaptığı işin ters işaretlisidir

$$\Pi_d = -W_d = -(\hat{u}_1\hat{s}_1 + \hat{u}_2\hat{s}_2 + \hat{u}_3\hat{s}_3 + \hat{u}_4\hat{s}_4) = -\underbrace{[\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \hat{u}_3 \quad \hat{u}_4]}_{\hat{u}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\\ \hat{s}_3\\ \hat{s}_4\end{bmatrix}}_{\hat{s}} = -\underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E} \, \underline{\varepsilon} \, dV - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}}$$

olur. 8.6 yerine konarak ve $\underline{\hat{u}}$ nin sabit olduğu hatırlanarak,

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V (\underline{\hat{D}} \, \underline{\hat{u}})^T \underline{E} \, \underline{\hat{D}} \, \underline{\hat{u}} \, dV - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}} = \frac{1}{2} \, \underline{\hat{u}}^T \underbrace{\int_V \underline{\hat{D}}^T \underline{E} \, \underline{\hat{D}} \, dV}_{\hat{k}} \, \underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}} \, .$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \, \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{k}} \, \underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}} \qquad (8.10)$$

Yüksüz elemanın toplam potansiyeli

olur. Buradaki

$\underline{\hat{k}} = \int_V \underline{\hat{D}}^{\,T} \underline{E}\, \underline{\hat{D}}\; dV$ Elemanın rijitlik matrisi

elemanın rijitlik matrisidir, terimleri sabit sayılardır. Boyutu elemanın serbestlik derecesi kadar ve simetriktir. Şekil 8.2 deki eleman için 4x4 boyutundadır. Genelleştirme:

$$\Pi^i = \frac{1}{2}\,(\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{s}}^i \tag{8.11}$$

Yüksüz *i.* elemanın toplam potansiyeli

$$\underline{\hat{k}}^i = \int_V (\underline{\hat{D}}^i)^T \underline{E}^i\, \underline{\hat{D}}^i\; dV \tag{8.12}$$

i. Elemanın rijitlik matrisi

Yüksüz elemanın denge koşulu:

Denge konumunda 8.11 toplam potansiyeli minimum olur:

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial \underline{\hat{u}}^i} = \frac{\partial \Pi^i}{\partial \underline{\hat{u}}^i}\left\{\frac{1}{2}(\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{s}}^i\right\} = \frac{1}{2}\,2\underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i - \underline{\hat{s}}^i = 0$$

$$\underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i = \underline{\hat{s}}^i \tag{8.13}$$

Yüksüz *i.* elemanın denge koşulu

olur.

Teorik örnek 8.1: Şekil 8.2 deki elemanın rijitlik matrisini 8.12 bağıntısından hesaplayınız, denge koşulunun açık şeklini yazınız.

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre $\underline{\hat{D}}^i$ 8.5 deki gibidir. Sadece ε_{11} şekil değiştirmesi olduğundan $\underline{E}$=*E* dir. $dV = dA d\hat{x}_1$ alınabilir. Bunlar 8.12 de yerine yazılarak

$$\underline{\hat{k}}^i = E\int_0^L \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3} \\ -\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2} \\ \frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3} \\ -\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2} \end{bmatrix}}_{(\underline{\hat{D}}^i)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} (-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) & (\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{D}}^i} \underbrace{\int_A \hat{x}_2^2 dA}_{I_3\ \text{atalet momenti}} \quad d\hat{x}_1$$

$$\underline{\hat{k}}^i = EI_3\int_0^L \begin{bmatrix} (-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3})^2 & (-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3})(-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) & (-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3})(\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3})(-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) \\ (-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})(-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})^2 & (-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})(\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})(-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) \\ (\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3})(-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3})(-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) & (\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3})^2 & (\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3})(-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) \\ (-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})(-\frac{6}{L^2}+\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})(-\frac{4}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2}) & (-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})(\frac{6}{L^2}-\frac{12\hat{x}_1}{L^3}) & (-\frac{2}{L}+\frac{6\hat{x}_1}{L^2})^2 \end{bmatrix} d\hat{x}_1$$

$$\underline{\hat{k}}^i = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad & i & \quad & j \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2} & -\frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2} \\ \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L} \\ \hline -\frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} \\ \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L} \end{array}\right] \end{array} \tag{8.14}$$

i. Elemanın rijitlik matrisi

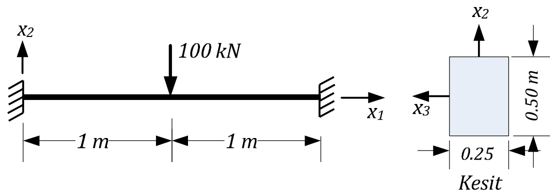
8.13 de yerine konularak denge koşulları:

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\!\!\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad & i & \quad & j \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2} & -\frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2} \\ \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L} \\ \hline -\frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} \\ \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L} \end{array}\right] \end{array}}_{\underline{\hat{k}}^i} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hline \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{array}\right]}_{\underline{\hat{u}}^i} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hline \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \end{array}\right]}_{\underline{\hat{s}}^i} \tag{8.15}$$

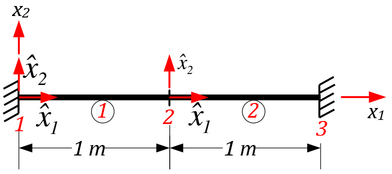
Yüksüz *i.* elemanın denge koşulu

Sayısal örnek 8.2:

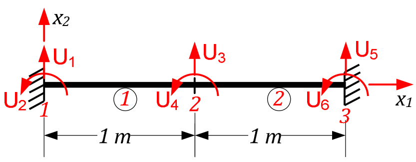
Şekilde görülen kiriş C25/30 betonu ile imal edilecektir. Yük altındaki çökmeyi bulunuz, moment ve kesme diyagramlarını çiziniz.



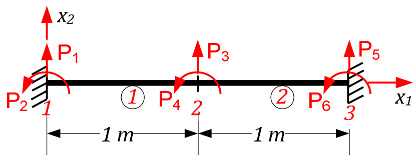
Seçilen koordinat sistemleri ve numaralama aşağıdaki şekillerdeki gibi olsun. Genel-yerel koordinat eksenleri birbirine paralel olduğundan genel-yerel transformasyon matrisine gerek yoktur. Sistem iki eleman ile modellenmiştir, elemanlar üzerinde yük yoktur, eksenel kuvvet oluşmaz. Bu nedenle 8.14 ve 8.15 bağıntıları çözüm için kullanılabilir.



Koordinat sistemi ve numaralama



Sistem yer değiştirmeleri



Sistem kuvvetleri

Hesaplarda kN ve m birimlerini kullanalım.
Elastisite modülü: E=30000 N/mm^2 (TS 500-2000 den)=$30 \cdot 10^6$ kN/m^2
Atalet momenti: $I_3=0.25 \cdot 0.50^3/12=26 \cdot 10^{-4}$ m^4
$EI_3=30 \cdot 10^6 \cdot 26 \cdot 10^{-4}=78 \cdot 10^3$ kN m^2
Düğüm serbestlik derecesi(bir düşey yer değiştirme, bir dönme)= 2, sistem serbestlik derecesi=2$\cdot$3=6
1. elamanda L=1 m, 2. elemanda L=1 m.

Elemanların ve sistemin rijitlik matrisleri: Bak: 8.14

$$\underline{\hat{k}}^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad 2 \\ \begin{bmatrix} 936000 & 468000 & -936000 & 46800 \\ 468000 & 312000 & -468000 & 156000 \\ -936000 & -468000 & 936000 & -468000 \\ 468000 & 156000 & -468000 & 312000 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\hat{k}}^2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad 2 \qquad\qquad\qquad\qquad 3 \\ \begin{bmatrix} 936000 & 468000 & -936000 & 46800 \\ 468000 & 312000 & -468000 & 156000 \\ -936000 & -468000 & 936000 & -468000 \\ 468000 & 156000 & -468000 & 312000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sistem rijitlik matrisi

$$\underbrace{\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad\qquad 3 \\ \begin{bmatrix} 936000 & 468000 & -936000 & 468000 & 0 & 0 \\ 468000 & 312000 & -468000 & 156000 & 0 & 0 \\ -936000 & -468000 & 1872000 & 0 & -936000 & 468000 \\ 468000 & 156000 & 0 & 624000 & -468000 & 156000 \\ 0 & 0 & -936000 & -468000 & 936000 & -468000 \\ 0 & 0 & 468000 & 156000 & -468000 & 312000 \end{bmatrix} \end{array}}_{\underline{K_0}}$$

Sistemin denge koşulu: $\underline{K_0}\,\underline{U} = \underline{P_0}$

Sistem yük vektörü

$$\underbrace{\begin{array}{c} \quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad\qquad 3 \\ \begin{bmatrix} 936000 & 468000 & -936000 & 468000 & 0 & 0 \\ 468000 & 312000 & -468000 & 156000 & 0 & 0 \\ -936000 & -468000 & 1872000 & 0 & -936000 & 468000 \\ 468000 & 156000 & 0 & 624000 & -468000 & 156000 \\ 0 & 0 & -936000 & -468000 & 936000 & -468000 \\ 0 & 0 & 468000 & 156000 & -468000 & 312000 \end{bmatrix} \end{array}}_{\underline{K_0}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}}_{\underline{P_0}} = \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ -100 \\ 0 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}}_{\underline{P_0}} \begin{array}{l} \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \\ \text{Verilmiş yük} \\ \text{Verilmiş yük} \\ \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \end{array}$$

Sınır koşulları ve işlenmesi: $1 \cdot U_1=0,\ 1 \cdot U_2=0,\ 1 \cdot U_5=0,\ 1 \cdot U_6=0$

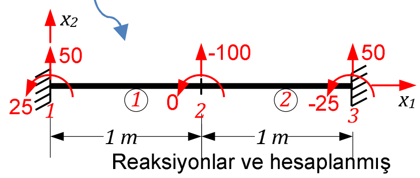
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1872000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 624000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{P}} \xrightarrow{\text{ÇÖZÜM}} \underline{U} = \begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ rad \\ -5342 \cdot 10^{-8}\ m \\ 0\ rad \\ 0\ m \\ 0\ rad \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

Sistem yer değiştirmeleri

Yük altında çökme: - $53 \cdot 10^{-6}$ m=-0.053 mm Aşağı doğru

Denge kontrolü ve reaksiyonlar:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & & 2 & & 3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} & \underbrace{\begin{bmatrix} 936000 & 468000 & -936000 & 468000 & 0 & 0 \\ 468000 & 312000 & -468000 & 156000 & 0 & 0 \\ -936000 & -468000 & 1872000 & 0 & -936000 & 468000 \\ 468000 & 156000 & 0 & 624000 & -468000 & 156000 \\ 0 & 0 & -936000 & -468000 & 936000 & -468000 \\ 0 & 0 & 468000 & 156000 & -468000 & 312000 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0} \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5342 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 50\,kN \\ 25\,kNm \\ -100\,kN \\ 0\,kNm \\ 50\,kN \\ -25\,kNM \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{hesap}} \begin{array}{l} \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \end{array}$$



Reaksiyonlar ve hesaplanmış düğüm kuvvetleri

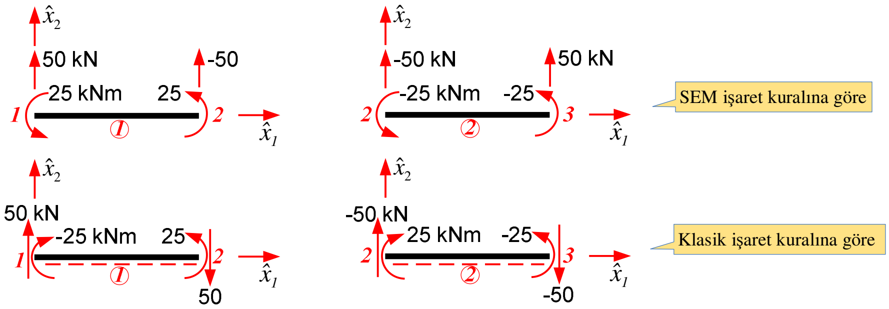
Eleman yer değiştirmeleri:

$$\underline{\hat{u}}^1 = \underline{u}^1 = \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5342 \cdot 10^{-8} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{u}}^2 = \underline{u}^2 = \begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -5342 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

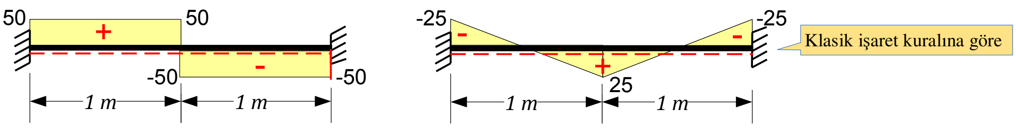
Eleman kuvvetleri: Bak: 8.15

$$\underline{\hat{s}}^1 = \underline{s}^1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 936000 & 468000 & -936000 & 46800 \\ 468000 & 312000 & -468000 & 156000 \\ -936000 & -468000 & 936000 & -468000 \\ 468000 & 156000 & -468000 & 312000 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}^1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5342 \cdot 10^{-8} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 50\,kN \\ 25\,kNm \\ -50\,kN \\ 25\,kNm \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^1}\begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{\hat{s}}^2 = \underline{s}^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 936000 & 468000 & -936000 & 46800 \\ 468000 & 312000 & -468000 & 156000 \\ -936000 & -468000 & 936000 & -468000 \\ 468000 & 156000 & -468000 & 312000 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -5342 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -50\,kN \\ -25\,kNm \\ 50\,kN \\ -25\,kNm \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^2}\begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}$$



Diyagramlar*(klasik işaret kuralına göre):*



Kesme Moment

8.2 Yüklü elemanın eşdeğer düğüm yükleri[1]

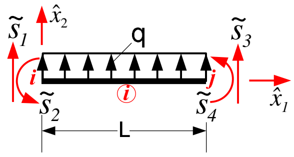
SEMde tüm dış yüklerin sistemin düğümlerine etkidiği varsayılır. Bu nedenle, eleman üzerindeki dış yüklerin enerji eşdeğerlerinin[2] sistem düğümlerine, tekil yük olarak, aktarılması zorunludur. Kiriş, plak, levha,…, eleman üzerindeki yükler eşdeğer tekil yüklere dönüştürülür, dönüştürülmüş tekil yükler sistem düğüm noktalarını aktarılır.

Düzgün yayılı yükün eşdeğer düğüm yükleri:

Örnek olarak şekil 8.1 deki *i.* elemanın eşdeğer düğüm kuvvetlerini bulalım. Sistemden kesilip çıkarılan *i.* elemanın eşdeğer düğüm kuvvetleri şekil 8.3 de $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4$ ile gösterilmiştir. Bunlar elemanın şekil 8.2 de görülen $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4$ uç yer değiştirmeleri ile iş yapar. Eleman boyunca değişen $u_2(\hat{x}_1)$ yer değiştirmesi olacaktır. O halde, q ve $u_2(\hat{x}_1)$ da beraber iş yapacaktır. Bu iki iş birbirine eşit olmalıdır:

$$\int_0^L u_2(\hat{x}_1)\, q\, d\hat{x}_1 = \tilde{s}_1\hat{u}_1 + \tilde{s}_2\hat{u}_2 + \tilde{s}_3\hat{u}_3 + \tilde{s}_4\hat{u}_4$$

8.3 deki $u_2(\hat{x}_1)$ ile:



Şekil 8.3 eşdeğer kuvvetler

[1] Energy equivalent concentrated loads
[2] Bir yükün enerji eşdeğeri aynı dış işi yapan başka bir yüktür.

$$\int_0^L \underbrace{\left[\left(1-\frac{3\hat{x}_1^2}{L^2}+\frac{2\hat{x}_1^3}{L^3}\right)\quad\left(\hat{x}_1-\frac{2\hat{x}_1^2}{L}+\frac{\hat{x}_1^3}{L^2}\right)\quad\left(\frac{3\hat{x}_1^2}{L^2}-\frac{2\hat{x}_1^3}{L^3}\right)\quad\left(-\frac{\hat{x}_1^2}{L}+\frac{\hat{x}_1^3}{L^2}\right)\right]}_{\hat{\emptyset}} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}} q\, d\hat{x}_1 = \underbrace{[\tilde{s}_1 \quad \tilde{s}_2 \quad \tilde{s}_3 \quad \tilde{s}_4]}_{\tilde{s}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}}$$

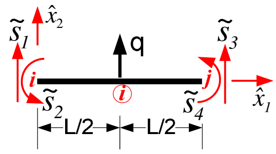
integral alınırsa:

$$\left[\frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12}\right] \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}} = \underbrace{[\tilde{s}_1 \quad \tilde{s}_2 \quad \tilde{s}_3 \quad \tilde{s}_4]}_{\tilde{s}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}} \rightarrow \underline{\tilde{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix}}_{\tilde{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{qL}{2}\\ \frac{qL^2}{12}\\ \frac{qL}{2}\\ -\frac{qL^2}{12}\end{bmatrix}}_{\tilde{s}} \tag{8.16}$$

Düzgün yayılı yükün eşdeğer tekil yükleri

Tekil yükün eşdeğer düğüm yükleri:

Şekil 8.4 deki tekil q yükünün işini hesaplayabilmemiz için yükün bulunduğu noktadaki yer değiştirmeyi bulmalıyız. 8.3 de $\hat{x}_1 = L/2$ yazarak:



Şekil 8.4 eşdeğer kuvvetler

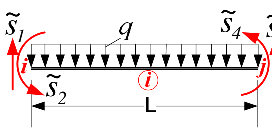
$$u_2(L/2) = [1/2 \quad L/8 \quad 1/2 \quad -L/8] \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}}$$

$$u_2(L/2)\, q = [1/2 \quad L/8 \quad 1/2 \quad -L/8] \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}} q = \underbrace{[\tilde{s}_1 \quad \tilde{s}_2 \quad \tilde{s}_3 \quad \tilde{s}_4]}_{\tilde{s}^T} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}}$$

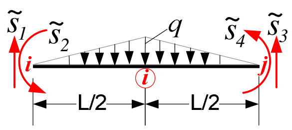
$$\underline{\tilde{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix}}_{\tilde{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{q}{2}\\ \frac{qL}{8}\\ \frac{q}{2}\\ -\frac{qL}{8}\end{bmatrix}}_{\tilde{s}} \tag{8.17}$$

Tekil yükün eşdeğer tekil yükleri

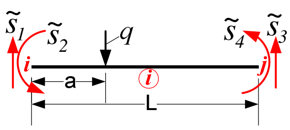
Eleman üzerindeki yükün eşdeğer düğüm yükleri, statik derslerinden bilinen, ankastrelik kuvvetleridir. Sürekli kirişlerde karşılaşılan yaygın yük tipleri için ankastrelik kuvvetleri şekil 8.4a da verilmiştir. Verilen değerler elemanın i ucu solda, j ucu sağda ve yük aşağı doğru yönlenmiş olması durumu için geçerlidir. Diğer yük tipleri için ankastrelik kuvvetleri herhangi bir yapı statiği kitabından alınabilir. Ancak, alınan ankastrelik kuvvetinin işaretini buradaki yönlere uyacak şekilde değiştirmek gerekebilir.



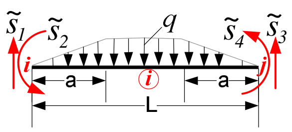
$$\underline{s}^i = \begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{qL}{2}\\ \frac{qL^2}{12}\\ \frac{qL}{2}\\ -\frac{qL^2}{12}\end{bmatrix}$$



$$\underline{s}^i = \begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{qL}{4}\\ \frac{5}{96}qL^2\\ \frac{qL}{4}\\ -\frac{5}{96}qL^2\end{bmatrix}$$



$$\underline{s}^i = \begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}q\left(1-\frac{3a^2}{L^2}+\frac{2a^3}{L^3}\right)\\ q\left(a-\frac{2a^2}{L}+\frac{a^3}{L^2}\right)\\ q\left(\frac{3a^2}{L^2}-\frac{2a^3}{L^3}\right)\\ q\left(-\frac{a^2}{L}+\frac{a^3}{L^2}\right)\end{bmatrix}$$



$$\underline{s}^i = \begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}q(L-a)\\ \frac{q}{12}\left(L^2-2a^2+\frac{a^3}{L}\right)\\ \frac{1}{2}q(L-a)\\ -\frac{q}{12}\left(L^2-2a^2+\frac{a^3}{L}\right)\end{bmatrix}$$

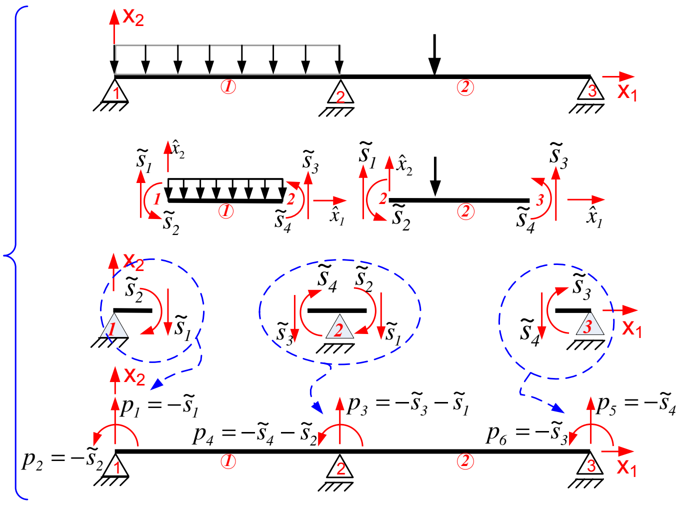
Şekil 8.4a: Bazı yük tiplerinin ankastrelik kuvvetleri

Eşdeğer yüklerin sistem düğümlerine aktarılması:

Hesaplanan eşdeğer yükler eleman düğümündeki yüklerdir. Bunların sistem düğümüne aktarılması gerekmektedir. Bunun nasıl yapılacağı şekil 8.5 deki örnek ile gösterilmiştir:

Kural:

1) Üzerinde yük olan elemanların ankastrelik kuvvetlerini(eşdeğer yükler) hesapla.
2) Eleman düğümündeki ankastrelik kuvvetlerinin ters işaretlisini sistemin aynı nolu düğümündeki yüklere ekle
3) Elemanları yüksüz varsay



Şekil 8.5 Eşdeğer yüklerin sistem düğümlerine aktarılması

Yüklü elemanın toplam potansiyeli ve denge koşulu:

Yüksüz elemanın toplam potansiyeli ve rijitlik matrisi 8.11 ve 8.12 den

$$\Pi^i = \frac{1}{2}\,(\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{s}}^i$$ Yüksüz *i.* elemanın toplam potansiyeli

$$\underline{\hat{k}}^i = \int_V (\underline{\hat{D}}^i)^T \underline{E}^i\, \underline{\hat{D}}^i\, dV$$ *i.* Elemanın rijitlik matrisi

idi. Eleman yüklerinin eşdeğerleri olan $\underline{\tilde{s}}^i$ nın ters işaretlisinin $\underline{\hat{u}}^i$ ile yaptığı dış işi de eklemek gerekir:

$$\Pi^i = \frac{1}{2}\,(\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T \underline{\hat{s}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T(-\underline{\tilde{s}}^i)$$ Yüklü *i.* elemanın toplam potansiyeli. q yükü $\hat{x}_2$ eksenine ters yönde alındığından $(-\underline{\tilde{s}}^i)$ nin işi eklendi.

Min Π^i yüklü elemanın denge koşulunu verir:

$$\frac{1}{2} 2\underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i - \underline{\hat{s}}^i + \underline{\tilde{s}}^i = 0$$

$$\underline{\hat{k}}^i\, \underline{\hat{u}}^i + \underline{\tilde{s}}^i = \underline{\hat{s}}^i \qquad (8.18)$$ Yüklü *i.* elemanın denge koşulu

olur. Kiriş eleman için:

$$\begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2} & -\frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2} \\ \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L} \\ -\frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} \\ \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{4EI_3}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}^i} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^i} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \tilde{s}_3 \\ \tilde{s}_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{s}}^i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^i}\begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} \qquad (8.19)$$

Yüklü *i.* elemanın denge koşulu

Eşdeğer kuvvetler. Yüksüz elemanda=$\underline{0}$ dır.

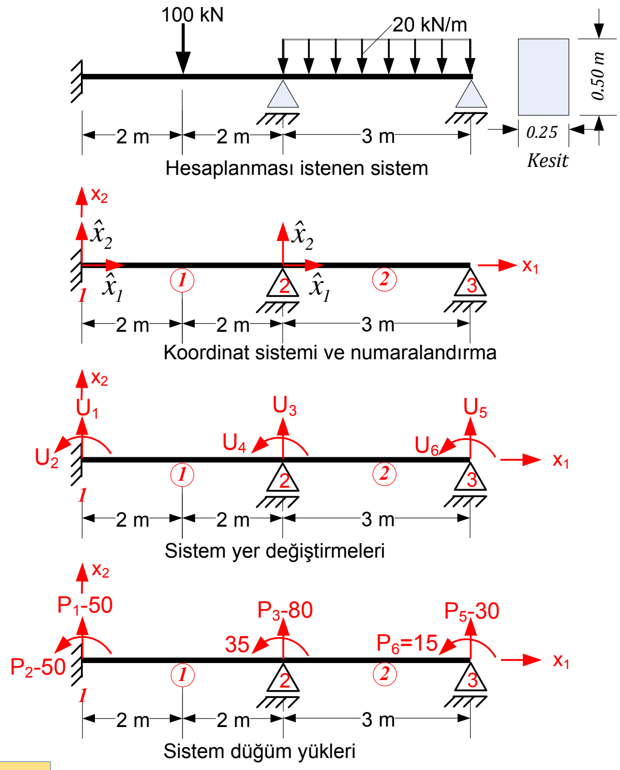
Rijitlik matrisi sadece malzemeye ve elemanın geometrisine bağlıdır, yükten bağımsızdır. Eleman yüklü de yüksüz de olsa rijitlik matrisi değişmez. 8.18 veya 8.19 hem yüklü hem de yüksüz eleman için geçerlidir, yüksüz elemanda $\underline{\tilde{s}}^i = \underline{0}$ dır.

Sayısal örnek 8.3:

Sağda görülen sürekli kiriş C25/30 betonu ile imal edilecektir. Kesme ve moment diyagramlarını çiziniz.

Sistem için seçilen koordinat sistemleri, numaralandırma, düğüm yer değiştirmelerinin ve yüklerin adları şekil 8.6 de verilmiştir. Sistem 2 elemanla modellenmiştir. Sistemin serbestlik derecesi 6 dır. Düğümlerde verilmiş dış yük yoktur. Tekil ve yayılı yük eşdeğerleri kullanılarak bu elemanlar üzerindeki (tekil ve düzgün yayılı) yükler sistem düğümlerine aktarılacaktır. Bu örnek ile SEMin bazı ince noktalarını öğreneceğiz.

Hesaplarda kN ve m birimlerini kullanalım.



Şekil 8.6. Sürekli kiriş problemi ve modellenmesi

Elemanların eşdeğer yükleri: Bak: Şekil 8.4a

1 nolu elemanda q=100 kN:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix}}_{\tilde{s}^1}=\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}50\\ 50\\ 50\\ -50\end{bmatrix}$$

Ters işaretlisi
Ters işaretlisi

2 nolu elemanda q=20 kN:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{s}_1\\ \tilde{s}_2\\ \tilde{s}_3\\ \tilde{s}_4\end{bmatrix}}_{\tilde{s}^2}=\begin{array}{c}2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}30\\ 15\\ 30\\ -15\end{bmatrix}$$

Ters işaretlisi
Ters işaretlisi

Sistem yük vektörü:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-50\\ -50\\ -50-30\\ 50-15\\ -30\\ 15\end{bmatrix}}_{P_{eşdeğer}}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}=\underbrace{\begin{bmatrix}-50\\ -50\\ -80\\ 35\\ -30\\ 15\end{bmatrix}}_{P_{eşdeğer}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\\ P_4\\ P_5\\ P_6\end{bmatrix}}_{P_0}=\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\\ 0\\ P_5\\ 0\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}-50\\ -50\\ -80\\ 35\\ -30\\ 15\end{bmatrix}}_{P_{eşdeğer}}=\begin{bmatrix}P_1-50\\ P_2-50\\ P_3-80\\ 35\\ P_5-30\\ 15\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}$$

Sistem düğüm yükleri.
P_1, P_2, P_3, P_5: Reaksiyonlar

Eleman ve sistem rijitlik matrisleri: Bak:8.14

Elastisite modülü: E=30000 N/mm² (TS 500-2000 den)=30·10⁶ kN/m²

Atalet momenti: $I_3=0.25\cdot 0.50^3/12=26\cdot 10^{-4}$ m⁴

$EI_3=30\cdot10^6\cdot 26\cdot 10^{-4}=78\cdot 10^3$ kN m²

Düğüm serbestlik derecesi 2, sistem serbestlik derecesi=2·3=6.

1.elemanda L=4 m, 2. elemanda L=3 m

$$\underline{\hat{k}}^1=\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ \end{array}\overset{\quad 1 \qquad\qquad\qquad 2}{\begin{bmatrix}14625 & 29250 & -14625 & 29250\\ 29250 & 78000 & -29250 & 39000\\ -14625 & -29250 & 14625 & -29250\\ 29250 & 39000 & -29250 & 78000\end{bmatrix}}$$

$$\underline{\hat{k}}^2=\begin{array}{c}2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}\overset{\quad 2 \qquad\qquad\qquad 3}{\begin{bmatrix}34667 & 52000 & -34667 & 52000\\ 52000 & 104000 & -52000 & 52000\\ -34667 & -52000 & 34667 & -52000\\ 52000 & 52000 & -52000 & 104000\end{bmatrix}}$$

Sistem rijitlik matrisi

$$\underbrace{\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}\overset{\quad 1 \qquad\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad 3}{\begin{bmatrix}14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0\\ 29250 & 78000 & -29250 & 39000 & 0 & 0\\ -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000\\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000\\ 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000\\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000\end{bmatrix}}}_{K_0}$$

Sistemin denge koşulu:

$$\underbrace{\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}\overset{\quad 1 \qquad\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad 3}{\begin{bmatrix}14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0\\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0\\ -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000\\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000\\ 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000\\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000\end{bmatrix}}}_{K_0}\underbrace{\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\\ U_6\end{bmatrix}}_{\underline{U}}=\underbrace{\begin{bmatrix}P_1-50\ kN\\ P_2-50\ kNm\\ P_3-80\ kN\\ 35\ kNm\\ P_5-30\ kN\\ 15\ kNm\end{bmatrix}}_{P_0}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ \end{array} \qquad (8.20)$$

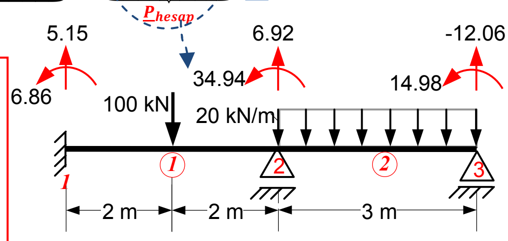
Sınır koşulları ve işlenmesi: 1·U₁=0, 1·U₂=0, 1·U₃=0, 1·U₅=0

$$\underbrace{\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}\overset{\ 1 \qquad\quad 2 \qquad\qquad 3}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 182000 & 0 & 52000\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 52000 & 0 & 104000\end{bmatrix}}}_{\underline{K}}\underbrace{\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\\ U_6\end{bmatrix}}_{\underline{U}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 35\\ 0\\ 15\end{bmatrix}}_{\underline{P}}\xrightarrow{\text{ÇÖZÜM}}\underline{U}=\begin{bmatrix}0\ m\\ 0\ rad\\ 0\ m\\ 176\cdot 10^{-6}\ rad\\ 0\ m\\ 56\cdot 10^{-6}\ rad\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ \end{array}$$

Sistem yer değiştirmeleri

Denge kontrolü ve reaksiyonlar:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{array}{cc|cc|cc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} \\ \hline 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ \hline -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000 \\ \hline 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{array}}_{\underline{K}_0}\underbrace{\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ rad \\ 0\ m \\ 176\cdot10^{-6}\ rad \\ 0\ m \\ 56\cdot10^{-6}\ rad \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5.15\ kN \\ 6.86\ kNm \\ 6.92\ kN \\ 34.94\ kNm \\ -12.06\ kN \\ 14.98\ kNm \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{hesap}}\begin{array}{l} 1 \\ \\ 2\ ? \\ \\ 3 \\ ? \end{array} \quad (8.21)$$



Verilmiş yükler ve hesaplanmış reaksiyonlar

YORUM:
Hesaplanan reaksiyonlar sağdaki şekilde gösterilmiştir. 2 ve 3 nolu mesnette verilmiş dış moment yoktu, sıfır olmalıydı. Düşey denge de sağlanmıyor: Toplam eleman yükü=100+20·3=160 kN iken toplam düşey reaksiyon=5.15+6.92-12.06≈0.0 kN oluyor, 160 kN olmalıydı. Demek ki elemanlar üzerinde verilmiş olan 160 kN toplam dış yük kaybolmuştur ve reaksiyonlar hatalıdır. Neden?

Bunun nedeni şudur: Eşdeğer yüklerin bazıları doğrudan hareketi önlenmiş mesnetlere gitmekte, sistemin şekil değiştirmesine bir katkıda bulunmamaktadır. Doğrudan mesnetlere giden kuvvetler olsa da olmasa da eleman iç kuvvetleri değişmez, sadece reaksiyonlar değişir.[1]

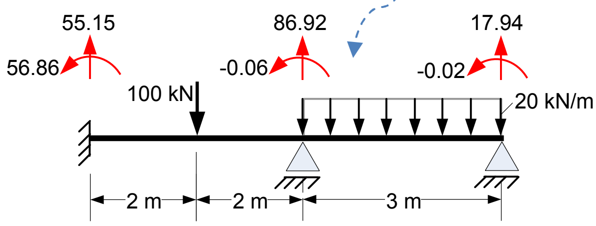
Bu hatayı nasıl giderebiliriz? Cevap: Düğümlere konan $\underline{P}_{eşdeğer}$ vektörü 8.21 nin sol tarafından çıkartılmalı, yani denge kontrolü ve reaksiyon hesabında $\underline{P}_{hesap}$ vektörü $\underline{K}_0\underline{U} - \underline{P}_{eşdeğer} = \underline{P}_{hesap}$ bağıntısından hesaplanmalıdır.

Örneğimizde:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\underbrace{\underbrace{\begin{array}{cc|cc|cc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} \\ \hline 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ \hline -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000 \\ \hline 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{array}}_{\underline{K}_0}\underbrace{\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ rad \\ 0\ m \\ 176\cdot10^{-6}\ rad \\ 0\ m \\ 56\cdot10^{-6}\ rad \end{bmatrix}}_{\underline{U}}}_{\text{Sistem yer değiştirmelerinden oluşan kuvvetler}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -50\ kN \\ -50\ kNm \\ -80\ kN \\ 35 \\ -30\ kN \\ 15 \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{eşdeğer}\ \text{Eşdeğer yükler}} = \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix} 55.15\ kN \\ 56.86\ kNm \\ 86.92\ kN \\ -0.06\ kNm \\ 17.94\ kN \\ -0.02\ kNm \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{hesap}\ \text{Reaksiyonlar ve düğüm yükleri}}\begin{array}{l} \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \\ \checkmark \\ \text{Reaksiyon} \\ \checkmark \end{array}$$

Hesaplanan reaksiyonlar Şekil 8.6 daki sisteme eklenerek sağda gösterilmiştir. Düşey dengeyi ve moment dengesini kontrol edelim:

55.15-100+86.92-20·3+17.94=0.01 kN≈0✓
56.86-100·2-0.06+86.92·4-20·3·5.5-0.02+17.94·7=0.04 kNm≈0✓



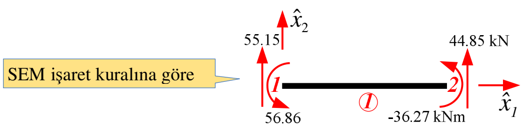
Şekil 8.7: Verilmiş yükler ve hesaplanmış reaksiyonlar

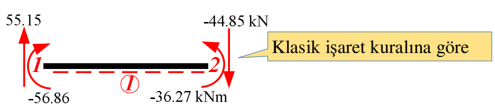
Eleman yer değiştirmeleri:

$$\underline{\hat{u}}^1 = \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 176\cdot10^{-6} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{u}}^2 = \begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 176\cdot10^{-6} \\ 0 \\ 56\cdot10^{-6} \end{bmatrix}$$

Eleman kuvvetleri: Bak: 8.19

$$\underline{\hat{s}}^1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 39000 \\ -14625 & -29250 & 14625 & -29250 \\ 29250 & 39000 & -29250 & 78000 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}^1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 176\cdot10^{-6} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ -50 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathring{s}}^1\ \text{Eleman eşdeğer yükü}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 55.15\ kN \\ 56.86\ kNm \\ 44.85\ kN \\ -36.27\ kNm \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^1}\begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}$$

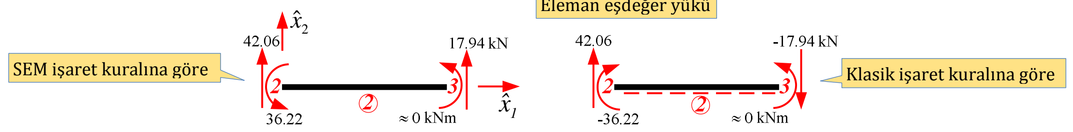




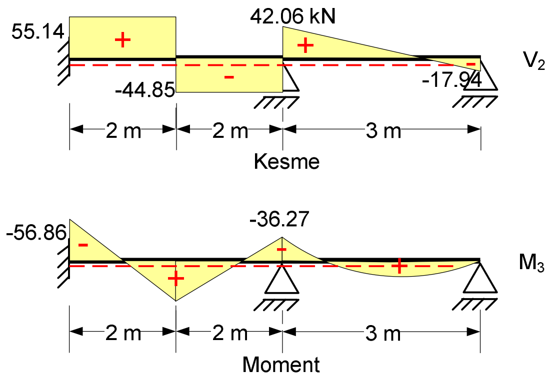
---
[1] Bir basit kirişin mesnetine düşey bir yük koyduğunuzu düşünün. Kiriş şekil değiştirmez ve bu kuvvetten ne moment ne de kesme oluşur.

$$\underline{\hat{s}}^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 34667 & 52000 & -34667 & 52000 \\ 52000 & 104000 & -52000 & 52000 \\ -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 176\cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 56\cdot 10^{-6} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{s}}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 42.06\ kN \\ 36.22\ kNm \\ 17.94\ kN \\ -0.024\ kNm \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^2} \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \end{matrix}$$

Eleman eşdeğer yükü



Diyagramlar(klasik işaret kuralına göre):



YORUM:

SEM sadece düğüm noktalarındaki iç kuvvetleri hesaplar. Soldaki grafiklerde görüldüğü gibi, eleman açıklıklarındaki kesme ve moment değerleri hesaplanmamıştır. Açıklığın herhangi bir noktasındaki ara değer nasıl hesaplanır sorusu gündeme gelmektedir.

Grafiği kullanarak, 1. açıklık momentini x=2 m de max M_3=-56.86+55.14·2=54.42 kNm olarak hesaplayabiliriz.

2.açıklıkta kesmenin sıfır olduğu nokta, orantı ile x=2.10 m bulunur. x=2.10 m de max M_3=-36.27+0.5·42.06·2.10=7.89 kNm olarak bulunabilir.

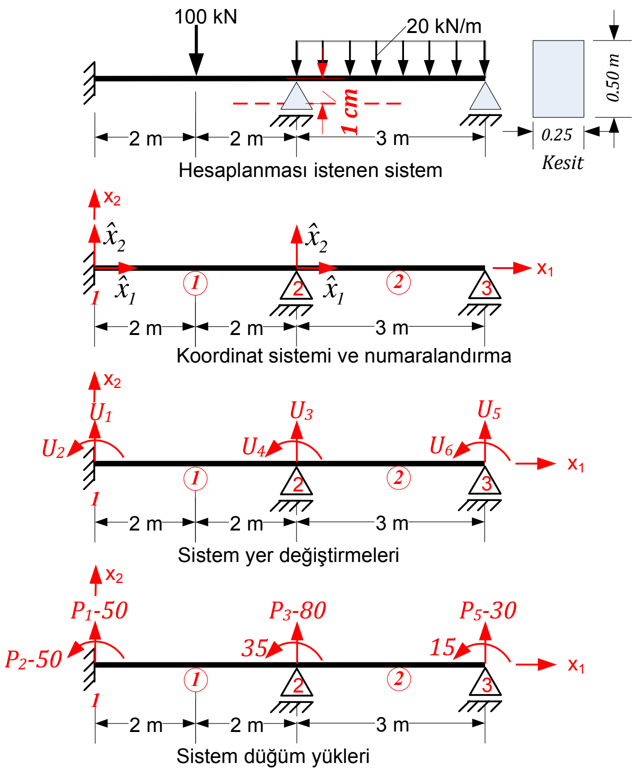
El hesaplarında kullanılabilecek bu klasik yol dışında, yazılımda kullanılabilecek daha genel bir yol var mı? Bak: paragraf 8.6.

Sayısal örnek 8.4:

Sağda görülen sürekli kiriş C25/30 betonu ile imal edilecektir. Orta mesnedin 1 cm çöktüğü varsayılmaktadır. Kesme ve moment diyagramlarını çiziniz.

Sistem için seçilen koordinat sistemleri, numaralandırma, düğüm yer değiştirmelerinin ve yüklerin adları şekil 8.8 de verilmiştir. Sistem 2 elemanla modellenmiştir. Sistemin serbestlik derecesi 6 dır. Düğümlerde verilmiş dış yük yoktur. Tekil ve yayılı yük eşdeğerleri kullanılarak elemanlar üzerindeki (tekil ve düzgün yayılı) yükler sistem düğümlerine aktarılacaktır. Geometri, eleman yükleri koordinat sistemi ve numaralandırma Örnek 8.3 deki ile aynıdır. Tek fark mesnet çökmesidir. Eleman eşdeğer yükleri ve rijitlik matrisleri örnek 8.3 deki gibidir.

Hesaplarda kN ve m birimlerini kullanalım.



Şekil 8.8. Sürekli kiriş problemi ve modellenmesi

Elemanların eşdeğer yükleri: Bak: Şekil 8.4a

1 nolu elemanda q=100 kN:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \\ \bar{s}_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{s}}^1} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ -50 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \end{matrix}$$

Ters işaretlisi

Ters işaretlisi

2 nolu elemanda q=20 kN:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \\ \bar{s}_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{s}}^2} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \\ 3 \\ \end{matrix}$$

Ters işaretlisi

Ters işaretlisi

Sistem yük vektörü:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -50 \\ -50 \\ -50-30 \\ 50-15 \\ -30 \\ 15 \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{eşdeğer}} \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -50 \\ -50 \\ -80 \\ 35 \\ -30 \\ 15 \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{eşdeğer}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}}_{\underline{P}_0} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 0 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -50 \\ -50 \\ -80 \\ 35 \\ -30 \\ 15 \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{eşdeğer}} = \begin{bmatrix} P_1-50 \\ P_2-50 \\ P_3-80 \\ 35 \\ P_5-30 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix}$$

Sistem düğüm yükleri.
P_1, P_2, P_3, P_5: Reaksiyonlar

Eleman ve sistem rijitlik matrisleri: Bak:8.14

Elastisite modülü: E=30000 N/mm^2 (TS 500-2000 den)=30$\cdot$10^6 kN/m^2
Atalet momenti: I_3=0.25$\cdot$0.50^3/12=26$\cdot$10^{-4} m^4
EI_3=30$\cdot$10$^6\cdot$ 26$\cdot$10^{-4}=78$\cdot$10^3 kN m^2
Düğüm serbestlik derecesi 2, sistem serbestlik derecesi=2$\cdot$3=6.
1.elemanda L=4 m, 2. elemanda L=3 m

$$\hat{\underline{k}}^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 \\ \hline -14625 & -29250 & 14625 & -29250 \\ 29250 & 39000 & -29250 & 78000 \end{array}\right]\end{array}$$

$$\hat{\underline{k}}^2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 34667 & 52000 & -34667 & 52000 \\ 52000 & 104000 & -52000 & 52000 \\ \hline -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{array}\right]\end{array}$$

Sistem rijitlik matrisi

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ \hline -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000 \\ \hline 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{array}\right]\end{array}}_{\underline{K}_0}$$

Mesnet çökmesinin dikkate alınması, sistemin denge koşulu:

$\underline{K}_0$ ın 3. kolonu ile -0.01 in çarpımı

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ \hline -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000 \\ \hline 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{array}\right]\end{array}}_{\underline{K}_0}\underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \begin{bmatrix} P_1-50 \\ P_2-50 \\ P_3-80 \\ 35 \\ P_5-30 \\ 15 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 146.25\ kN \\ 292.5\ kNm \\ -492.92\ kN \\ -227.50\ kNm \\ 346.67\ kN \\ -520\ kNm \end{bmatrix}}_{\text{Mesnet çökmesinden}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1-196.25\ kN \\ P_2-342.5\ kNm \\ P_3+412.92\ kN \\ 262.5\ kNm \\ P_5-376.67\ kN \\ 535\ kNm \end{bmatrix}}_{\underline{P}_0}$$

3. kolon -0.01 ile çarpıldı karşı tarafa atıldı. Bu kolondaki değerlere artık gerek yoktur. Bak: Bölüm 6.5

Sistem düğüm yükleri. P_1, P_2, P_3, P_5: Reaksiyonlar

Sınır koşulları ve işlenmesi: 1$\cdot$U$_1$=0, 1$\cdot$U$_2$=0, 1$\cdot$U$_3$=-0.01, 1$\cdot$U$_5$=0

Mesnet çökmesi

$$\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 182000 & 0 & 52000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 52000 & 0 & 104000 \end{array}\right]\end{array}}_{\underline{K}}\underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.01 \\ 262.5 \\ 0 \\ 535 \end{bmatrix}}_{\underline{P}}\begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \xrightarrow{\text{ÇÖZÜM}} \underline{U} = \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ rad \\ -0.01\ m \\ -32\cdot10^{-6}\ rad \\ 0\ m \\ 5160\cdot10^{-6}\ rad \end{bmatrix}$$

Sistem yer değiştirmeleri

Denge kontrolü ve reaksiyonlar:

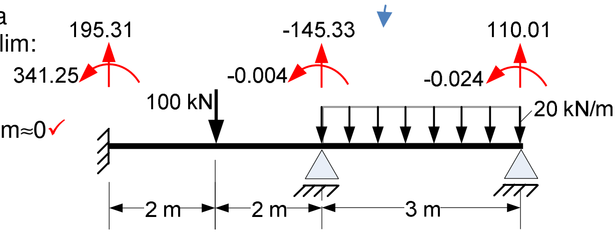
$$\underbrace{\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ \hline -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000 \\ \hline 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{array}\right]\end{array}}_{\underline{K}_0}\underbrace{\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ rad \\ -0.01\ m \\ -32\cdot10^{-6}\ rad \\ 0\ m \\ 5160\cdot10^{-6}\ rad \end{bmatrix}}_{\underline{U}}}_{\text{Sistem yer değiştirmelerinden oluşan kuvvetler}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -50\ kN \\ -50\ kNm \\ -80\ kN \\ 35 \\ -30\ kN \\ 15 \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{eşdeğer}} = \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix} 195.31\ kN \\ 341.25 kNm \\ -145.33\ kN \\ -0.004\ kNm\ ✓ \\ 110.01\ kN \\ -0.024\ kNm\ ✓ \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{hesap}}\begin{array}{l} \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \\ \text{Reaksiyon} \\ \\ \text{Reaksiyon} \\ \\ \end{array}$$

Eşdeğer yükler

Reaksiyonlar

Hesaplanan reaksiyonlar şekil 8.8 deki sisteme eklenerek sağda gösterilmiştir. Düşey dengeyi ve moment dengesini kontrol edelim:

195.31-100-145.33-20$\cdot$3+110.01=-0.01 kN≈0✓
341.25-100$\cdot$2-0.004-145.33$\cdot$4-20$\cdot$3$\cdot$5.5-0.024+110.01$\cdot$7=-0.03 kNm≈0✓



Şekil 8.9: Verilmiş yükler ve hesaplanmış reaksiyonlar

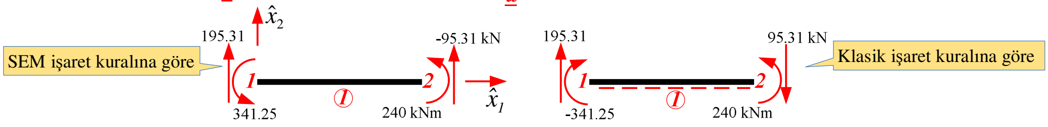
Eleman yer değiştirmeleri:

$$\underline{\hat{u}}^1=\begin{array}{c}\\1\\\\2\end{array}\begin{bmatrix}0\\0\\-0.01\\-32\cdot10^{-6}\end{bmatrix},\qquad \underline{\hat{u}}^2=\begin{array}{c}\\2\\\\3\end{array}\begin{bmatrix}-0.01\\-32\cdot10^{-6}\\0\\5160\cdot10^{-6}\end{bmatrix}$$

Eleman kuvvetleri:

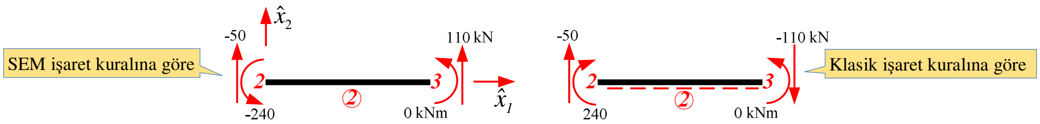
Eleman eşdeğer yükü

$$\underline{\hat{s}}^1=\underbrace{\begin{bmatrix}14625 & 29250 & -14625 & 29250\\29250 & 78000 & -29250 & 3900\\-14625 & -29250 & 14625 & -29250\\29250 & 39000 & -29250 & 78000\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}^1}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\-0.01\\-32\cdot10^{-6}\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^1}+\underbrace{\begin{bmatrix}50\\50\\50\\-50\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^1}=\begin{array}{c}1\\\\2\\\\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}195.31\ kN\\341.25\ kNm\\-95.31\ kN\\240\ kNm\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^1}$$

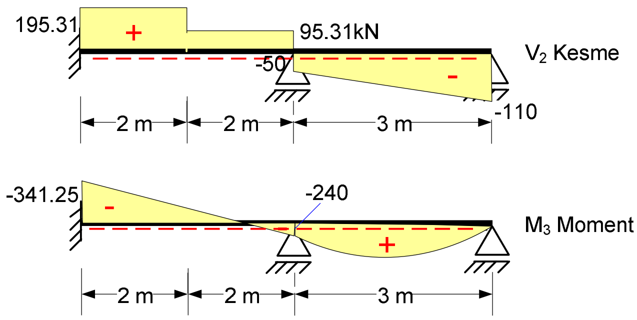


Eleman eşdeğer yükü

$$\underline{\hat{s}}^2=\underbrace{\begin{bmatrix}34667 & 52000 & -34667 & 52000\\52000 & 104000 & -52000 & 52000\\-34667 & -52000 & 34667 & -52000\\52000 & 52000 & -52000 & 104000\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{k}}^2}\underbrace{\begin{bmatrix}-0.01\\-32\cdot10^{-6}\\0\\5160\cdot10^{-6}\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^2}+\underbrace{\begin{bmatrix}30\\15\\30\\-15\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^2}=\begin{array}{c}2\\\\3\\\\\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}-50\ kN\\-240\ kNm\\110\ kN\\0\ kNm\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^2}$$

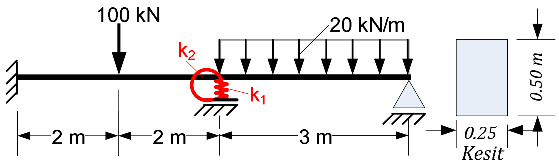


Diyagramlar(klasik işaret kuralına göre):



Sayısal örnek 8.5:

Sağda görülen sürekli kiriş C25/30 betonu ile imal edilecektir. Orta mesnette çökmeyi sınırlayan k_1 ve dönmeyi sınırlayan k_2 yayları vardır. Yay sabitleri k_1=50000 kN/m, k_2=500000 kNm/rad dır. Kesme ve moment diyagramlarını çiziniz.



Şekil 8.10: Hesaplanması istenen sistem

Sistem 8.6 ile aynıdır. Tek fark orta mesnette yayların bulunmasıdır. Koordinat sistemleri, numaralandırma, düğüm yer değiştirmeleri ve yüklerin adları şekil 8.6 da verilmiştir. Bu örnek ile elastik mesnetin(yaylı mesnet) nasıl modellendiğini öğreneceğiz.

Yay sabiti bir rijitliktir. Örneğimizdeki k_1=50000 kN/m k_1 yayını 1 m uzatmak veya kısaltmak için yaya uygulanması gereken kuvvettir. k_2=500000 kNm/radyan k_2 yayını 1 radyan döndürebilmek için yaya uygulanması gereken momenttir.

Mesnetlerdeki yaylar, yayların bulunduğu yönde, sistemin rijitliğini yay sabiti kadar artırırlar. Yayı modellemek için, yay sabiti sistem rijitlik matrisinin yayın etkin olduğu yönün diyagonal terimine eklenir. Yay yönünde yer değiştirme olacaktır. Bu nedenle yay yönünde sınır koşulu verilmez. Bunun dışında tüm işlemler aynıdır. Şekil 8.10 ile Şekil 8.6 karşılaştırılırsa, yayların U_3 ve U_4 yönünde etkin olduğu görülür. O halde, Şekil 8.6 nin 8.20 deki sistem rijitlik matrisinin 3. ve 4. diyagonal terimine k_1 ve k_2 yay sabitlerini eklemeliyiz:

Şekil 8.6 daki yaysız sistemin rijitlik matrisi

$$\underline{K}_0=\underbrace{\begin{bmatrix} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ -14625 & -29250 & 49292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000 & -52000 & 52000 \\ 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0}$$

Şekil 8.10 daki yaylı sistemin rijitlik matrisi

$$\underline{K}_0=\underbrace{\begin{bmatrix} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ -14625 & -29250 & 49292+k_1 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 182000+k_2 & -52000 & 52000 \\ 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ -14625 & -29250 & 99292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 682000 & -52000 & 52000 \\ 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0}$$

Sistemin denge koşulu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ -14625 & -29250 & 99292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 682000 & -52000 & 52000 \\ 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1-50\,kN \\ P_2-50\,kNm \\ -80\,kN \\ 35\,kNm \\ P_5-30\,kN \\ 15\,kNm \end{bmatrix}}_{\underline{P}_0}$$

Sınır koşulları ve işlenmesi: 1·U₁=0, 1·U₂=0, 1·U₅=0

Yayların yönünde sınır koşulu olmadığına dikkat ediniz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 99292 & 22750 & 0 & 52000 \\ 0 & 0 & 22750 & 682000 & 0 & 52000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & 0 & 104000 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -80\,kN \\ 35\,kNm \\ 0 \\ 15\,kNm \end{bmatrix}}_{\underline{P}_0} \xrightarrow{\text{ÇÖZÜM}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0\,m \\ 0\,rad \\ -1192\cdot 10^{-6}\,m \\ 36\cdot 10^{-6}\,rad \\ 0\,m \\ 722\cdot 10^{-6}\,rad \end{bmatrix}}_{\underline{U}}$$

Denge kontrolü ve reaksiyonlar:

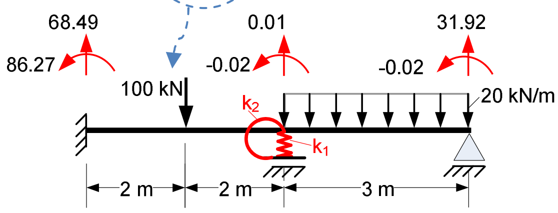
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 & 0 & 0 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 & 0 & 0 \\ -14625 & -29250 & 99292 & 22750 & -34667 & 52000 \\ 29250 & 39000 & 22750 & 682000 & -52000 & 52000 \\ 0 & 0 & -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 0 & 0 & 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 0\,m \\ 0\,rad \\ -1192\cdot 10^{-6}\,m \\ 36\cdot 10^{-6}\,rad \\ 0\,m \\ 722\cdot 10^{-6}\,rad \end{bmatrix}}_{\underline{U}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -50\,kN \\ -50\,kNm \\ -80\,kN \\ 35\,kNm \\ -30\,kN \\ 15\,kNm \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{eşdeğer}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 68.49\,kN \\ 86.27\,kNm \\ 0.01\,kN \\ -0.02\,kNm \\ 31.91\,kN \\ -0.02\,kNm \end{bmatrix}}_{\underline{P}_{hesap}}$$

Reaksiyon
Reaksiyon
?
?
Reaksiyon
✓

Hesaplanan reaksiyonlar şekil 8.8 deki sisteme eklenerek sağda gösterilmiştir. Düşey dengeyi ve moment dengesini kontrol edelim:

68.49-100+0.01-20·3+31.92=-59.49 kN ≠ 0 **?**

86.27-100·2-0.02+0.01·4-20·3·5.5-0.02+31.92·7=-220.29 kNm ≠ 0 **?**

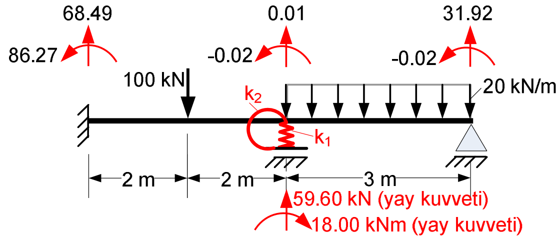


Şekil 8.11: Verilmiş yükler ve hesaplanmış reaksiyonlar

YORUM:

Denge sağlanmıyor. Neden? Bunun nedeni şudur:

Yaylar birer eleman gibi davranmaktadır. Fakat eleman olarak modellemedik, sadece yay rijitliklerini sistem rijitliğine ekledik. k_1 yayı $U_3=-1192\cdot 10^{-6}\,m$ yer değiştirmiştir(yay kısalmıştır). Yayda oluşan kuvvet $50000\cdot(-1192\cdot 10^{-6})=-59.60\,kN$ dür. Bu kuvvetin ters işaretlisi reaksiyon(yukarı doğru) olarak sisteme eklenmelidir. k_2 yayı $U_4=36\cdot 10^{-6}\,rad$ dönmüştür(saatin ters yönünde). Bu yayda oluşan kuvvet $500000\cdot 36\cdot 10^{-6}=18\,kNm$ sisteme reaksiyon olarak (saat yönünde) eklenmelidir, Şekil 8.12.



Şekil 8.12: Verilmiş yükler+reaksiyonlar+yay kuvvetleri

Denge kontrolü:

68.49-100+0.01+59.60-20·3+31.92=0.02 kN ≈ 0 ✓

86.27-100·2-0.02+0.01·4-18+59.60·4-20·3·5.5-0.02+31.92·7=0.11 kNm ≈ 0 ✓

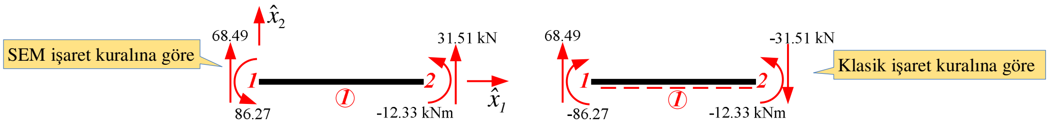
Eleman yer değiştirmeleri:

$$\underline{\hat{u}}^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1192\cdot 10^{-6} \\ 36\cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\hat{u}}^2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 3 \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1192\cdot 10^{-6} \\ 36\cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 722\cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Eleman kuvvetleri: Bak: 8.19

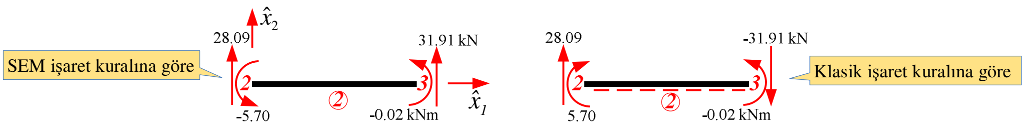
Eleman eşdeğer yükü

$$\underline{\hat{s}}^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \end{array}\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 14625 & 29250 & -14625 & 29250 \\ 29250 & 78000 & -29250 & 3900 \\ -14625 & -29250 & 14625 & -29250 \\ 29250 & 39000 & -29250 & 78000 \end{bmatrix} \end{array}}_{\underline{\hat{k}}^1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1192\cdot 10^{-6} \\ 36\cdot 10^{-6} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ -50 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 68.49\ kN \\ 86.27\ kNm \\ 31.51\ kN \\ -12.33\ kNm \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^1}\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \end{array}$$

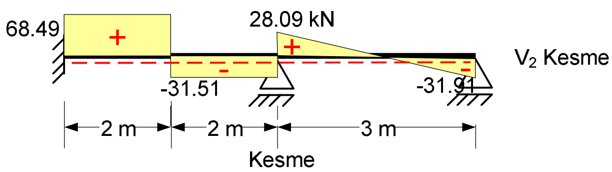


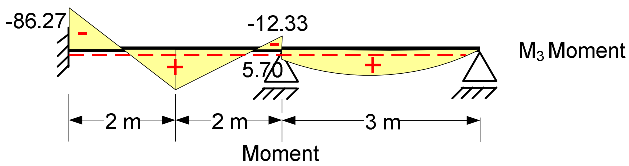
Eleman eşdeğer yükü

$$\underline{\hat{s}}^2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 3 \\ \end{array}\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 2 & & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 34667 & 52000 & -34667 & 52000 \\ 52000 & 104000 & -52000 & 52000 \\ -34667 & -52000 & 34667 & -52000 \\ 52000 & 52000 & -52000 & 104000 \end{bmatrix} \end{array}}_{\underline{\hat{k}}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1192\cdot 10^{-6} \\ 36\cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 722\cdot 10^{-6} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 28.09\ kN \\ -5.70\ kNm \\ 31.91 kN \\ -0.02 kNm \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^2}\begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 3 \\ \end{array}$$



Diyagramlar(klasik işaret kuralına göre):





8.6 Ara noktalarda iç kuvvet hesabı, grafik çizimi:

HAZIRLANACAK !