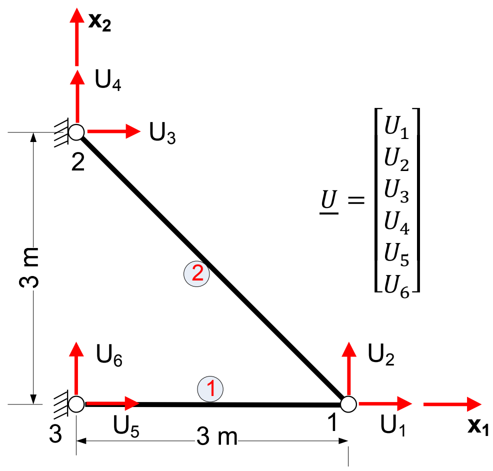
6. Sistemin toplam potansiyeli, rijitlik matrisi ve kurulması

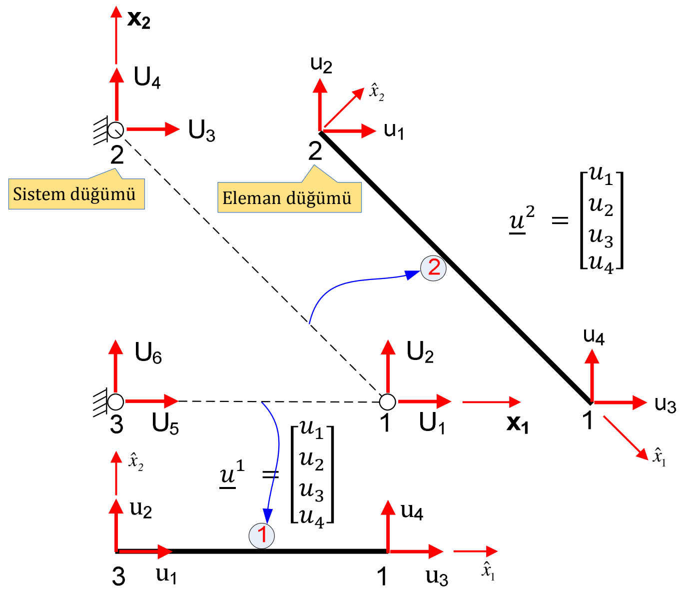
Taslak

6.1 Sistemin noktalarında süreklilik koşulu[1]:

Her elemanın düğüm noktası aynı zamanda sistemin de düğüm noktası olduğundan, sistemin noktaları dış yükler altında yer değiştirince, aynı noktaya bağlı eleman noktası da aynı yer değiştirmeyi yapmak zorundadır. Bu eşitliğin matematik ifadesini aşağıdaki örnek ile kurmaya çalışalım. Şekil 6.1 de düzlem kafes sistemin genel yer değiştirmeleri, şekil 6.1a da ise aynı sistemin elemanlarının genel yer değiştirmeleri görülmektedir. Bunlar arasında



Şekil 6.1: Sistem yer değiştirmeleri



Şekil 6.1a: Eleman genel yer değiştirmeleri

1 nolu elemanda:

$u_1 = U_5$
$u_2 = U_6$
$u_3 = U_1$
$u_4 = U_2$

2 nolu elemanda:

$u_1 = U_3$
$u_2 = U_4$
$u_3 = U_1$
$u_4 = U_2$

eşitlikleri olmak zorundadır. Matris notasyonunda aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz:

Eleman düğüm no — Sistem düğüm no

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \begin{array}{c|cccccc} & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{3} & \\ \hline \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}}$$

1.elemanın genel yer değiştirmeleri (u_1–u_4, ilk dört satır); 2.elemanın genel yer değiştirmeleri (u_1–u_4, son dört satır)

$\underline{u}$: Tüm elemanların genel yer değiştirmelerinin vektörü

$\underline{a}$: Bağlantı matrisi

$\underline{U}$: Sistemin yer değiştirme vektörü

Görüldüğü gibi $\underline{a}$ matrisi 0 ve 1 sayıları içerir. Düğümlerde elemanların genel yer değiştirmelerini sistem yer değiştirmelerine eşit olmaya zorlamaktadır. Bunun anlamı, elemanları sistem düğümlerine bağladığı, elemanları birleştirerek tekrar sistemi oluşturduğudur. Bu nedenle bağlantı matrisi de denir. Bağlantı matrisi sistemin düğüm serbestlik derecesi boyutlu kare alt matrislere bölünebilir. Alt matrisler sıfır veya birim matristir.

$$\underline{u} = \underline{a}\,\underline{U} \qquad (6.1)$$

$\underline{a}$ bağlantı matrisi tüm elemanların genel yer değiştirmelerini sistemin yer değiştirmelerine eşitler

Genel olarak $\underline{a}$ çok büyük bir matristir. Teorik açıdan, sistemin toplam potansiyelinin hesabında, önemli olmakla birlikte ne el hesaplarında ne de yazılımlarda oluşturulur. Sadece sıfır ve birim alt matrislerden oluştuğu için hesapları, $\underline{a}$ yı kullanmadan, aynı anlama gelen, basit bir yolla yürütmek mümkündür. Bu durum ilerleyen konularda açıklık kazanacaktır.

[1] Compatibility condition at system nodes

Sistem yükleri ile eleman genel kuvvetleri arasındaki bağıntı:

Şekil 4.5 de görülen sistem kuvvetleri 4.6 da görülen sistem yer değiştirmeleri ile iş yaparlar: $\underline{U}^T\underline{P}_0$.
Şekil 4.7 de görülen eleman genel yer değiştirmeleri 4.8 de görülen eleman genel kuvvetleri ile iş yaparlar: $(\underline{u}^1)^T\underline{s}^1 + (\underline{u}^2)^T\underline{s}^2$. Bu bağıntıyı şöyle yazabiliriz:

$$\underbrace{[(\underline{u}^1)^T \quad (\underline{u}^2)^T]}_{\underline{u}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{s}^1 \\ \underline{s}^2 \end{bmatrix}}_{\underline{s}} = \underline{u}^T\underline{s}$$

Tüm elemanların genel yer değiştirmeleri vektörünün transpozu

Tüm elemanların genel kuvvetleri vektörü

Bu iki iş birbirine eşittir: $\underline{U}^T\,\underline{P}_0 = \underline{u}^T\underline{s}$. 6.1 bağıntısından $\underline{u} = \underline{a}\,\underline{U} \rightarrow \underline{u}^T = \underline{U}^T\underline{a}^T$ yerine yazılarak bulunan $\underline{U}^T\,\underline{P}_0 = \underline{u}^T\underline{s} = \underline{U}^T\underline{a}^T\underline{s}$ bağıntısında her iki tarafın aynı sayı(=iş) olduğu düşünülürse

$$\underline{P}_0 = \underline{a}^T\underline{s} \qquad (6.2)$$

$\underline{a}$ bağlantı matrisinin transpozu tüm elemanların genel uç kuvvetlerini sistemin düğüm kuvvetlerine bağlar. Sistem düğümlerinde kuvvet dengesi olmalı anlamındadır.

olması gerektiği anlaşılır. Bu bağıntı sistemin toplam potansiyelinin hesabında gerekli olacaktır.

6.2 Sistemin toplam potansiyeli ve rijitlik matrisi

Sistemin toplam potansiyeli elemanların toplam potansiyellerinin toplamıdır. Sistemin s eleman ile modellendiğini varsayalım. 5.15 den

$$\Pi = \sum_{i=1}^{s}\Pi^i = \sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{1}{2}(\,\underline{u}^i\,)^T\,\underline{k}^i\,\underline{u}^i - (\underline{u}^i)^T\underline{s}^i\right\}$$

$$\begin{aligned}
\Pi = &\frac{1}{2}(\,\underline{u}^1\,)^T\,\underline{k}^1\,\underline{u}^1 - (\underline{u}^1)^T\underline{s}^1 \\
&+\frac{1}{2}(\,\underline{u}^2\,)^T\,\underline{k}^2\,\underline{u}^2 - (\underline{u}^2)^T\underline{s}^2 \\
&+\frac{1}{2}(\,\underline{u}^3\,)^T\,\underline{k}^3\,\underline{u}^3 - (\underline{u}^3)^T\underline{s}^3 \\
&\;\;.... \\
&+\frac{1}{2}(\,\underline{u}^s\,)^T\,\underline{k}^s\,\underline{u}^s - (\underline{u}^s)^T\underline{s}^s
\end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\underbrace{[(\,\underline{u}^1\,)^T \quad (\,\underline{u}^2\,)^T \quad (\,\underline{u}^3\,)^T \quad \cdots \quad (\,\underline{u}^s\,)^T]}_{\underline{u}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{k}^1 & & & & \\ & \underline{k}^2 & & & \\ & & \underline{k}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \underline{k}^s \end{bmatrix}}_{\underline{k}}\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}^1 \\ \underline{u}^2 \\ \underline{u}^3 \\ \vdots \\ \underline{u}^s \end{bmatrix}}_{\underline{u}} - \underbrace{[(\underline{u}^1\,)^T \quad (\,\underline{u}^2\,)^T \quad (\,\underline{u}^3\,)^T \quad \cdots \quad (\,\underline{u}^s\,)^T]}_{\underline{u}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{s}^1 \\ \underline{s}^2 \\ \underline{s}^3 \\ \vdots \\ \underline{s}^s \end{bmatrix}}_{\underline{s}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\underline{u}^T\,\underline{k}\,\underline{u} - \underline{u}^T\underline{s}$$

Tüm elemanların genel rijitlik matrislerini içeren köşegen matris

Tüm elemanların genel yer değiştirmelerini içeren vektör

Tüm elemanların genel uç kuvvetlerini içeren vektör

olduğu yukarıdaki bağıntıların incelenmesinden anlaşılır. 6.1 ve 6.2 yerine yazılarak

$$\Pi = \frac{1}{2}\underline{U}^T\;\underbrace{\underline{a}^T\underline{k}\,\underline{a}}_{\underline{K}_0}\;\underline{U} - \underline{U}^T\;\underbrace{\underline{a}^T\underline{s}}_{\underline{P}_0}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\underline{U}^T\underline{K}_0\,\underline{U} - \underline{U}^T\underline{P}_0 \qquad (6.3)$$

Sistemin toplam potansiyeli

sistemin toplam potansiyeli bulunur.

$$\underline{K}_0 = \underline{a}^T\underline{k}\,\underline{a} \qquad (6.4)$$

matrisine sistemin rijitlik matrisi[1] denir. Boyutu sistemin serbestlik derecesi kadar ve simetriktir. Terimleri sabit sayılardan oluşur.

[1] System stiffness matrix

6.3 Sistemin denge koşulu[1]

6.3 toplam potansiyelinde $\underline{U}$ düğüm yer değiştirme vektörü parametredir(terimlerinin sayısal değerleri henüz bilinmeyen vektör). Sistemin denge konumunda 6.3 toplam potansiyeli minimum olur:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{U}} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial \underline{U}}\left(\frac{1}{2}\underline{U}^T \underline{K}_0\, \underline{U} - \underline{U}^T \underline{P}_0\right) = \frac{1}{2} 2\underline{K}_0\, \underline{U} - \underline{P}_0 = 0$$

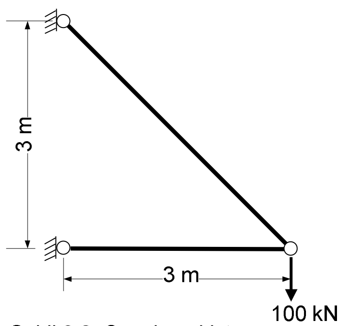
$$\underline{K}_0\, \underline{U} = \underline{P}_0 \quad (6.5)$$

Sistemin denge koşulu

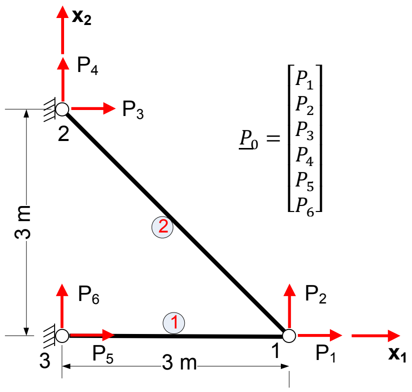
sistemin denge koşulu olarak bulunur. $\underline{K}_0$, 6.4 den görüldüğü gibi, elemanların rijitlik matrislerinden ve 6.1 de tanımlanan $\underline{a}$ bağlantı matrisinden hesaplanan sabit terimlidir. $\underline{P}_0$ sistem düğüm yüklerinin vektörüdür, bilinmektedir. 6.5 denklem sisteminde sadece sistem düğümlerinin yer değiştirme vektörü $\underline{U}$ bilinmemektedir. Ancak, bu denklem sisteminden $\underline{U}$ hesaplanamaz, çünkü $\underline{K}_0$ tekildir(det $\underline{K}_0 = 0$ ve $\underline{K}_0^{-1}$ tanımsız). Bunun nedeni sistemin sınır(mesnet) koşullarının henüz dikkate alınmamış olmasıdır. Mesnetsiz sistem şekil değiştirmez fakat yer değiştirir(rijit yer değiştirme). Sistemin mesnet koşullarından ne anlıyoruz: mesnetlerde bazı yer değiştirmelerin sınırlandırılması, yani sistemin uzayda bir yere sabitlenmesi gereğini anlıyoruz[2]. Bu da $\underline{U}$ vektörünün bazı terimlerinin verilmiş olması gerektiği anlamındadır. Mesnet koşulu sayısı, sistem rijit yer değiştirmeyecek kadar olmalıdır[3].

6.4 Sistemin sınır(mesnet) koşullarının[4] işlenmesi:

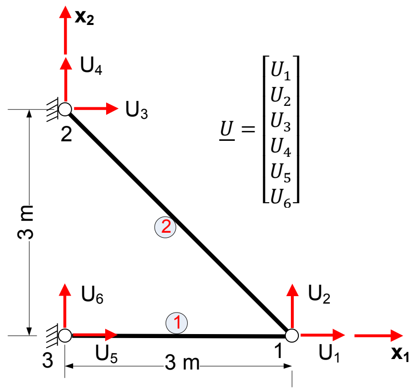
Sistemin sınır koşullarının 6.5 denklem sistemine nasıl işleneceğini şekil 6.2 deki basit sistem ile açıklamaya çalışalım. Sistemin koordinat sistemi, numaralanması, yük ve yer değiştirme modeli 6.2a ve 6.2b deki gibi olsun.



Şekil 6.2: Çözülmesi istenen düzlem kafes sistem



Şekil 6.2a: Sistem düğüm yükleri



Şekil 6.2b: Sistem düğüm yer değiştirmeleri

Şekil 6.2a ya göre

$$\underline{P}_0^T = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6]$$

ve Şekil 62.b ye göre yer değiştirme vektörü

$$\underline{U}_0^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6]$$

ve sistemin serbestlik derecesi 6 dır. 6.5 denklem sistemindeki $\underline{K}_0$ rijitlik matrisi 6x6 boyutlu ve sabit sayılardan oluşan bir matris olacaktır. $\underline{K}_0$ ın sabit sayılarını k_{ij} ile gösterelim:

[1] Equilibrium condition of the system
[2] Örnek: düzlem bir çerçevenin bir ankastre mesnetinde yatay, düşey hareket ve dönme sıfır olmalıdır, yani mesnetteki yer değiştirmelerin değeri bilinmektedir.
[3] Örnek: Basit kirişte en az bir sabit ve bir hareketli mesnet olmalı. Konsol kirişte bir uç ankastre olmalı. Aksi halde kiriş veya konsol rijit yer değiştirir. Rijit yer değiştiren sistemlere "**Labil**" (Labile= kararsız, stabil olmayan) sistem denir, çözümü yoktur.
[4] System boundry conditions, restrains

Sistemin düğüm numaraları

$$\underline{K_0}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} & 1 & & 2 & & 3\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26}\\ \hline k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46}\\ \hline k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56}\\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \end{array}$$

Sistemin düğüm numaraları

Sistem rijitlik matrisi $\underline{K_0}$ ın özellikleri:

- Boyutu sistemin serbestlik derecesi kadardır(örneğimizdeki düzlem kafes sistemde serbestlik derecesi=6, dolayısıyla $\underline{K_0}$ 6x6 boyutundadır).
- Simetriktir(örneğin $k_{21} = k_{12}$, dir)
- k_{ij} terimleri sabit sayılardır.
- Tekildir($det\ \underline{K_0} = 0$, $\underline{K_0}^{-1}$ tanımsız).
- Alt matrislerden oluşur. Her alt matrisin boyutu sistem düğüm serbestlik derecesi kadardır(örneğimizde: 2x2).
- Band matristir.

6.5 denklem sisteminin açık yazılmış şekli:

Sistemin düğüm numaraları

$$\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} & 1 & & 2 & & 3\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26}\\ \hline k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46}\\ \hline k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56}\\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}\end{array}\right]\end{array}}_{\underline{K_0}}\underbrace{\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\end{bmatrix}}_{\underline{U}}=\underbrace{\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\\P_5\\P_6\end{bmatrix}}_{\underline{P_0}}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \end{array} \tag{6.6}$$

1.düğümde x_1 ve x_2 yönü denge denklemleri

2.düğümde x_1 ve x_2 yönü denge denklemleri

3.düğümde x_1 ve x_2 yönü denge denklemleri

Bu bağıntıda $\underline{K_0}$ ın tüm terimleri 6.4 ten bilinmektedir. Ayrıca $\underline{P_0}$ ve $\underline{U}$ vektörlerinin de bazı terimleri bilinmektedir. Hesaplarda kuvvet birimi olarak kN kullanıldığını varsayalım. 6.2 ye göre 1 noktasında $P_1 = 0, P_2 = -100$ dür, 2 ve 3 noktasındaki P_3, P_4, P_5, P_6 bilinmemektedir(reaksiyonlar). Yük vektörü

$$\underline{P_0^T} = [0 \quad -2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6]$$

olur. 6.6 denklem sisteminde yerine yazarsak:

Sistemin düğüm numaraları

$$\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} & 1 & & 2 & & 3\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26}\\ \hline k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46}\\ \hline k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56}\\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}\end{array}\right]\end{array}}_{\underline{K_0}}\underbrace{\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\end{bmatrix}}_{\underline{U}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\-100\\P_3\\P_4\\P_5\\P_6\end{bmatrix}}_{\underline{P_0}}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \end{array} \tag{6.7}$$

1.düğümde x_1 ve x_2 yönü denge denklemleri

2.düğümde x_1 ve x_2 yönü denge denklemleri

3.düğümde x_1 ve x_2 yönü denge denklemleri

Reaksiyonlar

Sistemin sınır şartlarına gelince: 2 ve 3 noktaları mesnettir, buradaki yer değiştirmelerin değerleri sıfır olarak bilinmektedir, şekil 6.2b den

$$1 \cdot U_3 = 0, \quad 1 \cdot U_4 = 0, \quad 1 \cdot U_5 = 0, \quad 1 \cdot U_6 = 0 \tag{6.8}$$

Buradaki 1 sayıları, 6.9 un köşegeninde görülen 1 sayılarının nereden geldiğini açıklamak için yazılmıştır.

olması gerektiği anlaşılır. $\underline{K_0}$ ın 3., 4., 5, ve 6. kolonları sıfır ile çarpılınca $\underline{K_0}$ ın bu kolonlarındaki sayılar sıfır olur. Simetriden dolayı aynı nolu satırların da sıfır olması gerekir. Sıfırlanan satırlara 6.8 denklemlerini yazarız. Buna göre sınır koşullarını 6.7 ye aşağıdaki gibi işleyelim:

Sistemin düğüm numaraları

$$\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} & 1 & & 2 & & 3\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array}}_{\underline{K}}\underbrace{\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\end{bmatrix}}_{\underline{U}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{\underline{P}}\begin{array}{c}1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \end{array} \tag{6.9}$$

GENEL: $1 \cdot U_i = 0$ koşulunu işlemek için: *i.* satır ve (simetri nedeniyle) *i.* kolondaki sayılar sıfırlanır. *i.* satır-kolona 1, karşı tarafa 0 yazılır. Böylece $1 \cdot U_i = 0$ denklemi denklem sistemine eklenmiş olur.

$$\underline{K}\ \underline{U} = \underline{P} \tag{6.10}$$

6.9 denklemleri 6.8 mesnet koşullarını aynen içermektedir. $\underline{K}$ matrisi artık tekil değildir, çünkü sistem 2 ve 3 noktalarında tutuludur, uzayda gezemez, yani rijit yer değiştiremez. $det\ \underline{K} \neq 0$, $\underline{K}^{-1}$ tanımlıdır. Denklem sistemi çözülerek $\underline{U}$ yer değiştirme vektörü bulunur. Çözüm sonucunda $U_3 = 0, U_4 = 0, U_5 = 0, U_6 = 0$ olarak bulunacaktır, bu da 6.8 koşullarının aynısıdır. Aslında çözüm ile sadece, çözüm öncesi değerleri bilinmeyen, U_1, U_2 yer değiştirmeleri belirlenmektedir. Diğerlerinin değerleri zaten bilinmektedir.

Bu küçük örnekte 6 denklemin 4 ü mesnet koşuludur. Büyük sistemlerde durum bunun tam tersidir: Denklem sayısı çok, mesnet koşulu sayısı azdır. Örneğin 100 düğümlü bir kafes sistemin bir sabit bir de basit kayıcı mesneti olsun. Her düğümde 2 serbestlik derecesi olduğundan sistemin serbestlik derecesi 100x2=200, yani 200 denklemli bir sistem olacaktır. Sınır koşulu sayısı ise sadece 3 tür.

6.9 denklem sistemi genel olarak çok büyüktür, çok küçük sistemler dışında elle çözümü mümkün değildir. GAUSS indirgeme metodu veya CHOLESKY metodu kullanılabilir. $\underline{K}$ matrisi simetrik olduğu için yazılımlarda genellikle CHOLESKY[1] tercih edilir.

6.5 Reaksiyonların[2] hesabı

Şekil 6.2a nın 2 ve 3 noktalarındaki P_3, P_4, P_5, P_6 düğüm kuvvetleri mesnet reaksiyonlarıdır. Sınır koşulları işlenmeden önceki 6.7 denklem sisteminin son 4 denklemi bu noktalardaki denge denklemleridir. Sınır koşulları işlenince bu denklemler, 6.9 da görüldüğü gibi, kaybolmaktadır. Reaksiyonların hesaplanabilmesi için, sınır koşulları işlenmeden önce, bu denklemlerin kopyalanarak saklanması(bir kâğıda yazılması, hard diske depolanması) gerekir:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \;\;\mathbf{1} & & \;\;\mathbf{2} & & \;\;\mathbf{3} & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc:cc} k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \hdashline k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \end{array}\right] \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} P_3 \\ P_4 \\ \hdashline P_5 \\ P_6 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \\ \mathbf{3} \end{array} \tag{6.11}$$

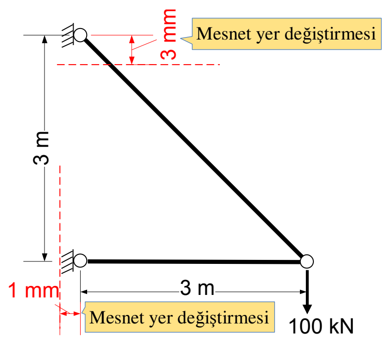
Mesnet noktalarında denge denklemleri

6.9 ün çözümünden bulunan $\underline{U}$ vektörü 6.11 de yerine yazılır, P_3, P_4, P_5, P_6 reaksiyon kuvvetleri bulunur.

Sınır koşulunun mesnet çökmesi içermesi durumu: Mesnet çökmesi problemi yapı statiği derslerinden bilinir. Örneğin, bir sürekli kirişin bir mesnedinin δ kadar çökmesi durumunda iç kuvvetleri hesaplayınız diye sorulur. Aslında mesnedin çökmemesi, yer değiştirmemesi gerekir. Ama, öngörülemeyen bir nedenle, çökerse sistemde büyük iç kuvvetler oluşur. "Çökme" kelimesi SEMde çok daha genel yorumlanmalıdır. Bir mesnetin herhangi bir serbestlik yönünde bir nedenle yer değiştirmesi olarak anlaşılmalıdır, yani sadece düşey yer değiştirme değildir.

Mesnet çökmesi olan bir sistemde ilgili yer değiştirme sıfır değil çökme kadardır, çökme doğrultusundaki yer değiştirmenin değeri biliniyor anlamındadır. Bu değer ile sistem rijitlik matrisinin ilgili kolonu çarpılarak denklem sisteminin karşı tarafına atılır. Diğer tüm işlemler yukarıda açıklandığı gibidir.

Bir örnekle açıklayalım: Şekil 6.3 deki sistemin mesnetleri verilen yük altında şekildeki kadar yer değiştirirse sınır koşulları ne olur?



Şekil 6.3: Çözülmesi istenen düzlem kafes sistem

Sistemin numaralandırılması ve koordinat eksenleri 6.2a ve 6.2b deki gibi olduğu, hesaplarda kN ve mm birimlerinin kullanıldığı varsayımıyla sınır koşulları

$$1 \cdot U_3 = 0,\;\; 1 \cdot U_4 = -3,\;\; 1 \cdot U_5 = -1,\;\; 1 \cdot U_6 = 0 \tag{6.12}$$

olacaktır. Sınır koşulları işlenmiş denklem sistemi

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \\ \mathbf{2} \\ \\ \mathbf{3} \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{3} & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc:cc} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}}_{\underline{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ -100 \\ \hdashline 0 \\ -3 \\ \hdashline -1 \\ 0 \end{array}\right]}_{\underline{P}} - \underbrace{\left[\begin{array}{cc} k_{14} & k_{15} \\ k_{24} & k_{25} \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{\substack{\textit{Mesnet çökmesinden} \\ \textit{oluşan düğüm kuvvetleri}}} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

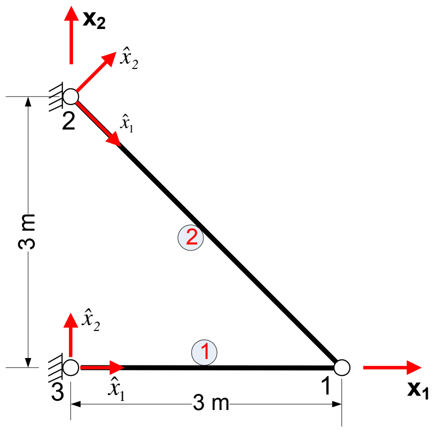
olacaktır. Dikkat edilirse, sıfırdan farklı olan U_4=*-3* ve U_5=*-1* mesnet çökmeleri rijitlik matrisinin 4. ve 5. kolonları ile çarpılarak denklem sisteminin karşı tarafına atıldıktan ***sonra*** 6.12 sınır koşulları işlenmiştir. 6.13 denklem sisteminden $\underline{U}$ hesaplandığında 6.12 koşulları sağlanır. $\underline{U}$ vektörü 6.11 de yerine yazılarak mesnet reaksiyonları bulunur.

[1] Denklem sistemi çözüm yöntemleri için bak: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu/index_dosyalar/BDNADersNotlari.htm bölüm 3,4,5,6 ve 7.

[2] Reactions, support forces, boundry forces

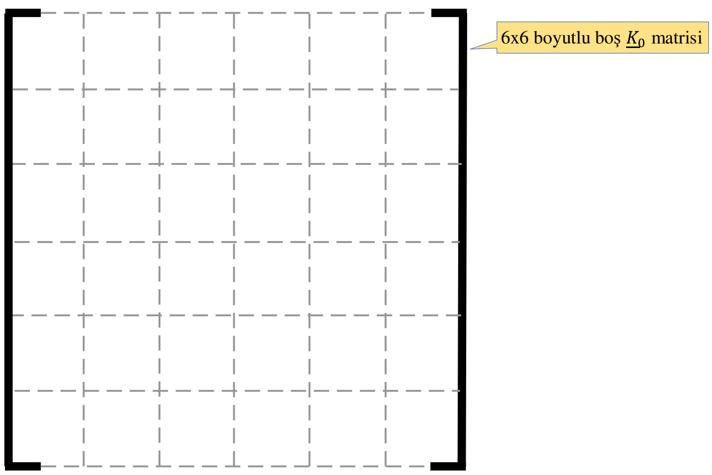
6.6 Sistem rijitlik matrisinin direkt kurulması

6.4 bağıntısına göre sistem rijitlik matrisi $\underline{K}_0 = \underline{a}^T \underline{k}\, \underline{a}$ dır. Ancak hem $\underline{a}$ hem de $\underline{k}$ çok büyük olduğundan bu çarpım hem el hesaplarında hem de programlarda yapılmaz. $\underline{a}$ ve $\underline{k}$ matrisleri, boyutu düğüm serbestlik derecesi olan alt matrislerden oluşur. 6.1 de verilen $\underline{a}$ matrisinin alt matrisleri sıfır veya birim matristir. Bu nedenle 6.4 çarpımı $\underline{k}$ daki eleman rijitlik matrislerinin alt matrislerinin $\underline{K}_0$ ın ilgili bloklarına eklenmesinden başka bir işlevi yoktur. Çarpımı yapmak yerine $\underline{K}_0$ aşağıda açıklanan yolla tek bir çarpma dahi yapmadan kurulur. İşlemler şekil 6.4 deki düzlem kafes sistem örneği üzerinde açıklanacaktır.

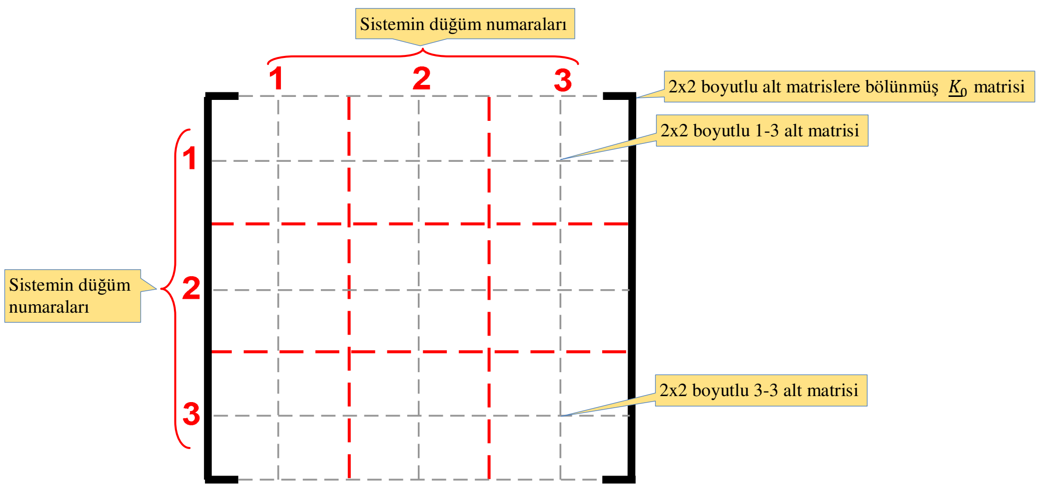


Şekil 6.4: Düzlem kafes sistem

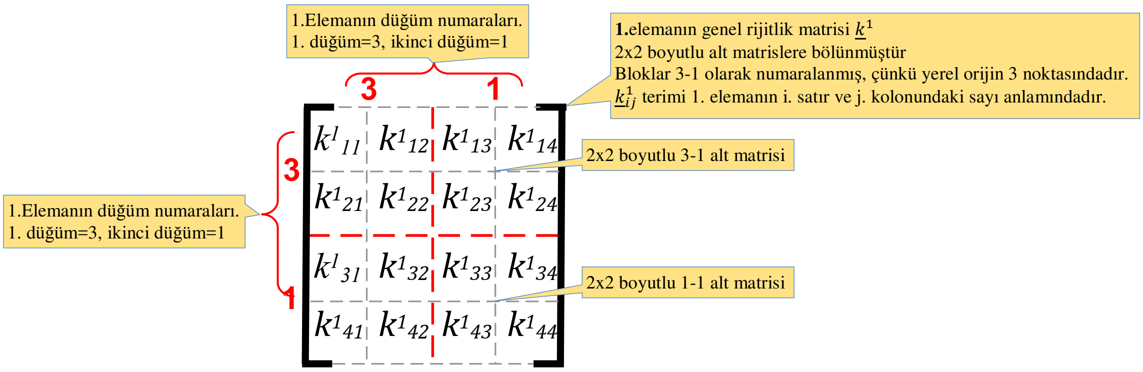
1) Sistem genel ve yerel koordinat sistemi seçilir, Düğüm ve elemanlar numaralanır, Şekil 6.4.
2) Düğüm serbestlik derecesi belirlenir, örnekte 2 dir.
3) Sistemin serbestlik derecesi belirlenir, örnekte 2·3=6 dır.
4) Sistemin serbestlik derecesi boyutlu boş bir $\underline{K}_0$ matrisi hazırlanır, örnekte 6x6 boyutlu



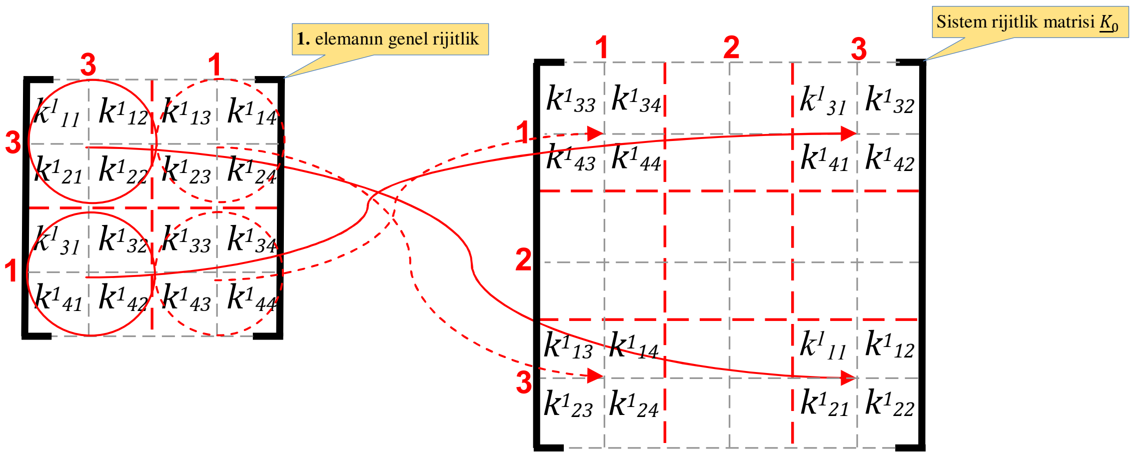
5) $\underline{K}_0$ matrisi boyutu sistemin düğüm serbestlik derecesi olan alt matrislere bölünür, örnekte 2x2. Alt matrislerin üstüne sistemin düğüm numaraları sırayla yazılır. Örnekte 1-2-3. Aynı numaralar alt matrislerin soluna (veya sağına) da yazılır. Alt matrisler düğüm numaraları ile adlandırılır. 1-3 alt matrisi 1. düğüm ile 3. düğümdeki alt matris anlamındadır.



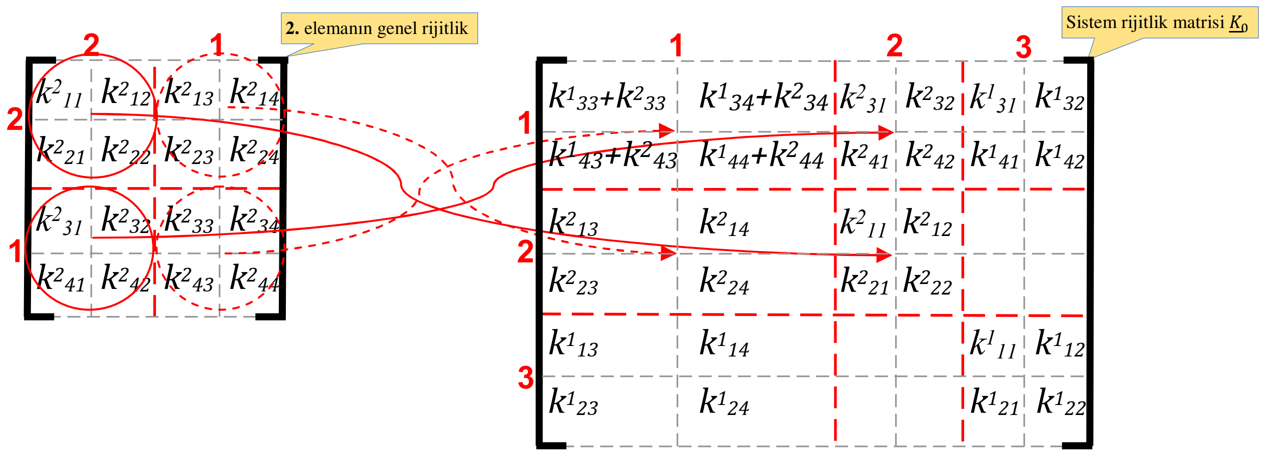
6) Birinci elemanın genel rijitlik matrisi kurulur, aynı boyutlu alt matrislere bölünür, elemanın düğüm numaraları alt matrislerin üstüne ve soluna yazılır. Elemanın düğüm numaraları, yerel orijinin bulunduğu düğümden başlanarak, sırayla yazılır. Örneğimizde 1. elemanın orijini 3 noktasında olduğundan bloklar üstüne ve soluna 3-1 yazılmalı(1-3 değil!).



1.Elemanın *i-j* düğümündeki alt matrisi sistem rijitlik matrisinin aynı *i-j* alt matrisideki sayılarla toplanır: Elemanın 3-3 alt matrisi sistemin 3-3 alt matrisine, 3-1 alt matrisi sistemin 3-1 alt matrisine, 1-3 alt matrisi sistemin 1-3 alt matrisine, 1-1 alt matrisi sistemin 1-1 alt matrisine eklenir.



7) İkinci elemanın genel rijitlik matrisi kurulur, alt matrislere bölünür, elemanın düğüm numaraları alt matrislerin üstüne ve soluna yazılır. Elemanın düğüm numaraları, yerel orijinin bulunduğu düğümden başlanarak, sırayla yazılır. Örneğimizde 2. elemanın orijini 2 noktasında olduğundan bloklar üstüne ve soluna 2-1 yazılmalı(1-2 değil!). Elemanın *i-j* alt matrisleri sistem rijitlik matrisinin *i-j* bloklarına eklenir.



8) Üçüncü elemanın genel rijitlik matrisi kurulur, alt matrisleri sistem rijitlik matrisine taşınır. Örneğimizde 3. eleman yoktur.

9) ……