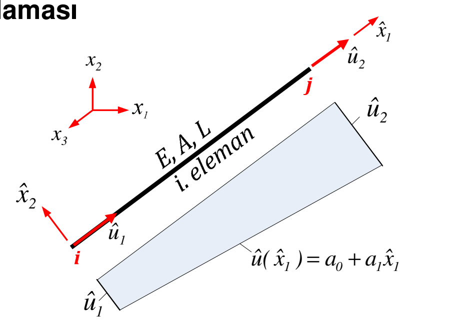
5. RITZ metodunun elemana uygulanması, elemanın rijitlik matrisi

Bu bölümde RITZ metodu eleman bazında uygulanacak, elemanın yer değiştirme fonksiyonu, şekil değiştirme, gerilme bağıntıları, toplam potansiyeli, yerel ve genel denge koşulu belirlenecektir. Bu işlemler, anlaşılması kolay olması açısından, kafes sistemin *i.* elemanı için yapılacak, bağıntılar daha sonra genelleştirilecektir. Bağıntıların basitleştirilmesi amacıyla, ara işlemlerde i indisi kullanılmayacaktır.

5.1 Düzlem kafes elemanının yer değiştirme fonksiyonu, RITZ uygulaması

Yer değiştirme fonksiyonu: Bir düzlem veya uzay kafes sistemin i ve j noktalarına bağlı *i.* elemanı şekil 5.1 de görülmektedir. E, A, L bilinmektedir. Sistem, dış yükler etkisiyle, yer değiştirince elemanın i ve j noktalarında $\hat{u}_1$ ve $\hat{u}_2$ yerel yer değiştirmeleri oluşur, $\hat{u}_1$ ve $\hat{u}_2$ değerleri sabittir. Çünkü şekil değiştirme tamamlanmış, $\hat{u}_1$ ve $\hat{u}_2$ son değerini almıştır. Soru şudur: i ve j arasındaki herhangi bir noktada yer değiştirme nedir? Kafes eleman sadece uzayıp-kısaldığından(eğilmediğinden) eleman boyunca yer değiştirme doğrusal olacaktır. Şekilde bu değişim grafik olarak gösterilmiştir, yer değiştirme fonksiyonu(RITZ fonksiyonu)



Şekil 5.1: Kafes elemanın yerel yer değiştirmeleri ve yer değiştirme fonksiyonu

$$\hat{u}(\hat{x}_1) = a_0 + a_1\hat{x}_1 \tag{5.1}$$

$$\hat{u}(\hat{x}_1) = \underbrace{[1 \quad \hat{x}_1]}_{\underline{\emptyset}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} \tag{5.2}$$

dir. a_0 ve a_1 parametrelerinin fiziksel bir anlamı yoktur. Matematik anlamda yer değiştirme fonksiyonunun doğrusal olduğunu vurgulayan her hangi sabit bir sayı anlamındadırlar.

5.1 veya aynı anlama gelen 5.2 fonksiyonu elemanın sınır koşullarını sağlamalıdır, yani

$\hat{x}_1 = 0$ da $\hat{u}(0) = \hat{u}_1$ olmalıdır $\rightarrow a_0 + a_1 \cdot 0 = \hat{u}_1$

$\hat{x}_1 = L$ de $\hat{u}(L) = \hat{u}_2$ olmalıdır $\rightarrow a_0 + a_1 L = \hat{u}_2$

veya, matris notasyonunda:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{\emptyset}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} \rightarrow \underline{\tilde{\emptyset}}^{-1} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ ile[1] her iki taraf çarpılarak

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} = \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{\emptyset}}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}}$$ olur. 5.2 de yerine yazılırsa

$$\hat{u}(\hat{x}_1) = \underbrace{[1 \quad \hat{x}_1]}_{\underline{\emptyset}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} = \underbrace{[1 \quad \hat{x}_1]}_{\underline{\emptyset}} \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{\emptyset}}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}}$$

$$\hat{u}(\hat{x}_1) = \frac{1}{L}[L - \hat{x}_1 \quad \hat{x}_1] \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}(\hat{x}_1) = \underbrace{\left[1 - \frac{\hat{x}_1}{L} \quad \frac{\hat{x}_1}{L}\right]}_{\underline{\hat{\emptyset}}(\hat{x}_1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}} \tag{5.3}$$

Kafes elemanın yer değiştirme fonksiyonu

$$\hat{u}^i(\hat{x}_1) = \underline{\hat{\emptyset}}^i(\hat{x}_1)\underline{\hat{u}}^i \tag{5.4}$$

i. elemanın yer değiştirme fonksiyonu(RITZ fonksiyonu)

elemanın yer değiştirme fonksiyonu olarak bulunur. 5.3 bağıntısı ile yer değiştirme fonksiyonu fiziksel anlamı olan $\hat{u}_1$ ve $\hat{u}_2$ parametreleri cinsinden ifade edilmiş olmaktadır.

Şekil değiştirme: Şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki ilişki 2.12 ye göre $\underline{\varepsilon} = \underline{D}\,\underline{u}$ (süreklilik koşulu) idi. Kafes eleman için, 2.20 bağıntıları nedeniyle, $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{11}$, $\underline{D} = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\underline{u} = \hat{u}(\hat{x}_1)$ olur:

[1] $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gibi 2x2 matrisin determinantı $\det \underline{A} = a \cdot d - c \cdot b$ ve tersi $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dir

$\underline{\varepsilon} = \underline{D}\ \underline{u} \ \rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\hat{u}(\hat{x}_1)$. 5.3 kullanılarak

$\varepsilon_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[1-\frac{\hat{x}_1}{L} \quad \frac{\hat{x}_1}{L}\right]\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}}$. Türev alınarak:

$$\varepsilon_{11} = \underbrace{\frac{1}{L}[-1 \quad 1]}_{\hat{\underline{D}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}} \tag{5.5}$$

Kafes elemanda şekil değiştirme sabit

$$\underline{\varepsilon}^i = \underline{\hat{D}}^i\ \underline{\hat{u}}^i \tag{5.6}$$

i. elemanın şekil değiştirme fonksiyonu=süreklilik koşulu

5.6 bağıntısına süreklilik koşulu da denilmektedir.

Gerilme:

$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$

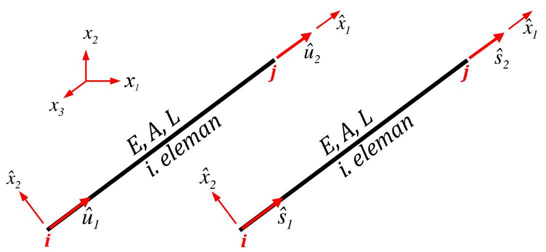
$$\sigma_{11} = \frac{E}{L}[-1 \quad 1]\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}} \tag{5.7}$$

Kafes elemanda gerilme sabit

$$\underline{\sigma}^i = \underline{E}^i\underline{\varepsilon}^i \tag{5.7a}$$

5.2 Elemanın yerel koordinatlarda toplam potansiyeli ve yerel rijitlik matrisi

Yer değiştirme fonksiyonu: Bir düzlem veya uzay kafes sistemin i ve j noktalarına bağlı *i.* elemanı şekil 5.2 de görülmektedir. E, A, L bilinmektedir. Sistemin yer değiştirmesi sonucu elemanın i ve j noktalarında $\hat{u}_1$ ve $\hat{u}_2$ yerel yer değiştirmeleri ve $\hat{s}_1$ ve $\hat{s}_2$ yerel kuvvetleri oluşur, bunların değerleri sabittir. Çünkü şekil değiştirme tamamlanmış, son değerlerini almışlardır. Eleman içinde de $\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirmesi ve $\underline{\sigma}$ gerilmesi oluşmuştur.



Şekil 5.2: Kafes elemanın yerel yer değiştirmeleri ve yer kuvvetleri

Π_i : gerilmelerin şekil değiştirmelerle yaptığı iştir: Bak: 3.9

$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\ \underline{\varepsilon}\ dV$

5.6 yerine konarak ve $\underline{\hat{u}}$ nin sabit olduğu hatırlanarak,

$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V (\underline{\hat{D}}\ \underline{\hat{u}})^T \underline{E}\ \underline{\hat{D}}\ \underline{\hat{u}}\ dV = \frac{1}{2}\ \underline{\hat{u}}^T(\int_V \underline{\hat{D}}^T \underline{E}\ \underline{\hat{D}}\ dV)\ \underline{\hat{u}}$.

Π_d dış kuvvetlerin yaptığı işin ters işaretlisidir: Bak: 3.10

$$\Pi_d = -W_d = -(\hat{u}_1\hat{s}_1 + \hat{u}_2\hat{s}_2) = -\underbrace{[\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2]}_{\hat{\underline{u}}^T}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\underline{s}}} = -\ \underline{\hat{u}}^T\underline{\hat{s}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\ \underline{\hat{u}}^T \underbrace{\int_V \underline{\hat{D}}^T \underline{E}\ \underline{\hat{D}}\ dV}_{\hat{\underline{k}}}\ \hat{u} - \underline{\hat{u}}^T\underline{\hat{s}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\ \underline{\hat{u}}^T\underline{\hat{k}}\ \underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}^T\underline{\hat{s}} \tag{5.8}$$

Elemanın yerel koordinatlarda toplam potansiyeli

olur. Buradaki

$$\underline{\hat{k}} = \int_V \underline{\hat{D}}^T \underline{E}\ \underline{\hat{D}}\ dV \tag{5.9}$$

Matrisine elemanın yerel rijitlik matrisi[1] denir. Boyutu elemanın yerel serbestlik derecesi kadar ve simetrik bir matristir. Şekil 5.2 deki eleman için 2x2 boyutundadır. Rijitlik matrisi ve transformasyon matrisi SEM in en önemli iki büyüklüğüdür. 5.9 bağıntısı her tip eleman(kafes, kiriş, levha, plak,..) için geçerli genel bir ifadedir. Ancak, eleman tipine bağlı olarak $\underline{\hat{D}}$ ve $\underline{E}$ matrislerinin boyutu ve terimleri değişir. Örneğin, kafes eleman için $\underline{E} = E$ ve $\underline{\hat{D}}$ 5.5 bağıntısındaki gibidir. Genelleştirme:

$$\Pi^i = \frac{1}{2}\ (\underline{\hat{u}}^i)^T\underline{\hat{k}}^i\ \underline{\hat{u}}^i - (\underline{\hat{u}}^i)^T\underline{\hat{s}}^i \tag{5.10}$$

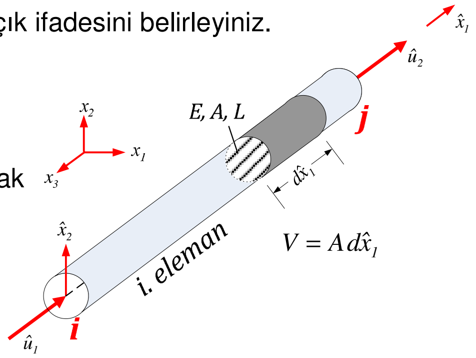
i. Elemanın yerel koordinatlarda toplam potansiyeli

$$\underline{\hat{k}}^i = \int_V (\underline{\hat{D}}^i)^T \underline{E}^i\ \underline{\hat{D}}^i\ dV \tag{5.11}$$

i. Elemanın yerel koordinatlarda rijitlik matrisi

[1] Local stiffness matrix of the member

Teorik örnek: Şekil 5.3 deki kafes elemanın yerel rijitlik matrisinin açık ifadesini belirleyiniz.



Şekil 5.3: Kafes eleman

Yerel rijitlik matrisi 5.9 a göre:

$$\underline{\hat{k}} = \int_V \underline{\hat{D}}^T \underline{E}\, \underline{\hat{D}}\; dV.$$

Kafes elemanda $\underline{E} = E$ ve 5.5 e göre $\underline{\hat{D}} = \frac{1}{L}[-1 \quad 1]$ dir, yerine yazarak

$$\underline{\hat{k}} = \int_V \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}_{\hat{D}^T} E\, \underbrace{\frac{1}{L}[-1 \quad 1]}_{\hat{D}}\; dV = \frac{E}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}[-1 \quad 1]\; A\, d\hat{x}_1$$

$$\underline{\hat{k}} = \frac{E}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} A\, d\hat{x}_1$$

$$\underline{\hat{k}} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Kafes elemanın yerel koordinatlarda rijitlik matrisi

olur. Elemanın yerel serbestlik derecesi 2 dir($\hat{u}_1, \hat{u}_2$). Yerel rijitlik matrisi de 2x2 boyutlu ve simetriktir, terimleri sabit sayılardan(E, A, L) oluşmaktadır. 5.9 hem düzlem hem de uzay kafes eleman için geçerlidir. Çünkü sistem düzlem de olsa uzay da olsa elemanın yerel eksen takımı, serbestlik derecesi ve yer değiştirme fonksiyonu aynıdır.

5.3 Elemanın yerel denge koşulu[1]

Elemanın 5.8 deki toplam potansiyeli

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}}$$

denge konumunda minimum olur. $\underline{\hat{u}}$ vektörünün terimleri Π nin parametreleridir. Çünkü 5.4 e göre, yer değiştirme(RİTZ) fonksiyonu $\underline{\hat{u}}$ yu parametre olarak içermektedir. Π nin minimum olma koşulu

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\hat{u}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\hat{u}}}\left(\frac{1}{2}\,\underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}}\right) = \underline{0}$$

dır. $\underline{\hat{k}}$ simetrik olduğundan[2]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\hat{u}}} = \frac{1}{2} 2\underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}} - \underline{\hat{s}} = \underline{0}$$

$$\underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{s}} \tag{5.13}$$

Genelleştirilirse:

$$\underline{\hat{k}}^i\,\underline{\hat{u}}^i = \underline{\hat{s}}^i \tag{5.14}$$

i. Elemanın yerel koordinatlarda denge koşulu

olur. 5.14 bağıntısı elemanın yerel yer değiştirmeleri $\underline{\hat{u}}^i$ belli olunca yerel kuvvetleri $\underline{\hat{s}}^i$ nin hesaplanmasında kullanılır. Sabit terimlerden oluşan yerel rijitlik matrisi $\underline{\hat{k}}^i$ simetrik, fakat tekildir, yani det $\underline{\hat{k}}^i = 0$ dır ve $\underline{\hat{k}}^i$ nin tersi yoktur. Kafes eleman için örnekleyelim. 5.12 deki rijitlik matrisi ile

Kafes elemanın yerel denge koşulu:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}}_{\hat{k}^i}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\\hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{u}^i} = \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\\hat{s}_2\end{bmatrix}}_{\hat{s}^i}} \tag{5.14a}$$

det $\underline{\hat{k}}^i$=det $\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{EA}{L}[1\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)]$=0 olur.

Bu nedenle $\underline{\hat{s}}^i$ belli ise 5.14 kullanılarak $\underline{\hat{u}}^i$ hesaplanamaz. $\underline{\hat{k}}^i$ neden tekildir? 5.14 uzayda sabitlenmemiş (mesnetlenmemiş), gezer bir elemanın denge koşuludur, $\underline{\hat{u}}^i$ ne olursa olsun geçerlidir. Üzerinde birbirini dengeleyen yükleri olan ama hiç mesnedi olmayan uzayda bir kiriş düşünün. Uzayda gezen, yer değiştiren

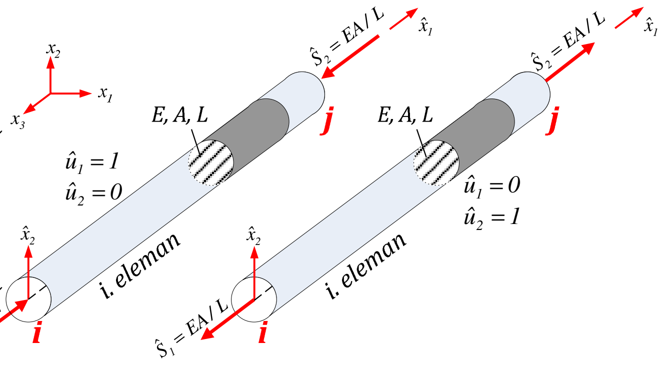
[1] Local equilibrium condition of the member

[2] $\frac{1}{2}\,\underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}}$ ifadesinin $\underline{\hat{u}}$ ya göre türevini şu basit düşünce ile bulabiliriz. Önce integraldeki büyüklüklerin matris değil, basit değişken ve sabitler olduğunu varsayalım: $\hat{u}$ değişken, $\hat{k}$ ve $\hat{s}$ sabit. $\frac{\partial}{\partial \underline{\hat{u}}}\left(\frac{1}{2}\,\underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}^T \underline{\hat{s}}\right) \to \frac{\partial}{\partial \hat{u}}\left(\frac{1}{2}\hat{u}\hat{k}\,\hat{u} - \hat{u}\,\hat{s}\right) = \frac{\partial}{\partial \hat{u}}\left(\frac{1}{2}\hat{k}\,\hat{u}^2 - \hat{u}\,\hat{s}\right) = \frac{1}{2}2\hat{k}\,\hat{u} - \hat{s} = \hat{k}\,\hat{u} - \hat{s}$ olur. Matris karşılığı: $\underline{\hat{k}}\,\underline{\hat{u}} - \underline{\hat{s}}$. Ayrıca bak: EKLER türev.

ama şekil değiştirmeyen(rijit yer değiştirme yapan) her zaman dengede olan bir kiriştir. Kiriş kuvvetlerinden yer değiştirmeyi bulamazsınız, sonsuz cevabı vardır.
Rijitlik matrisinin *i.* satır ve *j.* kolonundaki k_{ij} teriminin fiziksel anlamı nedir? *j.* yer değiştirme 1 ve diğerleri 0 iken *i.* serbestlik derecesi yönünde oluşan kuvvettir(birimi: N/m, kN/mm, …). Kafes eleman ile örneklersek:

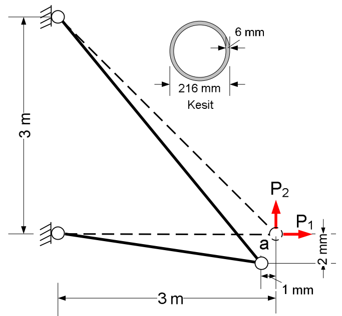
$$\underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\hat{k}^i}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{u}^i}=\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\end{bmatrix}}_{\hat{s}^i}\rightarrow\underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\hat{k}^i}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}_{\hat{u}^i}=\underbrace{\begin{bmatrix}EA/L\\ -EA/L\end{bmatrix}}_{\hat{s}^i}$$

$$\underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\hat{k}^i}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{u}^i}=\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\end{bmatrix}}_{\hat{s}^i}\rightarrow\underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\hat{k}^i}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\hat{u}^i}=\underbrace{\begin{bmatrix}-EA/L\\ EA/L\end{bmatrix}}_{\hat{s}^i}$$



Şekil 5.4: Kafes eleman

Sayısal örnek: Şekil 5.5 deki kafes sistem kesiti verilen çelik borulardan imal edilmiştir. a noktasına uygulanan P_1 ve P_2 kuvvetleri bu noktanın yer değiştirmesine neden olmuştur. a) Yerel çubuk kuvvetlerini bulunuz. b) P_1 ve P_2 kuvvetlerini bulunuz. c) reaksiyonları bulunuz.



Şekil 5.5: Düzlem kafes sistem

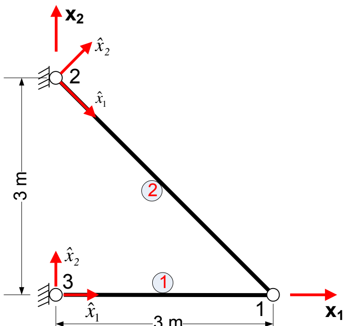
Önce sistemin numaralanması, genel ve yerel koordinat sistemlerinin seçilmesi gerekir: Şekil 5.5a. $\hat{s}^i$ yerel çubuk kuvvetlerini 5.14 teki $\hat{k}^i\,\hat{u}^i = \hat{s}^i$ bağıntısından bulabiliriz. Bunun için çubukların $\hat{k}^i$ yerel rijitlik matrislerini ve $\hat{u}^i$ yerel yer değiştirmelerini hesaplamamız gerekir. Genel yer değiştirmeler 4.1a da verilen $\hat{u}^i = T^i u^i$ bağıntısı ile yerel yer değiştirmelere dönüştürülür, o halde T^i transformasyon matrislerini de bulmalıyız. Düzlem kafes eleman için:

Kafes elemanın yerel−genel yer değiştirme transformasyonu Bak: 4.1

$$\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{u}^i}=\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & \Delta_2/L & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L\end{bmatrix}}_{T^i}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}}_{u^i}}$$

Kafes elemanın yerel denge koşulu: Bak: 5.14a

$$\overbrace{\underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\hat{k}^i}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{u}^i}=\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\end{bmatrix}}_{\hat{s}^i}}$$



Şekil 5.5a: Düzlem kafes sistem
Numaralandırma ve koordinat sistemi

Yapı çeliğinin elastisite modülü E=2.1·10^5 N/mm^2, kesit alanı
$A = \frac{\pi}{4}216^2 - \frac{\pi}{4}(216-12)^2 = 3958.4$ mm^2 her elemanda aynıdır.

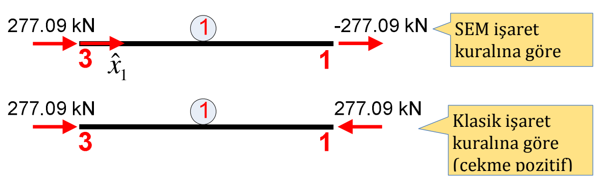
<u>*1 nolu elemanda*[1]*:*</u>

$\Delta_1 = 3 - 0 = 3\,m\,,\quad \Delta_2 = 0 - 0 = 0$

$L = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3\,m,\ \Delta_1/L = \frac{3}{3} = 1,\ \Delta_2/L = \frac{0}{3} = 0$

$$\underline{u}^1 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ -2\end{bmatrix},\quad \underline{\hat{u}}^1 = \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{u}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{T^1}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ -2\end{bmatrix}}_{u^1} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}}_{\hat{u}^1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\end{bmatrix}}_{\hat{s}^1} = \underbrace{\frac{2.1\cdot 10^5\cdot 3958.4}{3000}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\hat{k}^1}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}}_{\hat{u}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix}277088\\ -277088\end{bmatrix}}_{\hat{s}^1} \text{ Newton}$$



[1] Hesaplar şekil değiştirmemiş sistem ile yapılır.

2 nolu elemanda:

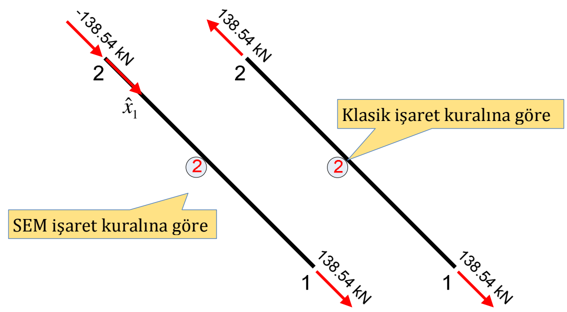
$\Delta_1 = 3 - 0 = 3\,m\,, \quad \Delta_2 = 0 - 3 = -3\,m$

$L = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4.2426\,m$

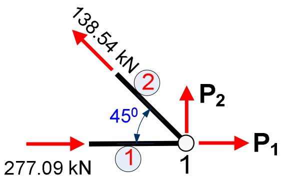
$\Delta_1/L = \frac{3}{4.2426} = 0.7071, \quad \Delta_2/L = \frac{-3}{4.2426} = -0.7071$

$$\underline{u}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\hat{\underline{u}}^2}_{\hat{\underline{u}}^2} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}}_{\underline{T}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\underline{u}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.7071 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}^2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{s}}^2} = \underbrace{\frac{2.1 \cdot 10^5 \cdot 3958.4}{4242.6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{k}}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.7071 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -138544 \\ 138544 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{s}}^2} \text{ Newton}$$



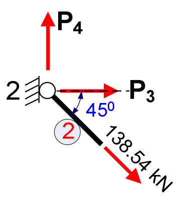
P_1 ve P_2 kuvvetleri:



$P_1 + 277.09 - 138.54 \cdot Cos(45) = 0$
$P_1 = -179.13\,kN$

$P_2 + 138.54 \cdot Cos(45) = 0$
$P_2 = -97.96\,kN$

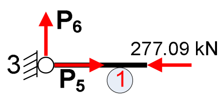
2 noktasında reaksiyonlar[1]:



$P_3 + 138.54 \cdot Cos(45) = 0$
$P_3 = -97.96\,kN$

$P_4 - 138.54 \cdot Cos(45) = 0$
$P_4 = 97.96\,kN$

3 noktasında reaksiyonlar:



$P_5 - 277.09 = 0$
$P_5 = 277.09\,kN$

$P_6 = 0$

5.4 Elemanın genel koordinatlarda toplam potansiyeli ve genel rijitlik matrisi

Elemanın 5.10 daki toplam potansiyeli(i indisi kaldırıldı) $\Pi = \frac{1}{2}\,\hat{\underline{u}}^T \hat{\underline{k}}\,\hat{\underline{u}} - \hat{\underline{u}}^T \hat{\underline{s}}$ yerel büyüklükler($\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{k}}, \hat{\underline{s}}$) cinsidendir. 4.1a ve 4.2a yerine konarak

$$\Pi = \frac{1}{2}(\underline{T}\,\underline{u})^T \hat{\underline{k}}\,\underline{T}\,\underline{u} - (\underline{T}\,\underline{u})^T \hat{\underline{s}} = \frac{1}{2}\,\underline{u}^T \underbrace{\underline{T}^T \hat{\underline{k}}\,\underline{T}}_{\underline{k}}\,\underline{u} - \underline{u}^T \underbrace{\underline{T}^T \hat{\underline{s}}}_{\underline{s}}$$

$$\Pi^i = \frac{1}{2}(\,\underline{u}^i\,)^T\,\underline{k}^i\,\underline{u}^i - (\underline{u}^i)^T \underline{s}^i \qquad (5.15)$$

i. Elemanın genel koordinatlarda toplam potansiyeli

toplam potansiyel genel büyüklükler($\underline{u}^i, \underline{k}^i, \underline{s}^i$) cinsinden elde edilir. Buradaki

$$\underline{k}^i = (\underline{T}^i)^T\,\hat{\underline{k}}^i\,\underline{T}^i \qquad (5.16)$$

i. Elemanın genel rijitlik matrisi

matrisi elemanın genel rijitlik matrisidir[2]. Bilindiği gibi, toplam potansiyel bir sayıdır ve koordinat transformasyonu değerini değiştirmez, 5.10 ve 5.15 den bulunan sayısal değer aynıdır. Aradaki fark sadece

[1] Reaksiyonlar burada düğüm dengesinden, bilinen klasik yolla, hesaplanmıştır. SEM de daha sistematik başka bir yol izlenir, konular ilerledikçe açıklık kazanacaktır.
[2] Global stiffness matrix of the member

ilkinin yerel, ikincisinin genel büyüklükler cinsinden hesaplanmış olmasıdır. Sistemin toplam potansiyelinin hesaplanmasında 5.15 kullanılır, çünkü sistem genel koordinatlarda tanımlıdır.

5.5 Elemanın genel denge koşulu[1]

Elemanın denge konumunda 5.15 toplam potansiyeli minimum olmak zorundadır:

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial \underline{u}^i} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial \underline{u}^i}\left\{\frac{1}{2}(\,\underline{u}^i\,)^T\,\underline{k}^i\,\underline{u}^i - (\underline{u}^i)^T \underline{s}^i\right\} = \frac{1}{2}2\underline{k}^i\,\underline{u}^i - \underline{s}^i = 0$$

$$\underline{s}^i = \underline{k}^i\,\underline{u}^i \tag{5.17}$$

i. Elemanın genel koordinatlarda denge koşulu

olur. Elemanın $\underline{u}^i$ genel yer değiştirmeleri belli olunca 5.17 bağıntısı ile elemanın genel koordinatlardaki $\underline{s}^i$ uç kuvvetleri bulunur. det $\underline{k}^i = 0$ dır, $\underline{k}^i$ nin tersi tanımsızdır(Anlamı: bu bağıntıdan $\underline{u}^i$ hesaplanamaz).

Teorik örnek: Düzlem kafes elemanın genel rijitlik matrisini bulunuz.
5.16 ya göre genel rijitlik matrisi

$$\underline{k}^i = (\underline{T}^i)^T\,\hat{\underline{k}}^i\,\underline{T}^i$$

4.1 e göre transformasyon matrisi

$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} \Delta_1/L & \Delta_2/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L \end{bmatrix}$$

5.12 ye göre yerel rijitlik matrisi

$$\hat{\underline{k}}^i = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. $c_1 = \Delta_1/L\,,\; c_2 = \Delta_2/L$ ile gösterelim:

$$\underline{k}^i = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \\ 0 & c_1 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}}_{(\underline{T}^i)^T} \underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{k}}^i} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{T}^i} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c_1^{\,2} & c_1c_2 & -c_1^{\,2} & -c_1c_2 \\ c_1c_2 & c_2^{\,2} & -c_1c_2 & -c_2^{\,2} \\ -c_1^{\,2} & -c_1c_2 & c_1^{\,2} & c_1c_2 \\ -c_1c_2 & -c_2^{\,2} & c_1c_2 & c_2^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^i = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{7em}}^{i\ \text{ucu}} & \overbrace{\hspace{7em}}^{j\ \text{ucu}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} c_1^{\,2} & c_1c_2 & -c_1^{\,2} & -c_1c_2 \\ c_1c_2 & c_2^{\,2} & -c_1c_2 & -c_2^{\,2} \\ \hdashline -c_1^{\,2} & -c_1c_2 & c_1^{\,2} & c_1c_2 \\ -c_1c_2 & -c_2^{\,2} & c_1c_2 & c_2^{\,2} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} i\ \text{ucu} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} j\ \text{ucu} \end{array} \tag{5.18}$$

Düzlem kafes elemanın genel rijitlik matrisi

bulunur.

Teorik örnek: Uzay kafes elemanın genel rijitlik matrisini bulunuz.
5.16 ya göre genel rijitlik matrisi

$$\underline{k}^i = (\underline{T}^i)^T\,\hat{\underline{k}}^i\,\underline{T}^i$$

4.4 e göre transformasyon matrisi

$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} \Delta_1/L & \Delta_2/L & \Delta_3/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L & \Delta_3/L \end{bmatrix}$$

5.12 ye göre yerel rijitlik matrisi $\hat{\underline{k}}^i = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dir. $c_1 = \Delta_1/L\,,\; c_2 = \Delta_2/L\,,\;\; c_3 = \Delta_3/L$ ile gösterelim:

$$\underline{k}^i = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \\ c_3 & 0 \\ 0 & c_1 \\ 0 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix}}_{(\underline{T}^i)^T} \underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{k}}^i} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{\underline{T}^i}$$

[1] Gloabal equilibrium condition of the member

$$\underline{k}^i=\frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{9em}}^{i\ \text{ucu}} & \overbrace{\hspace{9em}}^{j\ \text{ucu}} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} {c_1}^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & -{c_1}^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 \\ c_1c_2 & {c_2}^2 & c_2c_3 & -c_1c_2 & -{c_2}^2 & -c_2c_3 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & {c_3}^2 & -c_1c_3 & -c_2c_3 & -{c_3}^2 \\ \hline -{c_1}^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 & {c_1}^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ -c_1c_2 & -{c_2}^2 & -c_2c_3 & c_1c_2 & {c_2}^2 & c_2c_3 \\ -c_1c_3 & -c_2c_3 & -{c_3}^2 & c_1c_3 & c_2c_3 & {c_3}^2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} i\ \text{ucu} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} j\ \text{ucu} \end{array} \end{array} \qquad (5.19)$$

Uzay kafes elemanın genel rijitlik matrisi