4. Sonlu elemanlar yer değiştirme metodu, modelleme, tanımlar

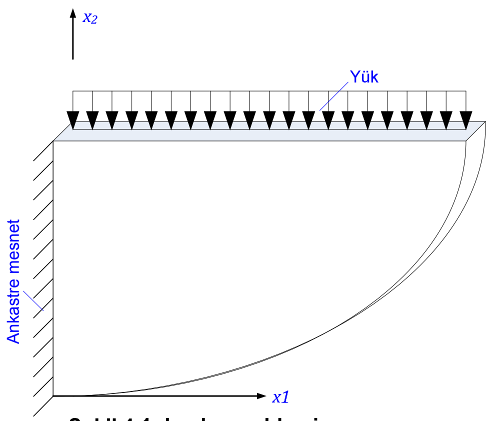
3. bölümde örneklerle açıklanan RITZ metodu 2.5, 2.12 ve 2.15 bağıntıları yerine kullanılabilen güçlü bir metod olmasına rağmen, uygulama alanı gene de çok kısıtlıdır. Çünkü çözümü yapılacak sistemin tümü için geçerli olan

a) Tek bir yer değiştirme fonksiyonunun tahmin edilmesi
b) Fonksiyonun derecesinin yeterli olması
c) Fonksiyonun sürekli olması ve sistemin tüm geometrik sınır (mesnet) koşullarını sağlaması

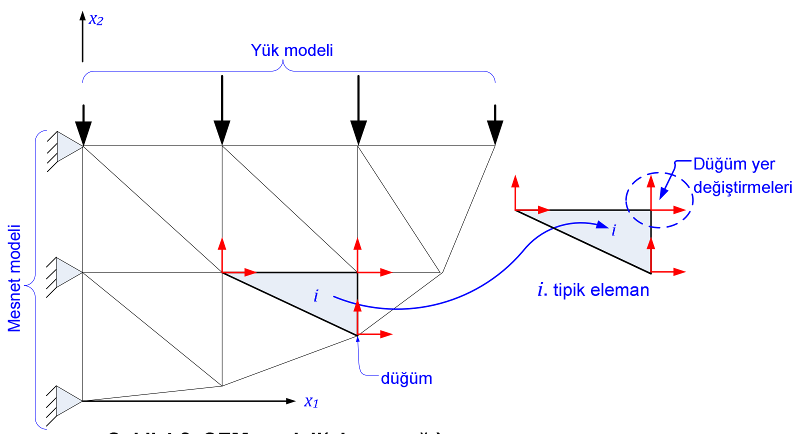
gerekir. Tek bir kafes çubuğun, tek açıklıklı bir kiriş çubuğun, basit bir plağın, levhanın veya kabuğun diferansiyel denklemi mekanik mukavemet ve elastisite teorisinden bilinmektedir. Böylesine basit sistemler için **yer değiştirme fonksiyonu tahmin etmek** zorluk yaratmaz, çünkü bilinen diferansiyel denklemler yer değiştirme fonksiyonunun kaç parametreli ve kaçıncı dereceden bir polinom olması gerektiği bilgisini verir[1]. Fakat, düzlem veya uzay, bir kafes, çerçeve veya karma bir sistemin tek bir diferansiyel denklemi yoktur. O halde; geometrisi, yükü ve mesnet koşulları karmaşık sitemlerde RITZ metodunu doğrudan kullanmak imkânsızdır.

RİTZ metodundaki bu zorluklar sonlu elemanlar metodunun doğmasına neden olmuştur. Madem sistemin tümü için geçerli tek bir fonksiyon bulmak zor fakat basit elemanlar için kolaydır, o zaman sistemi basit elemanlara bölerek her eleman[2] için ayrı ayrı yer değiştirme fonksiyonu seçer, RITZ metodunu her elemana uygular, elemanların denge koşullarını belirleyebiliriz. Sistemi basit elemanlar bölmek **modellemek** olarak adlandırılmaktadır.

Şekil 4.1 de görülen levha sistemin sonsuz noktası ve her noktanın iki yer değiştirmesi(x_1, ve x_2 yönünde) vardır. Kesin çözüm yapmak istersek her noktanın yer değiştirmesini hesaplamamız gerekir. Sonsuz nokta sonsuz bilinmeyen demektir, çözmek mümkün değildir. Levha sistemi üçgen veya dörtgen geometrili küçük elemanlara bölebiliriz. Şekil 4.2 de levhanın üçgen elemanlara bölünmüş bir şekli(modeli) görülmektedir. Modelleme sonucu ortaya çıkan sonlu sayıda eleman ve elemanların birleştiği ortak nokta vardır. Bu ortak noktalara **düğüm**[3] denilmektedir. Sonlu elemanlar yer değiştirme metodunda bilinmeyenler[4] sistemin düğüm noktalarındaki yer değiştirmelerdir.



Şekil 4.1: Levha problemi



Şekil 4.2: SEM modeli(eleman ağı)

Modellemede yapılan varsayımlar:

- Eğrisel kenarlarda geometride kayıplar vardır, buna razı olunur.
- Yayılı yüklerin eşdeğerleri sadece düğümlere etkir.
- Sürekli mesnet koşulları sadece mesnet bölgesindeki düğümlerde sağlanır, buna razı olunur.
- Elemanlar sadece düğüm noktalarında birbirine bağlıdır. Düğüm noktaları hariç, elemanların ortak kenarlarında bağ yoktur, buna razı olunur.
- Düğüm noktalarında elemanların yer değiştirmeleri birbirine eşittir.
- Her düğüm noktası aynı zamanda sistemin bir noktasıdır. Dolayısıyla elemanların düğümdeki yer değiştirmeleri sistemin aynı noktadaki yer değiştirmelerine eşittir.

---

[1] Örnek: sabit p yüklü bir kirişin elastik eğri(=yer değiştirme) denkleminin $-EIu^{iv} = p$ olduğu bilinmektedir. 4 kez integral alınırsa u yer değiştirmesi 5 parametreli 4. derece polinom olur. Yüksüz kafes kirişin diferansiyel denklemi $EAu'' = 0$ dır. u yer değiştirmesi iki parametreli birinci derece polinom olur.
[2] Member
[3] Node, vertex
[4] Unknowns

Modelleme ve yapılan varsayımların getirdiği kolaylıklar:

- Her tür geometri, yük mesnet tipi modellenebilir.
- Sonsuz bilinmeyen sonlu bilinmeyene indirgenmiş olur, sistem çözülebilir.
- Karma sitemlerde her eleman farklı tipten olabilir(kafes, kiriş, levha, plak,.. gibi)
- Her elemanın boyutları(kalınlığı, .. v.s.), malzemesi, yükü farklı olabilir.
- Elemanların hacimlerinin toplamı sistemin hacmine eşittir[1]: $V = \sum_{i=1}^{s} V^i$
- Elemanların yüzeyleri toplamı sistemin yüzeyine eşittir: $O = \sum_{i=1}^{s} O^i$
- Elemanların toplam potansiyeli sistemin toplam potansiyeline eşittir: $\Pi = \sum_{i=1}^{s} \Pi^i$
- Her eleman için farklı bir yer değiştirme fonksiyonu seçilebilir, RITZ metodu her elemana ayrı ayrı uygulanabilir, her elemanın toplam potansiyeli hesaplanabilir, denge koşulu belirlenebilir.
- Düğüm noktalarında sistemin yer değiştirmelerinin elemanların yer değiştirmelerine eşitliği koşulu kullanılarak sistemin toplam potansiyeli ve denge koşulları belirlenebilir.

Modelleme sonucu ortaya çıkan sorunlar:

- Modeldeki geometri gerçek geometriden farklıdır.
- Modeldeki yükler gerçek yüklerden farklıdır.
- Modeldeki sınır koşulları gerçek sınır koşullarından farklıdır.
- Kurulması ve çözülmesi gereken denklem sistemi çok büyük olur(birkaç bin, birkaç milyon gibi).
- Çözüm elle yapılamaz, profesyonel ve doğruluğu kanıtlanmış, güvenilir, pahalı yazılım (5000-30000 $) gerekir.
- Uygun elemanlar ile modellemek ve çok sayıdaki çıktıyı yorumlamak deneyim gerektirir.
- Modelden bulunan çözüm gerçek çözümden farklıdır.

Nokta ve eleman sayısı artırılarak yukarıdaki sorunların çoğu giderilebilir, gerçek çözüme yakın çözüm bulunabilir[2], ancak veri ve çıktı sayısı giderek artar, yorumlamak zorlaşır.

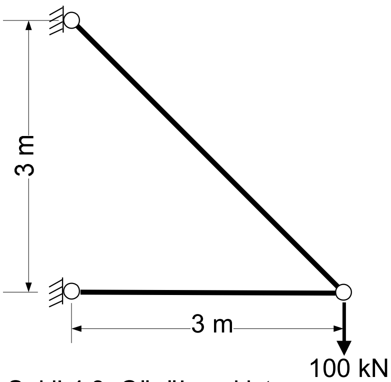
4.1 Tanımlar

Şekil 4.3 de görülen düzlem kafes sistemin SEM ile çözülmesi istendi varsayalım. Bu sistemi kullanarak sonlu elemanlar teorisinde sıkça kullanılacak bazı temel kavramları verelim.

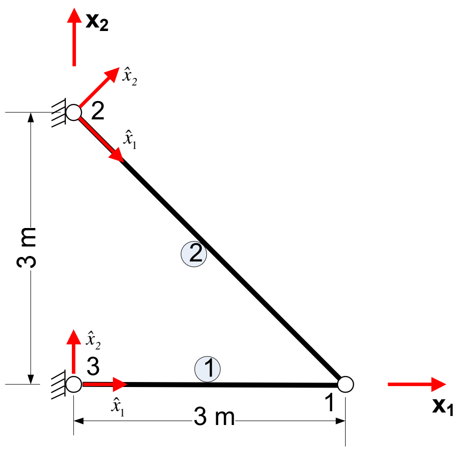
***Modellemek, model*[3]:** Sistemin sonlu elemanlara bölünmesine modellemek, bölünmüş sisteme de model denir. Şekil 4.3 deki sistem kendiliğinden modellenmiştir, çubuklar eleman, çubukların birleştiği veya mesnetlendiği noktalar düğüm noktasıdır.

***Genel koordinat sistemi*[4]:** Orijini herhangi bir noktada olan Kartezyen ve sağ koordinat sistemi seçilir. Bu koordinat sistemi düğüm noktalarının koordinatlarının, düğüm yer değiştirmelerinin ve dış yüklerin tanımlanması amacıyla kullanılır. Şekil 4.4 genel koordinat sisteminin eksenleri x_1, x_2 ile gösterilmiştir. Genel x_3 ekseni kâğıt-ekran düzlemine dik ve okuyucuya doğru yönlenmiştir(sağ sistem).

***Yerel koordinat sistemi*[5]:** Her eleman için bir koordinat sistemi seçilir. Bunlara eleman veya yerel koordinat sistemi denir. Orijini elemanın herhangi bir noktasında olabilir. Bu koordinat sistemi elemanın düğüm noktalarının yerel yer değiştirmelerinin ve yerel iç kuvvetlerinin tanımlanmasında kullanılır. Şekil 4.4 de yerel koordinat eksenleri $\hat{x}_1, \hat{x}_1$ ile gösterilmiştir. Yerel $\hat{x}_3$ ekseni kâğıt-ekran düzlemine dik ve okuyucuya doğru yönlenmiştir.



Şekil 4.3: Çözülmesi istenen düzlem kafes sistem



Şekil 4.4: Genel ve yerel koordinat sistemi, düğüm ve eleman numaraları

---

[1] s: eleman sayısı; V^i, O^i, Π^i: *i.* elemanın hacmi, yüzeyi, toplam potansiyeli. Modelleme sonucu oluşan eleman ortak yüzeyleri O^i ye dahil değildir.

[2] Kafes ve çerçeve sistemler zaten eleman ve düğüm noktalarından oluşur, yani kendiliğinden modellenmiştir. Dolayısıyla çubuk sistemlerin SEM çözümü yaklaşık değildir, analitik çözüm ile aynıdır. Yaklaşıklık sadece sürekli ortam(levha, plak, kabuk,…) problemlerinde söz konusu olur. SEM ile analitik çözüm arasında yer değiştirmelerde %1, şekil değiştirme ve gerilmelerde %10 fark normal kabul edilir.

[3] Modeling, idealization, meshing, model, mesh

[4] Global coordinate system

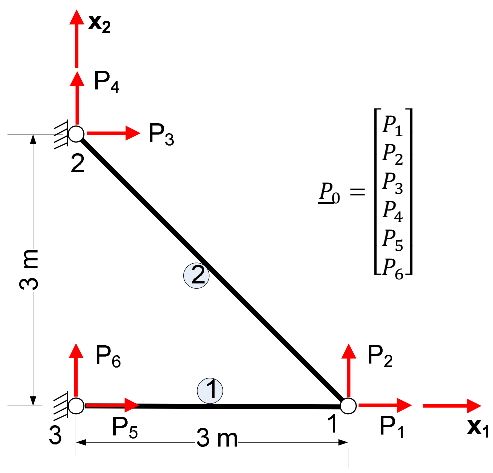
[5] Local coordinate system

Düğüm noktası numarası[1]***:*** Her düğüme bir numara verilir. Numaralamaya herhangi bir düğüm noktasından başlanabilir. Şekil 4.4 de 1, 2, 3 olarak düğüm noktalarına yazılmıştır.

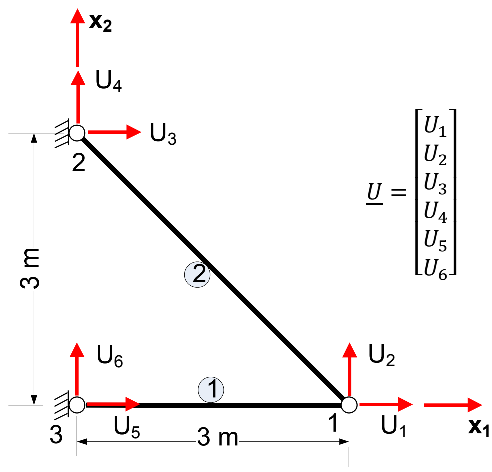
Eleman numarası[2]***:*** Her elamana bir numara verilir. Numaralamaya herhangi bir elemandan başlanabilir. Şekil 4.4 de daire içinde 1, 2 olarak elemanların üzerinde gösterilmiştir.

Sistem dış yükleri[3]***:*** Düğümlerde etkiyen dış kuvvetlerdir. Genel eksen yönünde pozitif kabul edilirler. Düzlem kafes sistemin herhangi bir düğümünde iki kuvvet olabilir, biri genel x_1 diğeri genel x_2 ekseni doğrultusundadır. *Mesnetler dahil,* her noktada ve *her genel eksen yönünde dış yük var varsayılır.* Bazılarının değeri sıfırdır(verilmemiş yük), bazılarının değeri bilinir(verilmiş yük), bazılarınınki bilinmez(mesnet reaksiyonları[4](hesaplanması gerekir). 1 nolu düğümden başlanarak numaralandırılırlar. 1 nolu düğümde x_1, x_2 genel eksenleri yönündeki kuvvetler P_1, P_2 olarak, 2 nolu düğümde x_1, x_2 genel eksenleri yönündeki kuvvetler P_3, P_4, .. olarak numaralanır, bu sıra değiştirilmez. Şekil 4.5 de genel dış kuvvetler gösterilmiştir.

Sistem yer değiştirmeleri[5]***:*** Düğümlere etkiyen kuvvetler nedeniyle her nokta yer değiştirir. Düzlem kafes sitemin herhangi bir düğümünde iki yer değiştirme olabilir, biri genel x_1 diğeri genel x_2 ekseni doğrultusundadır. Genel eksen yönünde pozitif kabul edilirler. *Mesnetler dahil*, her noktada ve *her genel eksen yönünde yer değiştirme var varsayılır.* Bazılarının değeri sıfırdır(hareketi önlenmiş mesnet), bazılarının değeri bilinir(mesnet çökmesi), bazılarının değeri bilinmez(hesaplanması gerekir). 1 nolu düğümden başlanarak numaralandırılırlar. 1 nolu düğümde x_1, x_2 genel eksenleri yönündeki yer değiştirmeler U_1, U_2 olarak, 2 nolu düğümde x_1, x_2 genel eksenleri yönündeki yer değiştirmeler U_3, U_4, .. olarak numaralanır, bu sıra değiştirilmez. Şekil 4.6 da genel yer değiştirmeler gösterilmiştir.



Şekil 4.5: Sistem dış yükleri



Şekil 4.6: Sistem yer değiştirmeleri

Düğüm serbestlik derecesi[6]***:*** Bir düğümdeki yer değiştirmelerin sayısına serbestlik derecesi denir, Şekil 4.6 daki sistemin düğüm serbestlik derecesi 2 dır.

Sistemin serbestlik derecesi[7]***:*** Sistemin genel yer değiştirmelerinin toplam sayısına sistemin serbestlik derecesi denir. Şekil 4.6 daki sistemin serbestlik derecesi= düğüm sayısı · düğüm serbestlik derecesi=3·2=6 dır.

Sistem yük vektörü[8]***:*** Düğümlere etkiyen dış kuvvetlerin bir araya toplanmasıyla oluşan vektördür. $\underline{P}_0$ ile gösterir ve yer işgal etmemesi için transpozunu($\underline{P}_0^T$) yazarsak, Şekil 4.5 için

$$\underline{P}_0^T = [\overbrace{P_1 \quad P_2}^{\text{1. düğüm}} \quad \overbrace{P_3 \quad P_4}^{\text{2. düğüm}} \quad \overbrace{P_5 \quad P_6}^{\text{3. düğüm}}].$$ Şekil 4.3 e göre bilinen kuvvetler yerine konursa:

$$\underline{P}_0^T = [\overbrace{0 \quad -100}^{\text{1. düğüm}} \quad \underbrace{\overbrace{P_3 \quad P_4}^{\text{2. düğüm}} \quad \overbrace{P_5 \quad P_6}^{\text{3. düğüm}}}_{\text{Reaksiyonlar}}]$$ olur.

---

[1] Joint number, nodal number, vertex number
[2] Member number
[3] External loads, nodal loads, global loads, applied forces
[4] Support reactions, boundary forces
[5] Global displacements, system displacements
[6] Joint degree of freedom
[7] System degree of freedom
[8] Vector of external loads, vector of system loads

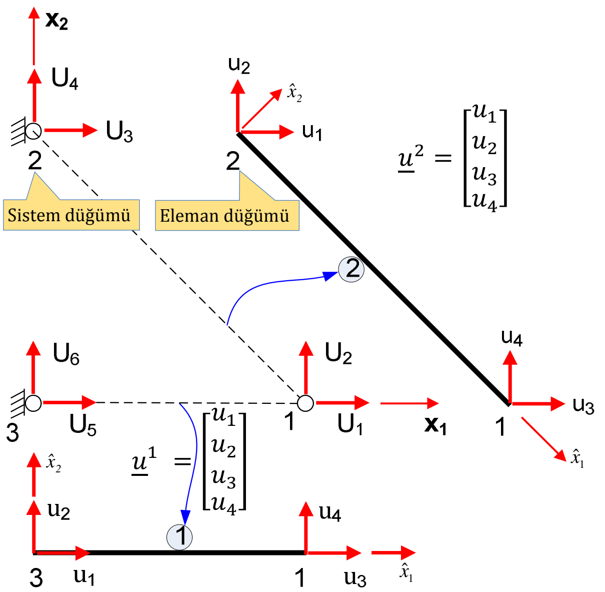
Sistem yer değiştirmeleri vektörü*[1]*: Sistemin düğümlerinde tanımlı yer değiştirmelerin bir araya toplanmasıyla oluşan vektördür. $\underline{U}$ ile gösterir ve yer işgal etmemesi için transpozunu($\underline{U}^T$) yazarsak, Şekil 4.6 için

$\underline{U}^T = [\overbrace{U_1 \quad U_2}^{\text{1. düğüm}} \quad \overbrace{U_3 \quad U_4}^{\text{2. düğüm}} \quad \overbrace{U_5 \quad U_6}^{\text{3. düğüm}}]$. Şekil 4.3 e göre bilinen mesnet yer değiştirmeleri yerine konursa:

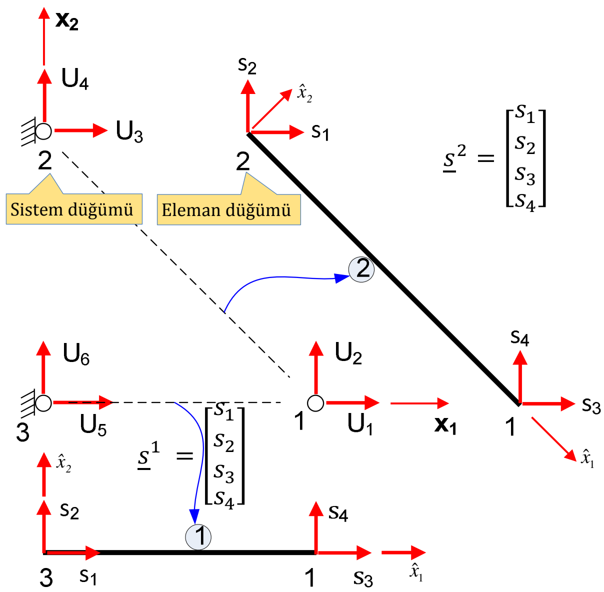
$$\underline{U}^T = [\overbrace{U_1 \quad U_2}^{\text{1. düğüm}} \quad \underbrace{\overbrace{0 \quad 0}^{\text{2. düğüm}} \quad \overbrace{0 \quad 0}^{\text{3. düğüm}}}_{\text{Serbest hareketi önlenmiş mesnetler}}]$$ olur.

***Eleman genel yer değiştirmeleri*[2]**: Elemanların düğümleri sistemin düğümlerine bağlıdır, sistem düğümü yer değiştirince eleman düğümü de aynı yer değiştirmeyi yapar. Şekil 4.7 de örnek problemin elemanlarının genel yer değiştirmeleri u_1, u_2, u_3, u_4 olarak gösterilmiştir. *Yerel koordinat sisteminin orijininin tanımlandığı noktadan başlanarak* adlandırma yapılır. Düğümde önce genel x_1 sonra x_2 yönündeki yer değiştirmeye ad verilir(anlaşılabilmesi için elemanlar sistem düğümlerinden ayrılarak çizilmiştir)

Eleman genel kuvvetleri*[3]*: Elemanın genel yer değiştirmelerine karşılık gelen kuvvetlerdir, şekil 4.8 de gösterilmiştir.



Şekil 4.7: Eleman genel yer değiştirmeleri



Şekil 4.8: Eleman genel kuvvetleri

Eleman genel yer değiştirme*[4] *ve kuvvet vektörü*[5]*: Eleman genel yer değiştirmelerinin ve kuvvetlerinin bir bir araya toplanmasıyla oluşan vektörlerdir. $\underline{u}^i$ ve $\underline{s}^i$ *i*. elemana ait olmak üzere, şekil 4.7 ve 4.8 de gösterilmişlerdir.

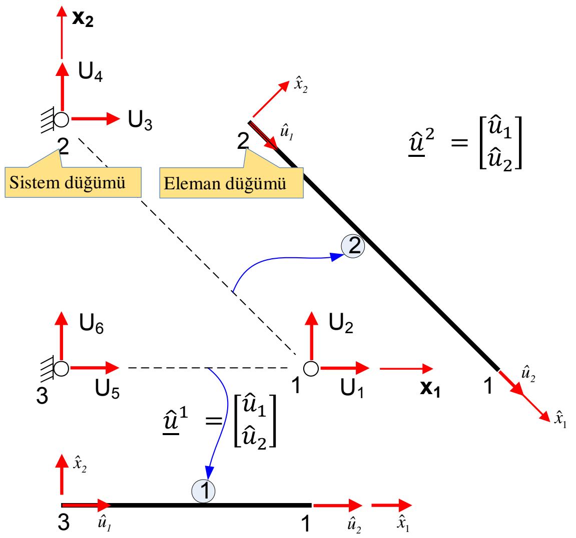
Eleman yerel yer değiştirmeleri*[6]*: Elemanın şekil değiştirmesi sonucu yerel eksenler doğrultusunda yer değiştirme veya eksenler etrafında dönme olur. Örneğimizdeki kafes çubuklar sadece ekseni boyunca şekil değiştirdiğinden düğümlerinde birer yerel yer değiştirme olur. Şekil 4.9 da bu yer değiştirmeler $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ olarak gösterilmiştir. Yerel koordinat sisteminin orijininin tanımlandığı noktadan başlanarak adlandırma yapılır.

Eleman yerel kuvvetleri*[7]*: Şekil değiştirmelerden dolayı eleman düğümlerinde oluşan yerel kuvvetlerdir. Örneğimizdeki kafes çubuklar sadece ekseni boyunca şekil değiştirdiğinden düğümlerinde birer yerel düğüm kuvveti olur. Şekil 4.10 da bu kuvvetler $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ olarak gösterilmiştir, $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ yer değiştirmelerine karşılık gelirler. Yerel koordinat sisteminin orijininin tanımlandığı noktadan başlanarak adlandırma yapılır.

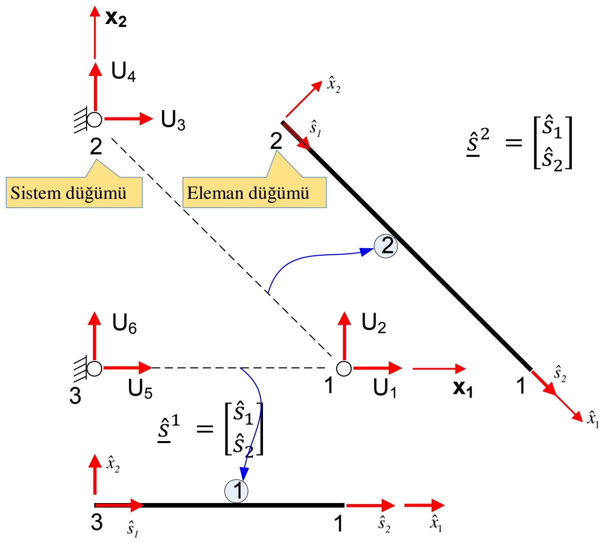
---

[1] Vector of system displacements, Vector of system global displacements,
[2] Member global displacements
[3] Member global internal forces
[4] Member global displacement vector
[5] Member global force vector
[6] Member local displacements
[7] Member local forces

Eleman yerel yer değiştirme ve yerel kuvvet vektörü*[1]*: Bu vektörler şekil 4.9 ve 4.10 da $\underline{\hat{u}}^i$ ve $\underline{\hat{s}}^i$ olarak gösterilmiştir.



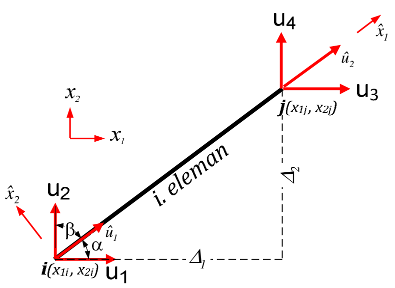
Şekil 4.9: Eleman yerel yer değiştirmeleri



Şekil 4.10: Eleman yerel iç kuvvetleri

4.2 Transformasyon matrisi[2]

Düzlem kafes elemanın transformasyon matrisi: Elemanın yerel yer değiştirmeleri genel yer değiştirmeleri nedeniyle oluşur, aralarında bağıntı vardır. Bu bağıntı bir kafes eleman ile örneklenecektir. Şekil 4.11 de bir düzlem kafes sitemin i ve j nolu noktaları arasında bağlı bulunan i. elemanın genel ve yerel yer değiştirmeleri gösterilmiştir.



Şekil 4.11: Düzlem kafes elemanın genel ve yerel yer değiştirmeleri

$i(x_{1i},\ x_{2i})$ ve $j(x_{1j},\ x_{2j})$ noktasının genel koordinatları sistemin geometrisinden bellidir. Δ_1, Δ_2, elemanın L boyu ve kosinus doğrultmanları hesaplanabilir:

$\Delta_1 = x_{1j} - x_{1i}$, $\quad \Delta_2 = x_{2j} - x_{2i}$

$L = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$, $Cos\ \alpha = \frac{\Delta_1}{L}$, $Cos\ \beta = \frac{\Delta_2}{L}$

u_1, u_2, u_3, u_4 genel yer değiştirmelerinden $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ yerel yer değiştirmeleri oluşur. $u_1, u_2, u_3\ u_4$ belli olunca $\hat{u}_1, \hat{u}_2$

$$\hat{u}_1 = u_1 Cos\ \alpha + u_2 Cos\ \beta = \frac{\Delta_1}{L}u_1 + \frac{\Delta_2}{L}u_2$$

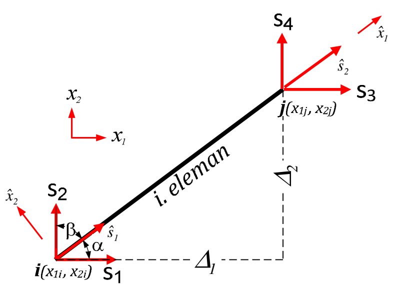
$$\hat{u}_2 = u_3 Cos\ \alpha + u_4 Cos\ \beta = \frac{\Delta_1}{L}u_3 + \frac{\Delta_2}{L}u_4$$

Düzlem kafes elemanın transformasyon matrisi

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^i} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & \Delta_2/L & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L\end{bmatrix}}_{\underline{T}^i} \underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}}_{\underline{u}^i} \qquad (4.1)$$

$$\underline{\hat{u}}^i = \underline{T}^i \underline{u}^i \qquad (4.1a)$$

Transformasyon matrisi elemanın genel yer değiştirmelerini yerel yer değiştirmelerine dönüştürür



Şekil 4.12: düzlem kafes elemanın genel ve yerel uç kuvvetleri

Şekil 4.12 de aynı elemanın yerel $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ ve $s_1, s_2, s_3\ s_4$ genel uç kuvvetleri görülmektedir. $s_1, s_2, s_3\ s_4$ ve $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$ arasında

$$\underbrace{\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\end{bmatrix}}_{\underline{s}^i} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & 0\\ \Delta_2/L & 0\\ 0 & \Delta_1/L\\ 0 & \Delta_2/L\end{bmatrix}}_{(\underline{T}^i)^T} \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{s}}^i}$$

(4.2)

$$\underline{s}^i = (\underline{T}^i)^T \underline{\hat{s}}^i \qquad (4.2a)$$

Transformasyon matrisinin transpozu elemanın yerel kuvvetlerini genel kuvvetlerine dönüştürür

[1] Vector of member local displacements, Vector of member local forces
[2] Transformation matrix

Transformasyon matrisi ortogonaldır, yani $\underline{T}^i(\underline{T}^i)^T = \underline{I}$ dir[1]. Şekil 4.12 de $L^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$ olduğu dikkate alınarak:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1/L & \Delta_2/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L \end{bmatrix}}_{\underline{T}^i} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1/L & 0 \\ \Delta_2/L & 0 \\ 0 & \Delta_1/L \\ 0 & \Delta_2/L \end{bmatrix}}_{(\underline{T}^i)^T} = \begin{bmatrix} (\Delta_1^2+\Delta_2^2)/L^2 & 0 \\ 0 & (\Delta_1^2+\Delta_2^2)/L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Transformasyon matrisinin bu özelliğinden yararlanarak 4.2 yi soldan $\underline{T}^i$ ile çarparsak

$$\underline{T}^i \underline{s}^i = \underbrace{\underline{T}^i(\underline{T}^i)^T}_{\textit{birim matris}} \; \underline{\hat{s}}^i = \underline{I}\,\underline{\hat{s}}^i$$

$$\underline{\hat{s}}^i = \underline{T}^i \underline{s}^i \qquad (4.3)$$

Transformasyon matrisi elemanın genel kuvvetlerini yerel kuvvetlerine dönüştürür

olduğu anlaşılır. $u_1, u_2, u_3\, u_4$ ve $\hat{u}_1,\ \hat{u}_2$ arasında da

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u \end{bmatrix}}_{\underline{u}^i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1/L & 0 \\ \Delta_2/L & 0 \\ 0 & \Delta_1/L \\ 0 & \Delta_2/L \end{bmatrix}}_{(\underline{T}^i)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^i}$$

Yerel büyüklük=$\underline{T}^i$ ·Genel büyüklük
Genel büyüklük=$(\underline{T}^i)^T$ ·Yerel büyüklük

$$\underline{u}^i = (\underline{T}^i)^T \underline{\hat{u}}^i \qquad (4.3a)$$

bağıntısı olduğu gösterilebilir.

4.1 de açık ifadesi verilen transformasyon matrisi sadece düzlem kafes eleman için geçerlidir. Eleman tipine bağlı olarak transformasyon matrisinin boyutu ve terimleri değişir. 4.1a, 4.2a, 4.3 ve 4.3a bağıntıları ise geneldir, her tür eleman tipi(kafes, kiriş, levha, plak,..) için geçerlidir.

Sayısal örnek: Şekil 4.13 deki elemanların transformasyon matrislerini belirleyiniz.

1 nolu elemanda:

Yerel orijin 3 noktasındadır ve *i=3, j=1* dir.
3 noktasının genel koordinatları (0,0), 1 noktasınınki (3,0).

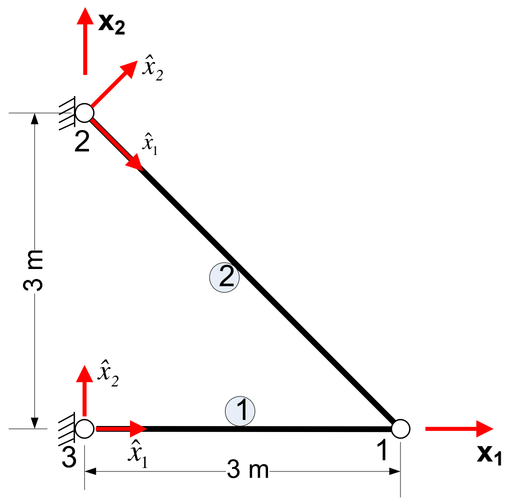
$\Delta_1 = 3 - 0 = 3\,m\,,\quad \Delta_2 = 0 - 0 = 0$

$L = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3\,m,\ \Delta_1/L = \frac{3}{3} = 1,\ \Delta_2/L = \frac{0}{3} = 0$

$$\underline{T}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\underline{T}^i)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 nolu elemanda:

Yerel orijin 2 noktasındadır ve *i=2, j=1* dir.
2 noktasının genel koordinatları (0,3), 1 noktasınınki (3,0).



Şekil 4.13: Düzlem kafes sistem

$\Delta_1 = 3 - 0 = 3\,m\,,\quad \Delta_2 = 0 - 3 = -3\,m$

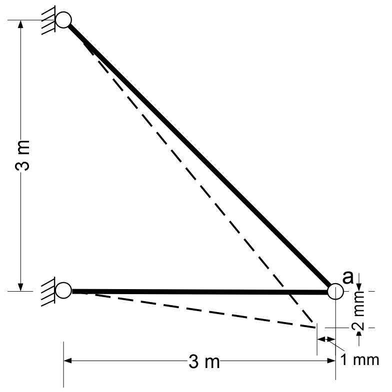
$L = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4.2426\,m$

$\Delta_1/L = \frac{3}{4.2426} = 0.7071,\ \ \Delta_2/L = \frac{-3}{4.2426} = -0.7071$

$$\underline{T}^2 = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}, \quad (\underline{T}^i)^T = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0 \\ 0 & 0.7071 \\ 0 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

[1] $\underline{T}^i(\underline{T}^i)^T = \underline{I}$, fakat $(\underline{T}^i)^T\underline{T}^i \neq \underline{I}$ dir.

Sayısal örnek: Sağdaki düzlem kafes sistemin a noktası 2 mm aşağı, 1 mm sola yer değiştirdiğinde çubuklarda oluşacak yerel yer değiştirmeleri bulunuz.



Sistemin numara ve eksenlerinin 4.13 deki gibi olduğunu varsayalım. 4.1 bağıntısı

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{u}}^i}=\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & \Delta_2/L & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}^i}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}^i}$$

her elemana uygulanarak yerel yer değiştirmeleri bulunur. Elemanların transformasyon matrisleri bir önceki örnekte hesaplanmıştı. 2 ve 3 noktalarında genel yer değiştirmeler sıfırdır(mesnet). 1 noktasında x_1 yönünde genel yer değiştirme -1, x_2 yönünde ise -2 dir(genel eksenlere ters yönde olduğundan eksi).

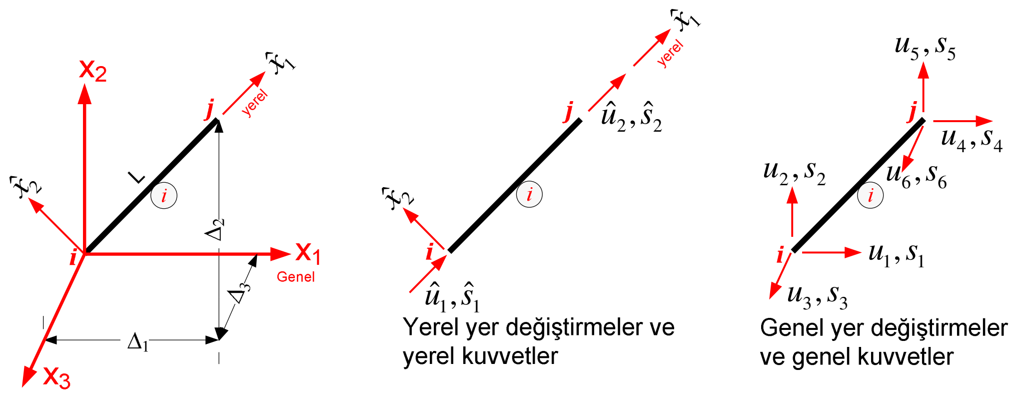
1 nolu elemanda:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{u}}^1}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}^1}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ -2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}^1}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{u}}^1}$$

2 nolu elemanda:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{u}}^2}=\underbrace{\begin{bmatrix}0.7071 & -0.7071 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}^2}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ -2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}^2}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0.7071\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{u}}^2}$$

Uzay kafes elemanın transformasyon matrisi: Şekil 4.14 de uzay kafes sistemin *i-j* noktasına bağlı *i.* elemanı görülmektedir. Anlaşılmasını kolaylaştırmak için genel koordinat sisteminin orijini elemanın *i* ucuna kaydırılmıştır. *i* ve *j* noktasının genel koordinatları $i(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ ve $j(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j})$ bilinmektedir.



Şekil 4.14: Uzay kafes eleman

Elemanın kosinüs doğrultmanları(çubuk $\hat{x}_1$ ekseni ile genel x_1, x_2, x_3 eksenleri arasındaki α, β, γ açılarının kosinüsleri) ve eleman boyu L koordinatlardan hesaplanır:

$$\Delta_1 = x_{1j} - x_{1i}\,,\quad \Delta_2 = x_{2j} - x_{2i}\,,\quad \Delta_3 = x_{3j} - x_{3j}$$

$$L=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}\,,\ Cos\,\alpha=\frac{\Delta_1}{L}\,, Cos\,\beta=\frac{\Delta_2}{L}\,, Cos\,\gamma=\frac{\Delta_3}{L}$$

4.1 ve 4.2 bağıntılarına benzeterek

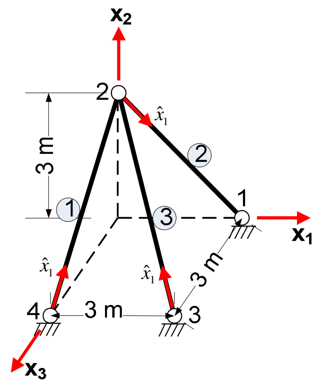
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{u}}^i}=\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta_1/L & \Delta_2/L & \Delta_3/L & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta_1/L & \Delta_2/L & \Delta_3/L\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}^i}}^{\text{Uzay kafes elemanın transformasyon matrisi}}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}^i} \qquad (4.4)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix}}_{\underline{s}^i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1/L & 0 \\ \Delta_2/L & 0 \\ \Delta_3/L & 0 \\ 0 & \Delta_1/L \\ 0 & \Delta_2/L \\ 0 & \Delta_3/L \end{bmatrix}}_{(\underline{T}^i)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{s}}^i} \qquad (4.5)$$

olur.

Sayısal örnek:

Şekil 4.15 deki elemanların yerel $\hat{x}_1$ eksenini dikkate alarak transformasyon matrislerini belirleyiniz.



Şekil 4.15: Uzay kafes sistem

1 nolu elemanda:

Yerel orijin 4 noktasındadır ve *i=4, j=2* dir.
4 noktasının genel koordinatları (0,0,3), 2 noktasınınki (0,3,0).

$\Delta_1 = 0 - 0 = 0\,m$, $\Delta_2 = 3 - 0 = 3\,m$, $\Delta_3 = 0 - 3 = -3\,m$

$L = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2} = 4.2426\,m$

$\Delta_1/L = \frac{0}{4.2426} = 0$, $\Delta_2/L = \frac{3}{4.2426} = 0.7071$, $\Delta_3/L = \frac{-3}{4.2426} = -0.7071$

$$\underline{T}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}, \quad (\underline{T}^i)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 \\ 0 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

2 nolu elemanda:

Yerel orijin 2 noktasındadır ve i=*2, j=1* dir.
2 noktasının genel koordinatları (0,3,0), 1 noktasınınki (3,0,0).

$\Delta_1 = 3 - 0 = 3\,m$, $\Delta_2 = 0 - 3 = -3\,m$, $\Delta_3 = 0 - 0 = 0\,m$

$L = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = 4.2426\,m$

$\Delta_1/L = \frac{3}{4.2426} = 0.7071$, $\Delta_2/L = \frac{-3}{4.2426} = -0.7071$, $\Delta_3/L = \frac{0}{4.2426} = 0$

$$\underline{T}^2 = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\underline{T}^i)^T = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 \\ 0 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

3 nolu elemanda:

Yerel orijin 3 noktasındadır ve *i=3, j=2* dir.
3 noktasının genel koordinatları (3,0,3), 2 noktasınınki (0,3,0).

$\Delta_1 = 0 - 3 = -3\,m$, $\Delta_2 = 3 - 0 = 3\,m$, $\Delta_3 = 0 - 3 = -3\,m$

$L = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + (-3)^2} = 5.1962\,m$

$\Delta_1/L = \frac{-3}{5.1962} = -0.5773$, $\Delta_2/L = \frac{3}{5.1962} = 0.5773$, $\Delta_3/L = \frac{-3}{5.1962} = -0.5773$

$$\underline{T}^3 = \begin{bmatrix} -0.5773 & 0.5773 & -0.5773 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5773 & 0.5773 & -0.5773 \end{bmatrix}, \quad (\underline{T}^i)^T = \begin{bmatrix} -0.5773 & 0 \\ 0.5773 & 0 \\ -0.5773 & 0 \\ 0 & -0.5773 \\ 0 & 0.5773 \\ 0 & -0.5773 \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek:

Şekil 4.15 deki sistemin 2 noktası x_2 doğrultusunda 1 mm çöktüğünde 3 nolu elemanın yerel yer değiştirmelerini bulunuz.

3 nolu eleman 3-2 düğümlerine bağlıdır, yerel orijin 3 noktasındadır. 3 noktasının genel yer değiştirmeleri sıfırdır(mesnet). 2 noktasının x_1 ve x_3 yer değiştirmeleri sıfır, x_2 yönü yer değiştirmesi -1 dir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^3}=\underbrace{\begin{bmatrix}\overbrace{-0.5773 & 0.5773 & -0.5773}^{3\text{ noktası}} & \overbrace{0 & 0 & 0}^{2\text{ noktası}}\\ 0 & 0 & 0 & -0.5773 & 0.5773 & -0.5773\end{bmatrix}}_{\underline{T}^3}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}}_{\underline{u}^3}\begin{array}{l}\\3\\ \\ \\2\\ \\ \end{array}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\-0.5773\\0\end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}^3}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}3\text{ noktası}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}2\text{ noktası}\end{array}$$