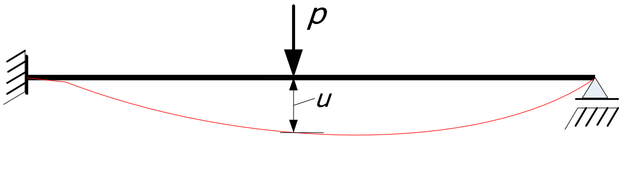
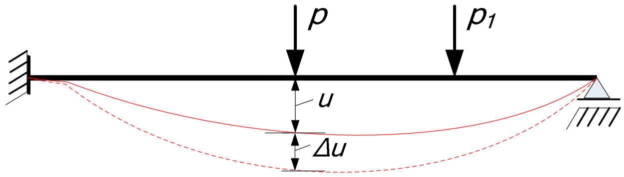
3. İş, toplam potansiyel, toplam potansiyelin minimum olma kuralı, RİTZ metodu

Tekil bir kuvvetin işi:

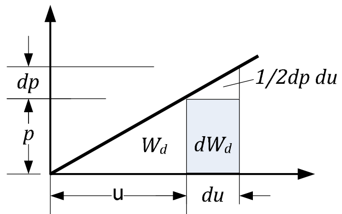
Tekil bir kuvvetin yaptığı iş, kuvvet ile yolun çarpımı olarak tanımlanır. Bir taşıyıcı sistem üzerindeki p kuvvetinin yaptığı iş, kuvvet ile kuvvet doğrultusundaki u yer değiştirmesinin çarpımıdır. Ancak, yer değiştirme p kuvveti nedeniyle veya başka bir kuvvet nedeniyle oluşmuş olabilir. Bu iki farklı durum için hesaplanan iş de farklı olur.



Şekil 3.1a



Şekil 3.1b



Şekil 3.2

Şekil 3.1a da görülen sistemde p kuvveti sıfırdan başlayarak dp kadar yavaş yavaş artırılarak nihai p değerine ulaştırılmıştır. Kuvvet dp kadar artınca yer değiştirme de du kadar artar. p ve u diyagramı şekil 3.2 deki gibi doğrusal olur. Yapılan toplam işi W_d ile gösterirsek, kuvvet ve yer değiştirme artınca yapılan iş de dW_d kadar artar. Bu artış:

$$dW_d = p\,du + \frac{1}{2}dpdu$$

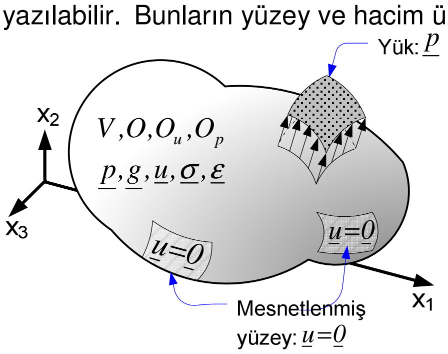
dp ve du çok küçük, $1/2dpdu$ değeri çok daha küçüktür, ihmal edilebilir

olur. Bu ifadenin integrali W_d toplam işini verir: $W_d = \int_0^u p\,du$. Ancak p kuvveti u dan bağımsız değildir. Şekil 3.2 den $Tan\,\alpha = p/u$=doğrunun eğimi sabittir, $p = Tan\,\alpha\,u$ olur. İntegralde yerine yazarak $W_d = Tan\,\alpha \int_0^u u\,du$ olur. İntegral alınırsa $W_d = ½\,Tan\,\alpha\,u^2 = ½Tan\,\alpha\,u\,u$ ve u lardan biri için $u = p/Tan\,\alpha$ yazılarak toplam iş $W_d = ½p\,u$ bulunur. Demek ki iş *u-p* doğrusunun altındaki üçgenin alanına eşittir.

Kuvvetin kendine yabancı bir yer değiştirme ile yaptığı iş, aralarında doğrusal bir ilişki olmadığından, kuvvet ile yer değiştirmenin çarpımına eşittir, yani ½ katsayısı yoktur. Örneğin, Şekil 3.1 deki sistemde p nihai değerine vardıktan sonra bir p_1 kuvveti eklersek p sabit kalırken yer değiştirme Δu kadar artar, şekil 3.1b. p nin yaptığı iş $W_d = ½p\,u + p\Delta u$ olur. İkinci terimde ½ katsayısı yoktur, çünkü p ve Δu birbirine yabancıdır.

Cismin dış kuvvetlerinin işi: W_d

Op yüklenebilir yüzeyinde yayılı $\underline{p}^T = [p_1\ p_2\ p_3]$ ve hacimde $\underline{g}^T = [g_1\ g_2\ g_3]$ yayılı yükleri olsun. Yayılı yük, tekil yüklerin yan yana gelmesi ile oluştuğu için, $d\underline{u}$ artışına karşılık gelen dW_d iş artışı benzetme ile yazılabilir. $\underline{p}$ nin bir lifinin $d\underline{u}^T = [du_1\ du_2\ du_3]$ ile yaptığı iş $p_1du_1 + p_2du_2 + p_3du_3$ olacaktır(karşılıklı bileşenlerin yaptığı işin toplamı). Matris notasyonunda bu ifade $\underline{p}^T d\underline{u}$ olur. $\underline{g}$ nin bir lifinin işi için de $\underline{g}^T d\underline{u}$ yazılabilir. Bunların yüzey ve hacim üzerinden alınan integrallerinin toplamı dW_d iş artışını verir:



$$dW_d = \int_{O_p} \underline{p}^T\,d\underline{u}dO + \int_V \underline{g}^T\,d\underline{u}dV \qquad (3.1)$$

Burada $\int_{O_p}$ işareti yüklenebilir O_p yüzeyi üzerinden iki katlı alan integral, $\int_V$ işareti *V* hacmi üzerinden üç katlı integral anlamındadır. $d\underline{u}$ ile $\underline{p}$ ve $\underline{g}$ arasında doğrusal bir bağıntı yoktur, yani kuvvetler ile $\underline{u}$ birbirine yabancıdır. Bu nedenle $d\underline{u}$ üzerinden integral alınarak dış kuvvetlerin toplam işi

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix},\ \underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix},\ \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},\ d\underline{u} = \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix}$$

$$W_d = \int_{O_p} \underline{p}^T\,\underline{u}dO + \int_V \underline{g}^T\,\underline{u}dV \qquad (3.2)$$

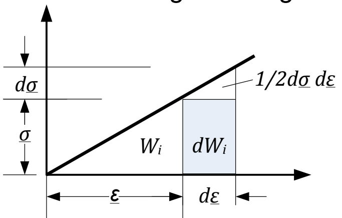
bulunur, ½ katsayısı yoktur.

W_d işi yüksüz sistemde sıfırdır. Kuvvet ve yer değiştirmenin yönlerine bağlı olarak pozitif veya negatif olur.

3. İş, toplam potansiyel, toplam potansiyelin minimum olma kuralı, RİTZ metodu

Cismin iç kuvvetlerinin işi: W_i

Yükler cismin birim hacminde tanımlı olan $\underline{\sigma}$ gerilmelerinin ve $\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirmelerinin oluşmasına neden olur. Malzemenin doğrusal elastik olduğu varsayıldığından HOOKE kanunu geçerlidir. Aralarında mukavemetten bilinen 2.15 doğrusal bağıntısı vardır: $\underline{\sigma} = \underline{E}\ \underline{\varepsilon}$ (şekil 3.3).



Şekil 3.3

$\underline{\sigma}$ ve $\underline{\varepsilon}$ birim hacimde iş yaparlar. Bu iş a_i ile gösterilsin. Gerilme $d\underline{\sigma}$ kadar değiştiğinde şekil değiştirme ve iş de $d\underline{\varepsilon}$ ve da_i kadar değişir: Şekil 3.3 den

$da_i = \underline{\sigma}^T\ d\underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} d\underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon}$ İkinci terim çok küçüktür, ihmal edilebilir

$da_i = \underline{\sigma}^T\ d\underline{\varepsilon}$. Birim hacimdeki toplam iş, integral alınarak $a_i = \int_0^{\varepsilon} \underline{\sigma}^T\ d\underline{\varepsilon}$ olur.

$\underline{E}$ simetrik olduğundan $\underline{\sigma}^T = (\underline{E}\ \underline{\varepsilon})^T = \underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T = \underline{\varepsilon}^T \underline{E}$ dir. Yerine konarak $a_i = \int_0^{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, d\underline{\varepsilon}$ yazılabilir. $\underline{E}$ sabit sayılardan oluşmaktadır. Bu integralın sonucu

$$a_i = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\ \underline{\varepsilon} \tag{3.3}$$

dır[1]. V hacmindeki iç kuvvetlerin toplam işi ise W_i ile gösterilsin. dV üzerinden integral alınarak W_i

$$W_i = \int_V a_i\ dV \tag{3.3a}$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\ \underline{\varepsilon}\ dV \tag{3.4}$$

bulunur. a_i daima pozitiftir. 2.15 ifadesindeki $\underline{E}$ matrisi 3.3 de yerine konarak

$$a_i = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\ \underline{\varepsilon} = \frac{E}{2(1+\upsilon)} [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) + \frac{\gamma}{1-2\gamma}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2\ ] \tag{3.4a}$$

$$W_i = \int_V \frac{E}{2(1+\gamma)} [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) + \frac{\gamma}{1-2\upsilon}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2\ ]\ dV \tag{3.4b}$$

olur. E>0, 0<γ<0.5 olduğundan yukarıdaki ifadenin incelenmesinden daima $a_i > 0$ olduğu anlaşılır. Netice olarak**: iç kuvvetlerin W_i işi de daima pozitif bir sayıdır.**

Yer değiştirmenin sanal işi[2]:

$\underline{p}, \underline{g}$ yükleri altında dengede olan bir sistem olsun. Sistem $\underline{u}$ yer değiştirmesi yapmış ve içte $\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}$ şekil değiştirmesi ve gerilme oluşmuştur. Bunlar arasında 2.5, 2.7, 2.12 ve 2.15 de verilen
$\underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{g} = \underline{0},\ \underline{n}^T \underline{\sigma} = \underline{p},\ \ \underline{\varepsilon} = \underline{D}\ \underline{u}\ ,\ \underline{\sigma} = \underline{E}\ \underline{\varepsilon}$ bağıntıları vardır.

Cisme sınır şartlarını sağlayan[3] ve $\delta\underline{u}$ ile gösterilen sanal bir yer değiştirme verdiğimizi düşünelim. $\delta\underline{u}$ sanal yer değiştirmesinden $\delta\underline{\varepsilon} = \underline{D}\ \delta\underline{u}$ sanal şekil değiştirmesi oluşacaktır. $\delta\underline{u}$ yükleri değiştirmez. Yükler değişmeyince $\underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{g} = \underline{0},\ \underline{n}^T \underline{\sigma} = \underline{p}$ bağıntıları hala geçerli olur, yani gerçek yüklere ait olan $\underline{\sigma}$ değişmez. $\underline{\sigma}$ değişmeyince $\underline{\sigma} = \underline{E}\ \underline{\varepsilon}$ bağıntısı da hala geçerlidir, $\underline{\varepsilon}$ da değişmez. Fakat; gerçek yükler $\delta\underline{u}$ ile, gerçek gerilmeler $\delta\underline{\varepsilon}$ ile sanal iş yapar. Bu sanal işleri δW_d ve δW_i ile gösterirsek

Sanal

$$\delta W_d = \int_{O_p} \underline{p}^T\ \delta\underline{u} do + \int_V\ \underline{g}^T\ \delta\underline{u} dV \tag{3.5}$$

Gerçek

Sanal

$$\delta W_i = \int_V\ \underline{\sigma}^T\ \delta\underline{\varepsilon} dV = \int_V\ \underline{\varepsilon}^T\ \underline{E}\ \delta\underline{\varepsilon} dV \tag{3.6}$$

Gerçek

olur. Cisim dengede olduğundan; cisme verilen δW_d sanal işi ile cisimde depolanan δW_i sanal işi birbirine eşittir:

$$\delta W_i = \delta W_d \tag{3.7}$$

[1] $a_i = \int_0^{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, d\underline{\varepsilon}$ integralini şu basit düşünce ile bulabiliriz. Önce integraldeki büyüklüklerin matris değil, basit değişken ve sabitler olduğunu varsayalım: ε değişken, E sabit. $a_i = \int_0^{\varepsilon} \varepsilon E\ d\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^2 E = \frac{1}{2}\varepsilon\ \varepsilon\ E$ olur. Matris karşılığını yazabilmek için: matris çarpım kuralına uymalıyız ve sonuç bir sayı etmeli. Bu da ancak $a_i = \frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T \underline{E} \underline{\varepsilon}$ şeklinde düzenlenirse gerçekleşir.

[2] Sanal iş=virtuel iş

[3] Sınır şartlarını sağlayan $\delta\underline{u}$ ne demek? Örnek: Sabit mesnetli noktada $\delta\underline{u} = \underline{0}$ olmalı. Buradaki $\delta\underline{u}$ diferansiyel anlamında değil, hayalı bir büyüklük anlamındadır.

$$\delta W_i - \delta W_d = \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \delta\underline{\varepsilon} dV - \int_{O_p} \underline{p}^T \delta\underline{u} do - \int_V \underline{g}^T \delta\underline{u} dV = 0 \tag{3.8}$$

olur.

Enerji ve potansiyel:

İş ve enerji aynı anlamdadır. Dış kuvvetlerin yaptığı iş tüketilen enerjidir. Bu enerji iç kuvvetlerin işine dönüşür. Dolayısıyla iç kuvvetlerin işi depolanmış enerjidir.

Enerjiye potansiyel de denilmektedir Π ile gösterilir. İç kuvvetlerin potansiyeli Π_i, 3.4 deki W_i işine eşittir:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \underline{\varepsilon}\ dV \tag{3.9}$$

Dış kuvvetlerin potansiyeli Π_d 3.2 deki W_d, işinin ters işaretlisine eşittir:

$$\Pi_d = -\int_{O_p} \underline{p}^T \underline{u} dO - \int_V \underline{g}^T \underline{u} dV \tag{3.10}$$

Buradaki eksi işaretinin anlamı tüketilen enerji anlamındadır.

Sistemin toplam potansiyeli Π:

İç ve dış kuvvetlerin potansiyellerinin toplamıdır:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_d = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \underline{\varepsilon}\ dV - \int_{O_p} \underline{p}^T \underline{u} dO - \int_V \underline{g}^T \underline{u} dV \tag{3.11}$$

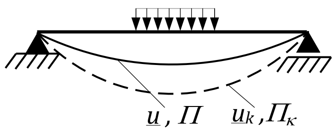
veya, $\underline{\sigma} = \underline{E}\ \underline{\varepsilon}$ olduğundan:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_d = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}\ dV - \int_{O_p} \underline{p}^T \underline{u} dO - \int_V \underline{g}^T \underline{u} dV \tag{3.11a}$$

Toplam potansiyelin minimum olama kuralı:

İspatı sonra verilmek üzere, bu kural şöyle tanımlanır: ***Sistemin sınır koşullarını sağlayan sonsuz $\underline{u}$ yer değiştirmelerinden sadece ve sadece denge konumuna ait olan toplam potansiyeli minimum yapar.***

Bunu şöyle de ifade edebiliriz: ***Dengede olan sistemin toplam potansiyeli minimumdur, denge konumuna ait $\underline{u}$ sistemin gerçek yer değiştirmesidir.***



Şekil 3.4

Şekil 3.4 deki $\underline{u}$ ve Π gerçek denge konumuna ait yer değiştirme ve toplam potansiyel $\underline{u}_k$ ve Π_k da komşu herhangi bir yer değiştirme ve buna ait toplam potansiyel olsun.

İSPAT: Komşu herhangi bir konumda $\underline{u}_k = \underline{u} + \delta\underline{u}$ ve $\underline{\varepsilon}_k = \underline{\varepsilon} + \delta\underline{\varepsilon}$ dır. 3.11 e göre Komşu konumun toplam potansiyeli

$$\Pi_k = \frac{1}{2}\int_V (\underline{\varepsilon} + \delta\underline{\varepsilon})^T \underline{E}\, (\underline{\varepsilon} + \delta\underline{\varepsilon})\ dV - \int_{O_p} \underline{p}^T (\underline{u} + \delta\underline{u})\ dO - \int_V \underline{g}^T (\underline{u} + \delta\underline{u}) dV$$

dır. Çarpımlar yapıldıktan sonra düzenlenirse

$$\Pi_k = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \underline{\varepsilon}\ dV - \int_{O_p} \underline{p}^T \underline{u} dO - \int_V \underline{g}^T \underline{u} dV$$

bu terim, 3.11 bağıntısına göre, Denge konumuna ait Π dir

$$+\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \delta\underline{\varepsilon}\ dV - \int_{O_p} \underline{p}^T \delta\underline{u} dO - \int_V \underline{g}^T \delta\underline{u} dV$$

bu terim, 3.5 ve 3.6 bağıntılarına göre, $\delta\underline{u}$ artımından oluşan potansiyeldir. 3.8 e göre sıfırdır

$$+\frac{1}{2}\int_V \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \delta\underline{\varepsilon}\ dV$$

bu terim daima pozitif bir sayıdır. Çünkü bir kare formdur. Bak: sayfa 20, dipnot 2

$\Pi_k = \Pi$ +pozitif bir sayı

olmaktadır. O halde: **Tüm komşu konumlara ait toplam potansiyel daima daha büyüktür, yani denge konumuna ait Π daima en küçüktür(minimumdur).**

3.11 de verilen Π toplam potansiyel ifadesinde elastik cismin tüm büyüklükleri vardır: yükler, yer değiştirme, şekil değiştirme, gerilme ve malzeme kanunu. Ayrıca Π bir sayıdır ve koordinat sisteminden bağımsızdır. Min Π yi elastik cismin denge koşulu olarak kullanmak büyük kolaylık sağlar. SEM teorisi toplam potansiyelin minimum olma kuralı ve RİTZ metodu üzerine kurulmuştur.

RİTZ metodu[1]:

RİTZ metodu Toplam potansiyelin minimum olma kuralına dayalı yaklaşık bir metottur. Sistemin geometrik sınır koşullarını(mesnet koşullarını)[2] sağlayan ve sürekli olan bir $\underline{u}$ yer değiştirme fonksiyonu *tahmin edilir*. Bu fonksiyonun başlangıçta bilinmeyen bazı parametreleri vardır. Seçilen fonksiyon Π toplam potansiyelinde yerine konur, Π yi minimum yapan parametreler hesaplanır. Hesaplanan parametreler seçilmiş $\underline{u}$ fonksiyonunda yerine konur. $\underline{u}$ toplam potansiyeli minimum yapan yer değiştirme olmuş olur. $\underline{\varepsilon} = \underline{D}\,\underline{u}$ süreklilik koşulundan şekil değiştirmeler, $\underline{\sigma} = \underline{E}\,\underline{\varepsilon}$ malzeme kanunundan da gerilmeler hesaplanır. Bu yolla belirlenen gerilmeler 2.5 ve 2.7 denge denklemlerini yaklaşık olarak sağlar.

$\underline{u}$ fonksiyonu bir polinom veya trigonometrik olabilir, basitliği nedeniyle genelde polinom tercih edilir. $\underline{u}$ nun her bileşeni için

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_1, x_2, x_3)a_i$$

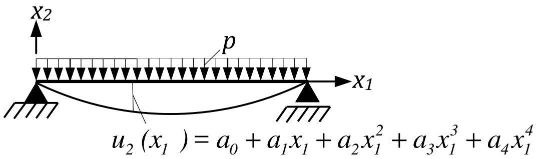
veya matris notasyonunda

$$\underline{u} = \Phi(\underline{x})\underline{a} \tag{3.12}$$

Seçilir. Örneğin bir kirişin u_2 düşey yer değiştirmesi($\underline{u}$ nun x_2 yönündeki bileşeni) için

$$u_2(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4$$

$$u_2(x_1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \end{bmatrix}}_{\Phi(\underline{x})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}}_{\underline{a}}$$



Seçilebilir[3]. Burada a_i değerleri henüz bilinmeyen sabitler(parametreler)dir.

2.12 ye göre 3.12 den şekil değiştirme:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D}\Phi(\underline{x})\underline{a} \tag{3.13}$$

$\underline{u}$ ve $\underline{\varepsilon}$ ifadeleri 3.11 de yerine yazılarak

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \underline{a}^T\ \underline{\Phi}^T\underline{D}^T\underline{E}\ \underline{D}\ \underline{\Phi}\ \underline{a}\ dV - \int_{O_p} \underline{p}^T\ \underline{\Phi}\ \underline{a}\ dO - \int_V \underline{g}^T\ \underline{\Phi}\ \underline{a}\ dV \tag{3.14}$$

Bulunan toplam potansiyel, belirli integraller alındıktan sonra, sadece $\underline{a}$ nın fonksiyonu olur. Sistemin denge konumunda Π minimumdur. Minimum olma koşulu[4]

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\underline{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Pi}{\partial a_0} \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_n} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \text{veya açık olarak:} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial\Pi}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_n} = 0 \end{array} \tag{3.15}$$

.
.
türevleri yazılarak; bilinmeyenleri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ olan doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden hesaplanan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 3.12 de yerine konarak sistemin denge konumuna ait $\underline{u}$ yer değiştirme, $\underline{\varepsilon} = \underline{D}\,\underline{u}$ şekil değiştirme ve $\underline{\sigma} = \underline{E}\,\underline{\varepsilon}$ gerilme fonksiyonları bulunur.

---

[1] Walter Ritz (1909) "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik" *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. **135.** http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=261182

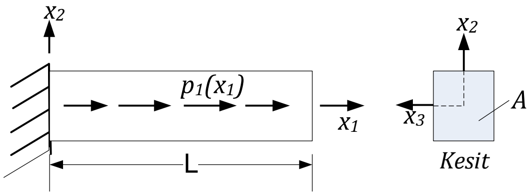
[2] RİTZ metodu bir yer değiştirme metodu olduğundan sadece yer değiştirme ile ilgili koşullar kullanılır, kuvvetler ile ilgili sınır koşulları kullanılamaz. Örneğin sabit bir mesnette çökme sıfır koşulu kullanılır fakat moment sıfır koşulu kullanılamaz. Çünkü moment=0 bir yer değiştirme koşulu değil, bir kuvvet koşuludur.

[3] Mukavemet derslerinden elastik eğri denkleminin $-EIu_2^{iv} = p$ olduğu bilinmektedir. 4 kez integral alınırsa u_2 nin 4. derece polinom olduğu anlaşılır.

[4] Bir fonksiyonun bir noktada minimum olma koşulu o noktada birinci türevinin sıfır, ikinci türevinin pozitif olmasıdır. Denge konumunda Π nin daima bir minimum olduğu daha önce gösterilmişti, dolayısıyla minimum koşulu $\partial\Pi/\underline{a} = \underline{0}$ dır, ikinci türeve bakmaya gerek yoktur.

Teorik ve sayısal uygulamalar:

Örnek 3.1: Sağda görülen *sabit kesitli* çubuğun ekseni boyunca $p_1(x_1)$ çizgisel yükü etkimektedir. E elastisite modülü, A kesit alanı ve L bilinmektedir. $\underline{g} = \underline{0}$, $\upsilon = 0$ alarak(kendi yükünü ve Poisson etkisini ihmal ederek) çubuğun toplam potansiyel ifadesini yazınız.



$dO=1{\cdot}dx_1$ (çizgisel yük)

$dV=A\,dx_1$

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{g} = \underline{0}$$

$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{11}$ (diğerleri=0)

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1} = u_1'(x_1)$$

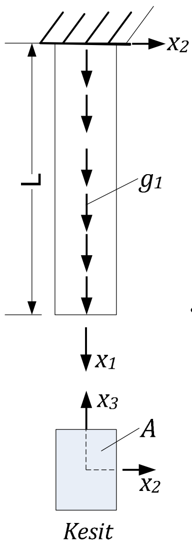
$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \underline{\varepsilon}\; dV - \int_{O_p} \underline{p}^T \underline{u} dO - \int_V \underline{g}^T \underline{u} dV$$ Bak: 3.11

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \varepsilon_{11}\, E\, \varepsilon_{11} A dx_1 - \int_0^L [p_1(x_1) \;\; 0 \;\; 0] \begin{bmatrix} u_1(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot dx_1$$

$$\Pi = \frac{EA}{2}\int_0^L \varepsilon_{11}^2\, dx_1 - \int_0^L p_1(x_1)\; u_1(x_1)\, dx_1$$

$$\Pi = \frac{EA}{2}\int_0^L [u_1'(x_1)]^2\, dx_1 - \int_0^L p_1(x_1)\; u_1(x_1)\, dx_1 \qquad (3.16)$$

Örnek 3.2: Sağda görülen çelik çubuk kendi ağırlığı altındadır. alt ucundaki yer değiştirmesini RİTZ metodu ile hesaplayınız. Eksen yönündeki $u_1(x_1)$ yer değiştirmesinin fonksiyonunu doğrusal varsayınız.



L=20 m

$E=2.1{\cdot}10^{11}\ N/m^2$

$\upsilon = 0$(poisson etkisi ihmal)

$\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$ (malzemenin birim kütlesi)

$g=10\ \frac{m}{s^2}$ (yer çekimi ivmesi)

$\underline{p} = \underline{0}$ (yüzeysel kuvvet)

$g_1=\rho g$ (Birim hacim kuvveti)

$dV=A\,dx_1$

Yer değiştirme fonksiyonu: $u_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1$.

$u_1(x_1)$ sistemin sınır koşullarını sağlamalıdır:
$x_1 = 0$ da $u_1(0) = 0$ olmalı $\rightarrow$ $a_0 = 0$.

Sınır şartlarını sağlayan fonksiyon: $u_1(x_1) = a_1 x_1$.

$$\Pi = \frac{EA}{2}\int_0^L [u_1'(x_1)]^2\, dx_1 - \int_0^L g_1\; u_1(x_1)\; A dx_1$$ Bak: 3.16

$u_1'(x_1) = a_1, \qquad [u_1'(x_1)]^2 = a_1^2$

$$\Pi = \frac{EA}{2}\int_0^L a_1^2\, dx_1 - \int_0^L \rho g\;\; a_1 x_1 A dx_1$$

$$\Pi = \frac{EA}{2}\int_0^L a_1^2\, dx_1 - \rho g A \int_0^L a_1 x_1\, dx_1$$

$$\Pi = \frac{EA}{2}\left| a_1^2\, x_1 \right|_0^L - \rho g A \left|\frac{1}{2} a_1 x_1^2\right|_0^L$$

$$\Pi = \frac{EA}{2} a_1^2\, L - \frac{1}{2}\rho g A a_1 L^2$$

Π nin minimum olma koşulu:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0:\; EALa_1 - \frac{1}{2}\rho g A L = 0 \rightarrow a_1 = \frac{\rho g}{2E} L$$

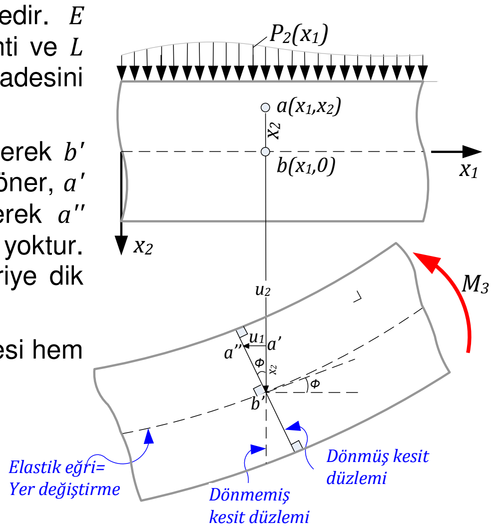
Yer değiştirme fonksiyonu:

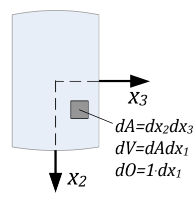
$$u_1(x_1) = \frac{\rho g}{2E} L x_1$$

Çubuğun alt ucunun yer değiştirmesi: $x_1 = 20\, m$

$$u_1(20) = \frac{7800 \cdot 10}{2 \cdot 2.1 \cdot 10^{11}} 20 \cdot 20 = 7.4 \cdot 10^{-5}\, m = \;0.074\, mm$$

Örnek 3.3: Sağda görülen *sabit kesitli* çubuğun(kirişin) ekseni boyunca $p_2(x_1)$ çizgisel yükü etkimektedir. E elastisite modülü, A kesit alanı, I_3 atalet momenti ve L bilinmektedir. Çubuğun toplam potansiyel ifadesini yazınız.





$\underline{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_2(x_1) \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1) \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{g} = \underline{0}$

Hacimsel yükün $p_2(x_1)$ yüzey yüküne katıldığı varsayıldı.

b noktası x_2 doğrultusunda u_2 kadar yer değiştirerek b' noktasına, a noktası da a' gider. Kesit $\emptyset$ kadar döner, a' noktası x_1 e ters yönde u_1 kadar yer değiştirerek a'' noktasına gider. x_3 yönünde yer değiştirme yoktur. Dönen kesit düzlem kalır, çarpılmaz, elastik eğriye dik kalır varsayılmaktadır (BERNOUILLI-NAVIER).

u_2 yer değiştirmesi sadece x_1 in, u_1 yer değiştirmesi hem x_1 in hem de x_2 nin fonksiyonudur.

b'a'a'' üçgeninden:

$$\emptyset \approx Tan\,\emptyset = \frac{-u_1}{x_2} = \frac{du_2}{dx_1} \;\rightarrow\; u_1 = -\frac{du_2}{dx_1}\, x_2$$

Küçük açının Tanjantı açıya eşit alınabilir

Elastik eğrinin türevi= eğim

Bak: 2.12

Sıfır olan şekil değiştirmeleri $\underline{\varepsilon}$ vektöründen çıkardık(işlemleri azaltmak için)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 \end{bmatrix}$$

BERNOULLI-NAVIER varsayımı nedeniyle $\varepsilon_{12} = 0$ ve şekil değiştirme vektörü ε_{11} şekil değiştirmesine eşit oldu.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{du_2}{dx_1} x_2 \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{du_2}{dx_1} x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2u_2}{dx_1^2} x_2 \\ -\frac{du_2}{dx_1} + \frac{du_2}{dx_1} \end{bmatrix} \rightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{d^2u_2}{dx_1^2} x_2,\;\; \varepsilon_{12} = 0 \rightarrow \underline{\varepsilon} = \varepsilon_{11}$$ (Bak dipnot[1])

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{E}\, \underline{\varepsilon}\; dV - \int_{O_p} \underline{p}^T \underline{u} dO - \int_V \underline{g}^T \underline{u} dV$$

Bak: 3.11. $\underline{g} = \underline{0}$ olduğundan son terim düşer.

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{11}\, E\, \varepsilon_{11} dV - \int_0^L [0 \;\; p_2 \;\; 0] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot dx_1$$

$$\Pi = \frac{E}{2}\int_0^L \underbrace{\int_A x_2^2 dA}_{I_3} [\frac{d^2u_2}{dx_1^2}]^2\, dx_1 - \int_0^L p_2 u_2\, dx_1$$

Atalet momenti=sabit

$u_2'' = \frac{d^2u_2}{dx_1^2}$ ile gösterilirse, toplam potansiyel

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\int_0^L [u_2''\,]^2\, dx_1 - \int_0^L p_2 u_2\, dx_1 \qquad (3.17)$$

u_2 ve p_2 x_1 in fonksiyonudur, basitleştirmek için yazılmamıştır

olur.

Şekil değiştirme: $\varepsilon_{11} = -u_2''\, x_2$ (3.18)

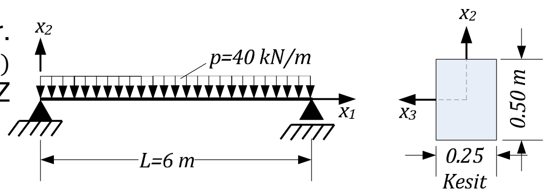
Gerilme: $\underline{\sigma} = \underline{E}\; \underline{\varepsilon} \rightarrow \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = -Eu_2''\, x_2$ (3.19)

Eğilme momenti: $M_3 = \int_A \sigma_{11} x_2 dA = -\int_A Eu_2'' x_2^2\, dA = -EI_3 u_2''$ (3.20)

Kesme: $V_2 = \frac{\partial M_3}{\partial \hat{x}_1}$ (3.21)

[1] Kesme(kayma) şekil değiştirmelerini dikkatte almayan kiriş teorisine EULER-BERNOULLI kirişi denir. Jacob BERNOULLI(Belçika asıllı İsviçreli, 1655-1705), Leonard EULER(Alman, 1707-1783) ve Daniel BERNOULLİ(Belçika asıllı İsviçreli, 1700-1782) tarafından 1750 li yıllarda geliştirilmiştir. Şekil değiştirmelerin küçük olduğu yüksek olmayan kirşlerde, ince plak ve kabuk problemlerinde kullanılır. Kesme şekil değiştirmelerini de dikkate alan kiriş teorisine ise Stephen TIMOSHENKO(Rus, 1878-1972) kirişi denir. Aralarındaki fark: EULER-BERNOULLI kirişinde dönmüş kesit elastik eğriye dik kalır, TIMOSHENKO kirişinde dik kalmaz.

Örnek 3.4: Sağda görülen çubukta(kiriş) E=30·10⁶ kN/m² dir. Düşey yer değiştirme fonksiyonunu $u_2(x_1) = a_0 Sin\,(\pi\, x_1/L)$ varsayarak açıklık ortasındaki çökmeyi ve momenti RİTZ metodu ile hesaplayınız, sonucu kesin çözüm ile karşılaştırınız.



Çözüm için örnek 3.3 de belirlenen

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\int_0^L [u_2'']^2\, dx_1 - \int_0^L p_2 u_2\, dx_1$$ Bak: 3.17

toplam potansiyeli minimum yapan a_0 parametresini belirlememiz gerekir. Verilen $u_2(x_1) = a_0 Sin\,(\pi\, x_1/L)$ fonksiyonu sistemin sınır koşullarını sağlamak zorundadır, kontrol edelim:

$x_1=0$ da $u_2(x_1) = 0$ olmalı(çökmeyen mesnet): $u_2(0) = a_0 Sin\left(\pi\frac{0}{L}\right) = a_0 Sin\,(0) = 0$ sağlıyor.

$x_1=L$ de $u_2(L) = 0$ olmalı(çökmeyen mesnet): $u_2(L) = a_0 Sin\left(\pi\frac{L}{L}\right) = a_0 Sin\,(\pi) = 0$ sağlıyor.

Π deki $[u_2'']^2$: $u_2' = a_0\frac{\pi}{L}Cos\left(\pi\frac{x_1}{L}\right)$, $u_2'' = -a_0\frac{\pi^2}{L^2}Sin\left(\pi\frac{x_1}{L}\right)$, $[u_2'']^2 = a_0{}^2\frac{\pi^4}{L^4}Sin^2\left(\pi\frac{x_1}{L}\right)$

Π deki $p_2 = -p$ (x_2 ile ters yönde) dir. Yerine yazalım:

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\int_0^L a_0{}^2\frac{\pi^4}{L^4}Sin^2\left(\pi\frac{x_1}{L}\right)dx_1 - \int_0^L (-p)\quad a_0 Sin\,(\pi\, x_1/L)\, dx_1$$

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}a_0{}^2\frac{\pi^4}{L^4}\int_0^L Sin^2\left(\pi\frac{x_1}{L}\right)dx_1 + pa_0\int_0^L Sin\,(\pi\, x_1/L)\, dx_1$$

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}a_0{}^2\frac{\pi^4}{L^4}\left|\frac{x_1}{2} - \frac{L}{4\pi}Sin\,(\frac{2\pi}{L}x_1)\right|_0^L + pa_0\left|\frac{L}{\pi}Cos\,(\frac{\pi}{L}x_1)\right|_0^L$$

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}a_0{}^2\frac{\pi^4}{L^4}\left[\frac{L}{2} - \frac{L}{4\pi}Sin\left(\frac{2\pi}{L}L\right)\right] + pa_0\frac{L}{\pi}(1 - Cos\,\pi)$$

$$\boldsymbol{\Pi = \frac{EI_3}{4}a_0{}^2\frac{\pi^4}{L^3} + 2pa_0\frac{L}{\pi}}$$ Sistemin toplam potansiyeli

Π nin minimum olma koşulu $\frac{d\Pi}{da_0} = 0$:

$\frac{d\Pi}{da_0} = 0$: $\frac{EI_3}{4}2a_0\frac{\pi^4}{L^3} + 2p\frac{L}{\pi} = 0 \rightarrow a_0 = -\frac{4pL^4}{\pi^5 EI_3}$ değeri Π yi minimum yapar. Yerine yazılarak bulunan

$$\boldsymbol{u_2(x_1) = -\frac{4pL^4}{\pi^5 EI_3}Sin\,(\pi\, x_1/L)}$$ Sistemin yer değiştirme fonksiyonu

yer değiştirme fonksiyonu sistemin denge konumuna aittir.

Açıklık ortasında, $x_1 = \frac{L}{2}$ de, yer değiştirme=çökme=δ:

$$\delta = -\frac{4pL^4}{\pi^5 EI_3}Sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{L}{L}\right) = -\frac{4pL^4}{\pi^5 EI_3} = -\frac{pL^4}{76.5EI_3}$$ Eksi işareti yer değiştirmenin x_2 nin ters yönünde olduğunu gösterir.

olur. Açıklık ortasında, $x_1 = \frac{L}{2}$ de moment M_3, 3.20 bağıntısından(veya mukavemet dersinden bilindiği gibi):

$-EI_3 u_2'' = M_3$ tür. $u_2'' = -a_0\frac{\pi^2}{L^2}Sin\left(\pi\frac{x_1}{L}\right)$ idi. $a_0 = -\frac{4pL^4}{\pi^5 EI_3}$ ve $x_1=L/2$ yerine konarak

$M_3 = \frac{4pL^2}{\pi^3} = \frac{pL^2}{7.75}$ bulunur.

Analitik karşılaştırma:

$\delta = -\frac{5pL^4}{384EI_3} = -\frac{pL^4}{76.8EI_3}$ (mukavemet), $\delta = -\frac{pL^4}{76.5EI_3}$ (RITZ) Hata: %0.4

$M_3 = \frac{pL^2}{8}$ (Mukavemet), $M_3 = \frac{pL^2}{7.75}$ (RITZ) Hata: %3

δ yer değiştirmesinde hemen hiç hata yok. M_3 momenti, kabul edilebilir düzeyde, hatalıdır. Yer değiştirme hatasız iken moment neden hatalıdır?

Bir büyüklük türev alınarak hesaplandığında sonuç, az da olsa, hatalı olur. Yüksek dereceden türev aldıkça hata artar.

SEM de önce yer değiştirme hesaplanır. Şekil değiştirme yer değiştirmenin türevi alınarak bulunur. Şekil değiştirme bir miktar hatalı olur. HOOKE kullanılarak şekil değiştirmeden bulunan gerilme de biraz hatalı olur.

Sayısal karşılaştırma:

$$I_3 = \frac{0.25 \cdot 0.5^3}{12} = 2.6 \cdot 10^{-3}\ m^4$$

$$\delta = -\frac{5}{384}\frac{40 \cdot 6^4}{30 \cdot 10^6 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3}} = -0.0087\ m = 8.7\ mm \text{ (mukavemet)}$$

$$\delta = -\frac{40 \cdot 6^4}{76.5 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3}} = -0.0087\ m = 8.7\ mm \text{ (RITZ)}$$

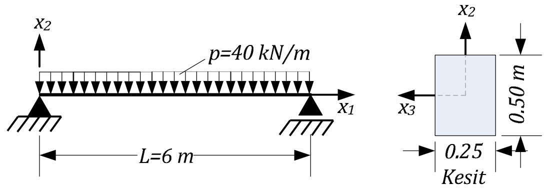
Hata: %0

$$M_3 = \frac{40 \cdot 6^2}{8} = 180.0\ kNm \text{ (mukavemet)}$$

$$M_3 = \frac{40 \cdot 6^2}{7.75} = 185.8\ kNm \text{ (RITZ)}$$

Hata: %3

Örnek 3.5: Sağda görülen çubukta(kiriş) E=30·10⁶ kN/m² dir. Düşey yer değiştirme fonksiyonunu $u_2(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3$ varsayarak açıklık ortasındaki çökmeyi ve momenti RITZ metodu ile hesaplayınız, sonucu kesin çözüm ile karşılaştırınız.



Kirişin toplam potansiyeli:

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\int_0^L [u_2'']^2\, dx_1 - \int_0^L p_2 u_2\, dx_1$$

Bak: 3.17

Sistemin sınır koşullarını sağlayan ve toplam potansiyeli minimum yapan a_i parametrelerini belirlememiz gerekir. Sınır koşulları:

x_1=0 da $u_2(x_1) = 0$ olmalı: $u_2(0) = 0 \rightarrow\ a_0 = 0$

x_1=L de $u_2(x_1) = 0$ olmalı: $u_2(L) = 0 \rightarrow a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = 0 \rightarrow a_1 = -a_2 L - a_3 L^2$

Yer değiştirme fonksiyonu: $\boldsymbol{u_2(x_1) = (-a_2 L - a_3 L^2) x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3}$ olur.

Sistemin sınır koşullarını sağlayan fonksiyon

Π deki $[u_2'']^2$: $u_2' = -a_2 L - a_3 L^2 + 2a_2 x_1 + 3a_3 x_1^2,\ u_2'' = 2a_2 + 6a_3 x_1,\quad [u_2'']^2 = 4a_2^2 + 24 a_2 a_3 x_1 + 36 a_3^2 x_1^2$

Π deki $p_2 = -p$ (x_2 ile ters yönde) dir. Yerine yazalım:

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\int_0^L (4a_2^2 + 24a_2 a_3 x_1 + 36 a_3^2 x_1^2)\, dx_1 - \int_0^L -p[(-a_2 L - a_3 L^2)x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3]\, dx_1$$

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\left|4a_2^2 x_1 + 12 a_2 a_3 x_1^2 + 12 a_3^2 x_1^3\right|_0^L + p\left|\frac{1}{2}(-a_2 L - a_3 L^2)x_1^2 + \frac{a_2}{3}x_1^3 + \frac{a_3}{4}x_1^4)\right|_0^L$$

$$\boldsymbol{\Pi = \frac{EI_3}{2}(4a_2^2 L + 12 a_2 a_3 L^2 + 12 a_3^2 L^3) - \frac{1}{6}a_2 L^3 p - \frac{1}{4}a_3 L^4 p}$$

Sistemin toplam potansiyeli

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = \frac{EI_3}{2}(8a_2 L + 12 a_3 L^2) - \frac{1}{6}L^3 p = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = \frac{EI_3}{2}(12 a_2 L^2 + 24 a_3 L^3) - \frac{1}{4}L^4 p = 0$$

Toplam potansiyelin minimum olma koşulları= İki bilinmeyenli 2 denklem

İki bilinmeyenli iki denklemi matris notasyonunda yazalım:

$$\begin{bmatrix} 8L & 12L^2 \\ 12L^2 & 24L^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{pL^3}{3EI_3} \\ \frac{pL^4}{2EI_3} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Çözüm} \rightarrow\ a_2 = \frac{pL^2}{24EI_3},\quad a_3 = 0$$

$u_2(x_1) = (-a_2 L - a_3 L^2)x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3$ fonksiyonunda yerine yazalım:

$$\boldsymbol{u_2(x_1) = -\frac{pL^2}{24EI_3}(Lx_1 - x_1^2)}$$

Sistemin yer değiştirme fonksiyonu

Açıklık ortasında, $x_1 = \frac{L}{2}$ de, yer değiştirme=çökme=δ:

$$\delta = u_2(L/2) = -\frac{pL^2}{24EI_3}\left(L\frac{L}{2} - L^2/4\right) = -\frac{pL^4}{96EI_3}$$

Eksi işareti yer değiştirmenin x_2 nin ters yönünde olduğunu gösterir.

olur. Açıklık ortasında, $x_1 = \frac{L}{2}$ de moment M_3:

$-EI_3 u_2'' = M_3$ tür. $u_2'' = -\frac{pL^2}{12EI_3}$

$M_3 = \frac{pL^2}{12}$ bulunur.

Analitik karşılaştırma:

$\delta = -\frac{5pL^4}{384EI_3} = -\frac{pL^4}{76.8EI_3}$ (mukavemet), $\delta = -\frac{pL^4}{96EI_3}$ (RITZ) *Hata: %20*

$M_3 = \frac{pL^2}{8}$ (mukavemet), $M_3 = \frac{pL^2}{12}$ (RITZ) *Hata: %33*

Sayısal karşılaştırma:

$$I_3 = \frac{0.25 \cdot 0.5^3}{12} = 2.6 \cdot 10^{-3}\, m^4$$

$$\delta = -\frac{5}{384}\frac{40 \cdot 6^4}{30 \cdot 10^6 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3}} = -0.0087\, m = 8.7\, mm \text{ (mukavemet)}$$

$$\delta = -\frac{40 \cdot 6^4}{96 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3}} = -0.0069\, m = 6.9\, mm \text{ (RITZ)}$$

Hata: %21

$$M_3 = \frac{40 \cdot 6^2}{8} = 180.0\, kNm \text{ (mukavemet)}$$

$$M_3 = \frac{40 \cdot 6^2}{12} = 120\, kNm \text{ (RITZ)}$$

Hata: %33

Hem δ yer değiştirmesinde hem de M_3 eğilme momentinde ağır hata vardır. Neden?

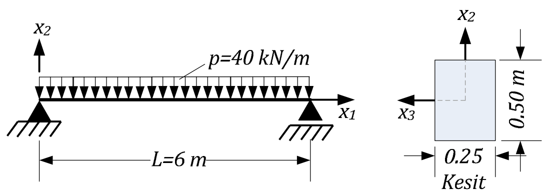
1)Bir büyüklük türev alınarak hesaplandığında sonuç, az da olsa, hatalı olur. Yüksek dereceden türev aldıkça hata artar.

2) Yer değiştirme fonksiyonu olarak seçilen polinomun derecesi yetersiz ise hata büyük olur.

SEMde önce yer değiştirme hesaplanır. Şekil değiştirme yer değiştirmenin türevi alınarak bulunur, dolayısıyla şekil değiştirme de, HOOKE kullanılarak şekil değiştirmeden bulunan gerilme de hatalı olur.

Hatanın azalması için yer değiştirmenin daha yüksek dereceli polinom olması gerekir.

Örnek 3.6: Sağda görülen çubukta(kiriş) $E=30 \cdot 10^6$ kN/m² dir. Düşey yer değiştirme fonksiyonunu $u_2(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4$ varsayarak açıklık ortasındaki çökmeyi ve momenti RITZ metodu ile hesaplayınız, sonucu kesin çözüm ile karşılaştırınız.



Kirişin toplam potansiyeli:

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\int_0^L [u_2'']^2\, dx_1 - \int_0^L p_2 u_2\, dx_1$$ Bak: 3.17

Sistemin sınır koşullarını sağlayan ve toplam potansiyeli minimum yapan a_i parametrelerini belirlememiz gerekir. Sınır koşulları:

$x_1=0$ da $u_2(x_1) = 0$ olmalı: $u_2(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$

$x_1=L$ de $u_2(x_1) = 0$ olmalı: $u_2(L) = 0 \rightarrow a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 + a_4L^4 = 0 \rightarrow a_1 = -a_2L - a_3L^2 - a_4L^3$

Yer değiştirme fonksiyonu: $\boldsymbol{u_2(x_1) = (-a_2L - a_3L^2 - a_4L^3)x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4}$ *Sistemin sınır koşullarını sağlayan fonksiyon*

Π deki $[u_2'']^2$: $u_2'' = 2a_2 + 6a_3x_1 + 12a_4x_1^2$, $\quad [u_2'']^2 = 4a_2^2 + 24a_2a_3x_1 + 36a_3^2x_1^2 + 48a_2a_4x_1^2 + 144a_3a_4x_1^3 + 144a_4^2x_1^4$

Π deki $p_2 = -p$ (x_2 ile ters yönde) dir. Yerine yazalım:

$$\Pi = \frac{EI_3}{2}\int_0^L (4a_2^2 + 24a_2a_3x_1 + 36a_3^2x_1^2 + 48a_2a_4x_1^2 + 144a_3a_4x_1^3 + 144a_4^2x_1^4)\, dx_1$$
$$+ p\int_0^L [(-a_2L - a_3L^2 - a_4L^3)x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4]\, dx_1$$

3. İş, toplam potansiyel, toplam potansiyelin minimum olma kuralı, RİTZ metodu

$$\boldsymbol{\Pi = \frac{EI_3}{2}\left(4a_2^2L + 12a_2a_3L^2 + 12a_3^2L^3 + 12a_2a_4L^3 + 36a_3a_4L^4 + \frac{144}{5}a_4^2L^5\right) - \frac{1}{6}a_2pL^3 - \frac{1}{4}a_3pL^4 - \frac{3}{10}a_4pL^5}$$

Sistemin toplam potansiyeli

Π nin minimum olma koşulları $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0: \; \frac{EI_3}{2}(8a_2L + 12a_3L^2 + 16a_4L^3) - \frac{L^3p}{6} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0: \; \frac{EI_3}{2}(12a_2L^2 + 24a_3L^3 + 36a_4L^4) - \frac{L^4p}{4} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_4} = 0: \; \frac{EI_3}{2}(16a_2L^3 + 36a_3L^4 + \frac{288}{5}a_4L^5) - \frac{3L^5p}{10} = 0$$

Toplam potansiyelin minimum olma koşulları= Üç bilinmeyenli 3 denklem

Üç bilinmeyenli üç denklemi matris notasyonunda yazalım:

$$\begin{bmatrix} 8L & 12L^2 & 16L^3 \\ 12L^2 & 24L^3 & 36L^4 \\ 16L^3 & 36L^4 & \frac{288}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{pL^3}{3EI_3} \\ \frac{pL^4}{2EI_3} \\ \frac{3L^5p}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Çözüm} \rightarrow \; a_2 = 0\,, \quad a_3 = \frac{Lp}{12EI_3}\,, \quad a_4 = -\frac{p}{24EI_3}$$

$u_2(x_1) = (-a_2L - a_3L^2 - a_4L^3)x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4$ fonksiyonunda yerine yazalım:

$$u_2(x_1) = -\frac{p}{12EI_3}\left(\frac{L^3x}{2} - Lx^3 + \frac{x^4}{2}\right)$$

Sistemin yer değiştirme fonksiyonu

Açıklık ortasında, $x_1 = \frac{L}{2}$ de, yer değiştirme=çökme=δ:

$$\delta = u_2(L/2) = -\frac{p}{12EI_3}\left(\frac{L^3}{2}\frac{L}{2} - L\frac{L^3}{8} + \frac{1}{2}\frac{L^4}{16}\right) = -\frac{5pL^4}{384EI_3}$$

Eksi işareti yer değiştirmenin x_2 nin ters yönünde olduğunu gösterir.

olur. Açıklık ortasında, $x_1 = \frac{L}{2}$ de moment M_3:

$-EI_3u_2'' = M_3$ tür. $u_2'' = \frac{p}{2EI_3}(-Lx_1 + x_1^2)$

$M_3 = \frac{pL^2}{8}$ bulunur.

Analitik karşılaştırma:

$\delta = -\frac{5pL^4}{384EI_3}$ (Mukavemet), $\delta = -\frac{5pL^4}{384EI_3}$ (RITZ) *Hata: % 0*

$M_3 = \frac{pL^2}{8}$ (Mukavemet), $M_3 = \frac{pL^2}{8}$ (RITZ) *Hata: % 0*

Sayısal karşılaştırma:

$$I_3 = \frac{0.25 \cdot 0.5^3}{12} = 2.6 \cdot 10^{-3}\, m^4$$

$\delta = -\frac{5}{384}\frac{40 \cdot 6^4}{30 \cdot 10^6 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3}} = -0.0087\, m = 8.7\, mm$ (Mukavemet)

$\delta = -\frac{5}{384}\frac{40 \cdot 6^4}{30 \cdot 10^6 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3}} = -0.0087\, m = 8.7\, mm$ (RITZ)

Hata: % 0

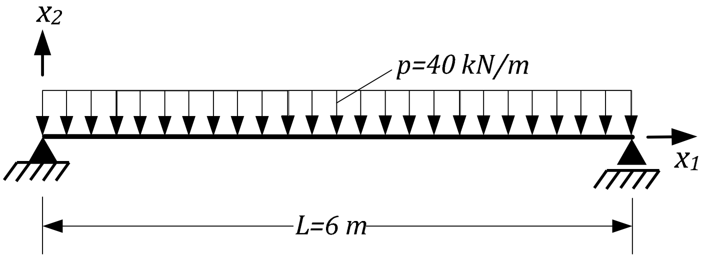
$M_3 = \frac{40 \cdot 6^2}{8} = 180.0\, kNm$ (Mukavemet)

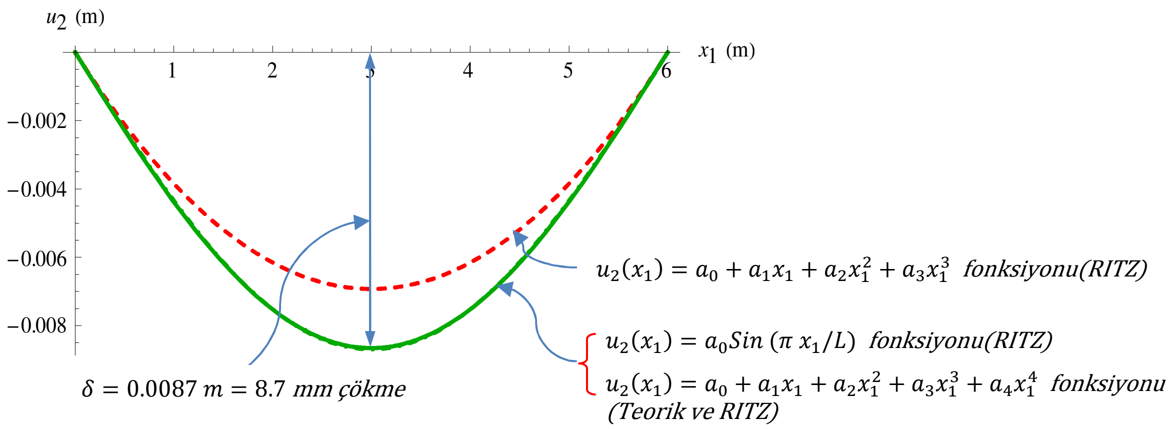
$M_3 = \frac{40 \cdot 6^2}{8} = 180.0\, kNm$ (RITZ)

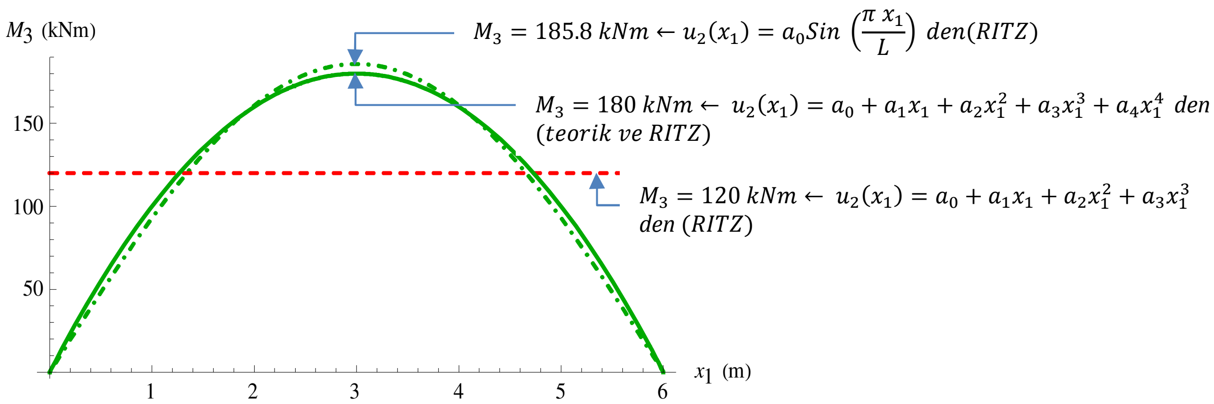
Hata: % 0

Grafiksel karşılaştırma:

3.4, 3.5 ve 3.6 örneklerinde bulunan sonuçların grafikleri karşılaştırmak amacıyla verilmiştir.







Yer değiştirme fonksiyonu 4. derece polinom seçildiğinde RITZ sonuçları teorik sonuçlar ile aynı olmuştur. Çünkü BERNOULLI kirişinin diferansiyel denklemi $-EIu_2^{iv} = p$ dir, 4 kez integral alınırsa u_2 4. derece bir polinom olur.

Tek parametreli $u_2(x_1) = a_0 Sin\left(\frac{\pi\, x_1}{L}\right)$ fonksiyonu da teorik sonuçlara çok yakın sonuç vermiştir.

Bunun anlamı şudur: Seçilen fonksiyonun tipi veya polinomun derecesi yeterliyse RITZ teorik çözüme çok yakın sonuç vermektedir.