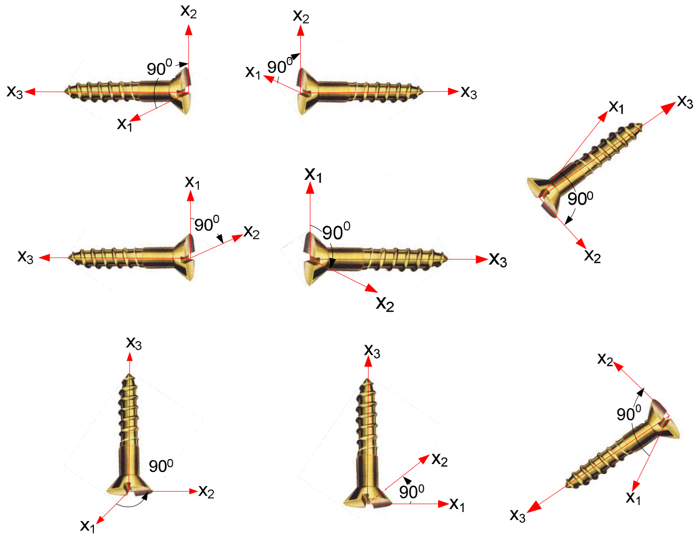
2. Notasyon, varsayımlar, tanımlar, temel bağıntılar

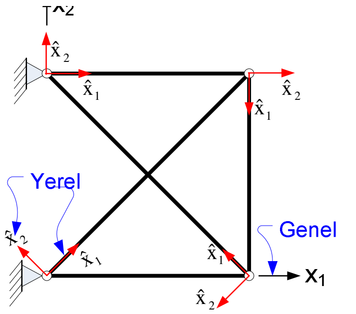
Matris ve skaler: Sonlu Elemanlar Metodu(SEM) matris notasyonunda[1] formüle edilir. Bu notlarda matrisler altı çizilerek skaler büyüklüklerden ayırt edilecektir. A veya a skaler bir büyüklük, $\underline{A}$ veya $\underline{a}$ bir matris anlamındadır. $\underline{I}$ birim matris, $\underline{0}$ sıfır matristir. $\underline{A}$ nın transpozu $\underline{A}^T$, tersi $\underline{A}^{-1}$ ile gösterilecektir.



Genel koordinat sistemi[1]: Kartezyen koordinat sistemi kullanılacaktır. Genel koordinat sisteminin eksenleri alışılagelmiş olan x, y, z yerine x_1, x_2, x_3 ile gösterilecek, bazen, her üç ekseni temsilen kısaca x_i kullanılacaktır (i=1, 2, 3).

Genel koordinat sistemi daima sağ sistem olacaktır. Sağ koordinat sistemi için sağda örnekler verilmiştir.

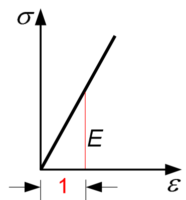
Sağ koordinat sisteminde; x_1, x_2 eksenleri bir vidanın başlığının düzleminde olmak üzere, x_1 ekseni x_2 eksenine doğru 90^0 döndürüldüğünde vida saplanma hareketi yapar. x_3 ekseni vidanın ucuna doğru yönlenmiştir.



Bir kafes sistemde sistem ve yerel eksen örneği. Sistem X_3 ve yerel $\hat{X}_3$ eksenleri kâğıt düzlemine dik ve size doğrudur.

Yerel koordinat sistemi[1]: $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ ile gösterilecek, bazen, her üç ekseni temsilen $\hat{x}_i$ kullanılacaktır (i=1, 2, 3). Yerel koordinat sistemi sağ sistem olacaktır.

Malzeme: Homojen, izotrop ve doğrusal elastiktir[3]. HOOKE kanunu geçerlidir.



Bir eksenli gerilme halinde doğrusal elastik malzeme davranışı örneği. HOOKE malzemesi: $\sigma = E\varepsilon$

Yükler: Statiktir. Yüklerin yavaş yavaş nihai değerine ulaştığı, titreşime neden olmadığı varsayılmaktadır.

Yer ve şekil değiştirmeler: küçüktür[4]. Bu varsayımın amacı denge denklemlerinin şekil değiştirmemiş geometri üzerinde kurulması, yer değiştirmeler ile şekil değiştirmeler arasında basit bağıntılar kurulmasıdır.

Çözüm(analiz) yöntemi: Yukarıda yapılan varsayımlar; bu ders notlarında verilen Sonlu Elemanlar Metodunun sadece statik analiz için geçerli olacağı anlamındadır. Doğrusal olmayan malzeme, doğrusal olmayan geometri, dinamik analiz ve stabilite analizi problemlerine doğrudan uygulanamaz.

[1] Matris işlemleri özet bilgileri için bak: EKLER

[2] Genel koordinat sistemi=Global koordinat sistemi, Yerel koordinat sistemi=Lokal koordinat sistemi

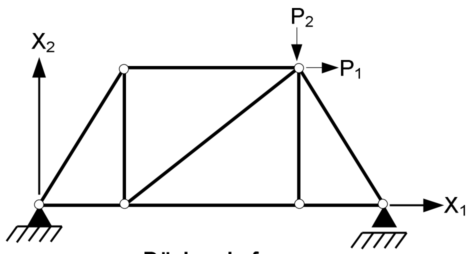
[3] Her noktası aynı maddeden oluşan malzeme homojendir. Elastisite modülü, Poisson oranı, yoğunluğu, ısı iletkenliği, dayanımı gibi mekanik özellikleri her doğrultuda aynı olan malzeme izotroptur. Doğrusal elastik malzemede gerilme artarken de, azalırken de şekil değiştirme orantılı olarak artar veya azalır. Gerilme artarken de, azalırken de gerilme şekil değiştirme grafiği aynı doğrudur. Gerilme sıfırlandığında şekil değiştirme de tamamen geri döner, kalıcı şekil değiştirme yoktur.

[4] Çelik ya da betonarme bir kiriş yük altında yer değiştirir(sehim yapar=sarkar). Sarkmayı göremiyorsak yer değiştirme küçüktür, milimetre mertebesindedir. İpte gezen bir cambaz yürüdükçe sarkmayı görürüz, yer değiştirme büyüktür, belki metre mertebesindedir.

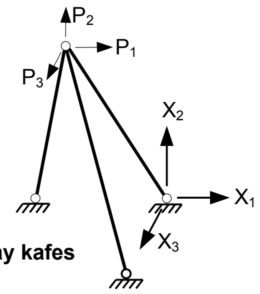
2.1 Taşıyıcı sistemler

Çubuk sistemler: Çubuk denilen(bir boyutu diğer iki boyutuna göre çok büyük olan) elemanların birleşiminden oluşan sistemlere çubuk sistemler denir. Kafes ve çerçeveler bu türden sistemlerdir.

Kafes sistemin çubuklarının(elemanlarının) mafsallı birleştirildiği, elemanların üzerinde yük olmadığı, dış yüklerin birleşim noktalarında(düğümlerde) etkidiği varsayılır. Bu varsayımlar sonucu elemanlarda sadece eksenel kuvvet oluşur, eğilme momenti, kesme ve burulma momenti sıfırdır. Kafes sistem genelde yapı çeliği ile, nadiren ahşap ile inşa edilir. Çatılarda, köprülerde ve sanayi yapılarında kullanılır.

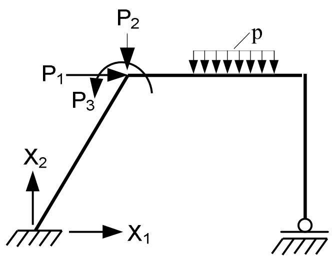


Düzlem kafes

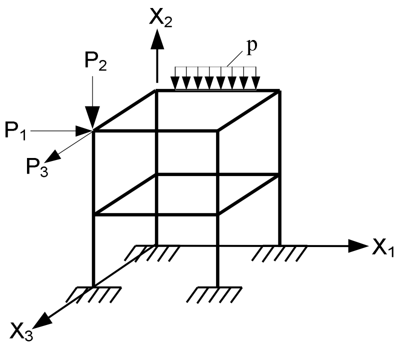


Uzay kafes

Çerçeve sistemin elamanları birbirine genelde rijit bağlıdır. Dış yükler eleman üzerinde ve düğümlerde etkiyebilir. Çerçeve elemanlarda eksenel kuvvet, kesme kuvveti, eğilme ve burulma momentleri gibi iç kuvvetler oluşur. Çerçeve sistem yapı çeliği ve yaygın olarak betonarme olarak inşa edilir. En yaygın kullanım alanı çok katlı yapı inşaatıdır.



Düzlem çerçeve

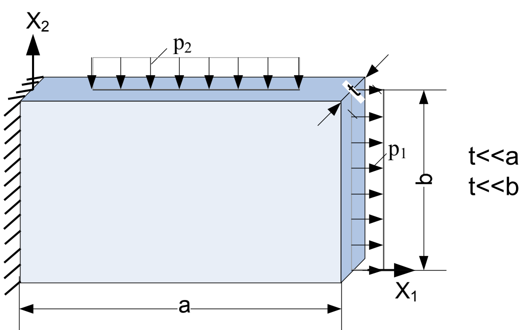


Uzay çerçeve

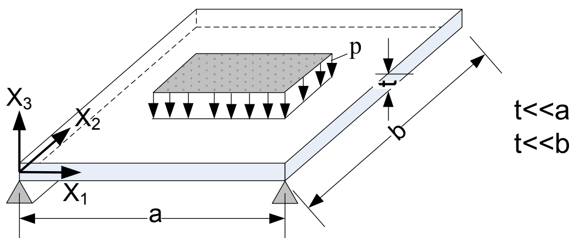
Yüzeysel taşıyıcılar: Kalınlığı az(5-30 cm civarı) olan düzlem veya eğrisel yüzeyli taşıyıcı sistemlerdir. Yüzeysel taşıyıcılara sürekli ortam da denir. Levha, plak ve kabuk bu türdendir.

Levha sistemde dış yük levha düzlemi içindedir, yüzeye dik etkiyen yük yoktur. Deprem perdesi, istinat(dayanma) duvarı, tünel, ağırlık barajı ve basınçlı boru problemleri levha problemine örnek olarak verilebilir.

Plak genelde çok katlı yapılarda döşeme olarak ve köprü tabliyesi olarak kullanılır. Dış yük plak düzlemine diktir.



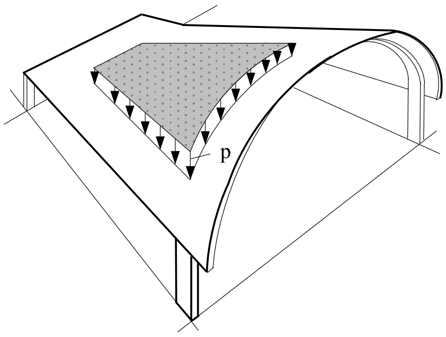
Levha



Plak(döşeme)

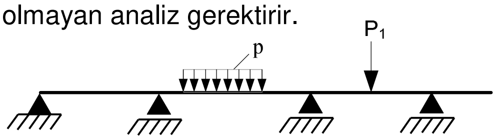
2. Notasyon, varsayımlar, tanımlar, temel bağıntılar

Kabuk kalınlığı az (≈10 cm), eğrisel yüzeyli taşıyıcıdır. Dış yükler genelde yüzeye yayılıdır. Kubbe, kemer baraj, yüksek sanayi bacası, soğutma kulesi ve tünel yapımında kullanılır.

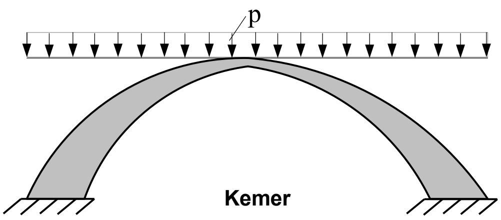


Kabuk

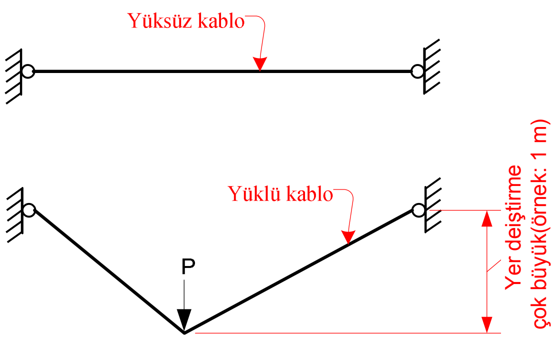
Diğer: Sürekli kiriş, kemer, kablolu taşıyıcı, basınçlı boru hattı(papeline), tünel, baraj, istinat duvarı gibi sistemlerden de bahsedilebilir. Kablolu sistem çok büyük yer değiştirir, dolayısıyla geometrik doğrusal olmayan analiz gerektirir.



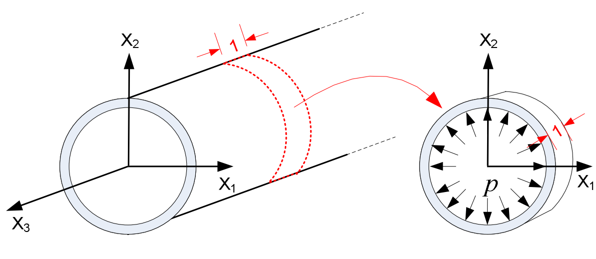
Sürekli kiriş



Kemer



Kablolu sistem



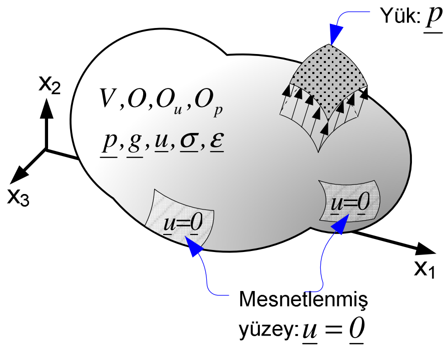
Basınçlı boru **Birim kalınlıkta dilim**

2.2 Elastik cismin[1] temel bağıntıları

Sağdaki elastik cisim yüzeyinin bazı noktalarından uzayda mesnetlenmiştir. Bu noktalar yer değiştiremez. V cismin toplam hacmi, O toplam yüzeyi, O_u mesnetlenmiş toplam yüzeyi, O_p yüklenebilir yüzeyi olsun. $\underline{p}$ yüklenebilir yüzeydeki yayılı yük, $\underline{g}$ hacimde yayılı yüktür(birim hacim ağırlık). Yükler; cismin yer ve şekil değiştirmesine ve gerilmelerin oluşmasına neden olur.

Bir noktanın yer değiştirmesi $\underline{u}$, gerilmeleri $\underline{\sigma}$ ve şekil değiştirmeleri $\underline{\varepsilon}$ vektörleri ile gösterilir. Matris notasyonunda

$$\underline{p}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix},\ \underline{g}=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix},\ \underline{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\ \underline{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\\sigma_{22}\\\sigma_{33}\\\sigma_{12}\\\sigma_{23}\\\sigma_{31}\end{bmatrix},\ \underline{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{33}\\\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{31}\end{bmatrix} \qquad (2.1)$$



dır. Burada $i=1, 2, 3$ olmak üzere:

p_i, g_i : yüklerin x_i ekseni yönündeki bileşenini

u_i : yer değiştirmenin x_i ekseni yönündeki bileşenini

σ_{ii} : normali x_i olan düzlemde ve x_i ekseni yönünde olan normal gerilmeyi

σ_{ij} : normali x_i olan düzlemde ve x_j ekseni yönünde olan kayma gerilmesini($i\neq j$)

ε_{ii} : normali x_i olan düzlemde ve x_i ekseni yönünde birim şekil değiştirmeyi

ε_{ij} : σ_{ij} kayma gerilmesinden oluşan kayma şekil değiştirmesini(açısal değişimi)[2]

göstermektedir. Bunlar, cismin her noktasında farklı değer alırlar, yani x_i koordinatlarının fonksiyonudurlar: $\underline{p}(x_1,x_2,x_3)$, $\underline{g}(x_1,x_2,x_3)$, $\underline{u}(x_1,x_2,x_3)$, $\underline{\sigma}(x_1,x_2,x_3)$, $\underline{\varepsilon}(x_1,x_2,x_3)$. Basitliği sağlamak için çoğu kez $\underline{p}$, $\underline{g}$, $\underline{u}$, $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$ şeklinde yazılmaktadır. Bu büyüklükler arasında, statik, mukavemet ve elastisite teorisinden bilinen, aşağıdaki bağıntılar vardır.

a) Denge denklemleri: $\underline{p}$, $\underline{g}$ yükleri ile $\underline{\sigma}$ gerilmeleri arasındaki diferansiyel(türevsel) bağıntıdır.

b) Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları: $\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirmeleri ile $\underline{u}$ yer değiştirmeleri arasındaki diferansiyel bağıntıdır. Geometrik uygunluk veya süreklilik koşulu da denir.

c) Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları: $\underline{\sigma}$ gerilmeleri ile $\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirmeleri arasında, deneysel olarak ortaya konmuş bağıntılardır. Bünye denklemleri, malzeme kanunu veya HOOKE kanunu da denilmektedir.

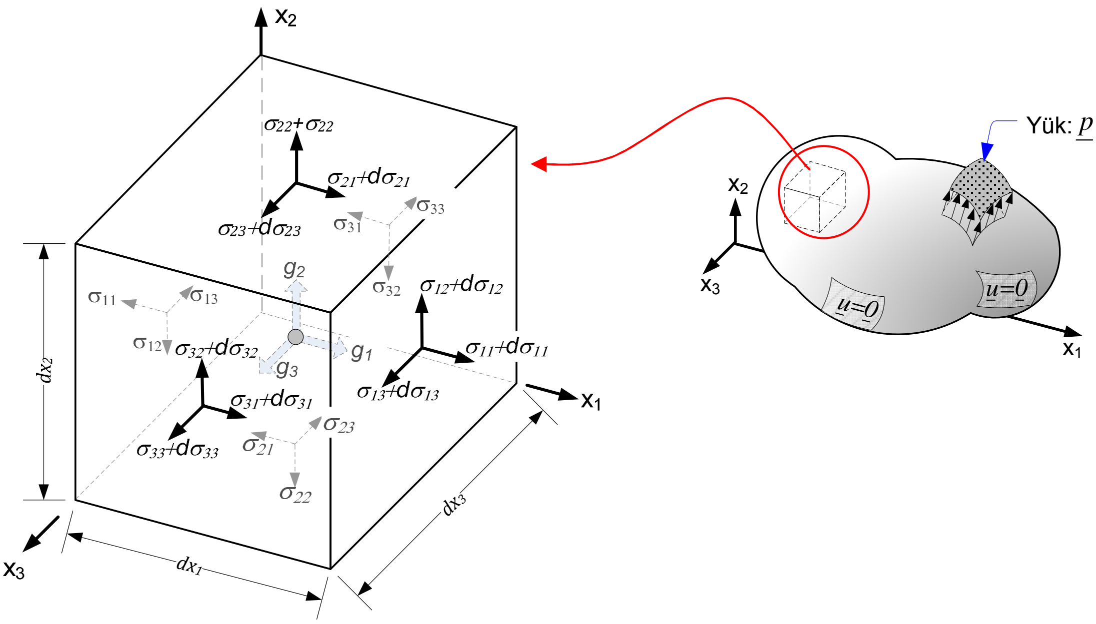
Uygulamada çözülmesi gereken en yaygın problem şudur: Geometrisi, malzemesi, mesnet koşulları ve $\underline{p}, \underline{g}$ yükleri bilinen elastik cismin $\underline{u}$ yer değiştirme, $\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirme ve $\underline{\sigma}$ gerilme vektörlerinin hesaplanması istenir. **Denge denklemleri, Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları, Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları** ve **cismin sınır koşulları** (mesnet koşulları) kullanılarak $\underline{u}$, $\underline{\varepsilon}$ ve $\underline{\sigma}$ hesaplanır.

[1] Cisim kelimesi herhangi bir taşıyıcı sistem anlamında kullanılan genel bir kavramdır. Cisim; herhangi bir malzemeden(ahşap, çelik, betonarme, …) yapılmış, düzlem veya uzay bir çubuk sistem(kafes, çerçeve), bir sürekli ortam(levha, plak, kabuk, …) olabilir.

[2] Klasik mukavemet derslerinde kayma gerilmeleri ve kayma gerilmelerinden oluşan şekil değiştirmeleri genellikle τ_{ij} ve γ_{ij} ile gösterilir. Buradaki gösterime göre $\sigma_{ij}=\tau_{ij}$ ve $\varepsilon_{ij}=\gamma_{ij}$ anlamındadır.

2.3 Denge denklemleri

Cismin içinde denge: $\underline{\sigma}$ gerilmeleri ile $\underline{g}$ yükü arasındaki bağıntılardır. Cismin içinden çıkartılan $dV=dx_1dx_2dx_3$ hacimli çok küçük bir parçaya etkiyen σ_{ij} gerilmeleri ve g_i hacimsel kuvveti(birim hacim ağırlık) aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Denge için, her eksen yönündeki kuvvetlerin toplamı ve her eksen etrafındaki momentlerin toplamı sıfır olmalıdır. Gerilmeler etkidikleri yüzey alanı ile çarpılarak eşdeğer kuvvete dönüştürülebilir. Mesela, sol yüzdeki σ_{11} gerilmesi kenarları dx_2 ve dx_3 olan yüzeye etkidiğinden bu yüzde x_1 doğrultusundaki eşdeğer kuvvet $\sigma_{11}dx_2dx_3$ olur.



Eksenler etrafındaki momentlerin toplamı: Her üç eksen etrafındaki moment toplamı mukavemetten çok iyi bilinen

$$\sigma_{12}=\sigma_{21},\quad \sigma_{23}=\sigma_{32},\quad \sigma_{31}=\sigma_{13} \tag{2.2}$$

bağıntılarını verir: **Birbirine dik yüzeylerdeki kayma gerilmeleri birbirine eşittir.**

x_1 yönündeki kuvvetlerin toplamı:

$$-\cancel{\sigma_{11}}dx_2dx_3+(\cancel{\sigma_{11}}+d\sigma_{11})dx_2dx_3-\cancel{\sigma_{21}}dx_1dx_3+(\cancel{\sigma_{21}}+d\sigma_{21})dx_1dx_3$$
$$-\cancel{\sigma_{31}}dx_1dx_2+(\cancel{\sigma_{31}}+d\sigma_{31})dx_1dx_2+g_1dx_1dx_2dx_3=0$$

dır. Üstü çizili terimler birbirini götürür:

$$d\sigma_{11}dx_2dx_3+d\sigma_{21}dx_1dx_3+d\sigma_{31}dx_1dx_2+g_1dx_1dx_2dx_3=0\,.$$

$d\sigma_{11}$, $d\sigma_{21}$ ve $d\sigma_{31}$ küçük artımları için Taylor'e göre

$$d\sigma_{11}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1,\quad d\sigma_{21}=\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2,\quad d\sigma_{31}=\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3$$

yazılabilir[1]:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 + g_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$dx_1 dx_2 dx_3$ e bölünür ve 2.2 bağıntısı dikkate alınırsa

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + g_1 = 0 \qquad (2.3)$$

x_1 yönünde denge denklemi

olur.

x_2 ve x_3 yönündeki kuvvetlerin toplamı:

Benzer yolla

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + g_2 = 0 \qquad (2.4)$$

x_2 yönünde denge denklemi

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + g_3 = 0$$

x_3 yönünde denge denklemi

bulunur. Bu üç denge denklemi 2.1 de tanımlı $\underline{\sigma}$ gerilme ve $\underline{g}$ yük vektörleri kullanılarak matris notasyonunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{D}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}}_{\underline{g}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{0}} \longrightarrow \underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{g} = \underline{0} \qquad (2.5)$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ türev operatörlerini içeren $\underline{D}$ matrisine diferansiyel veya kinematik operatör matrisi denir. $\underline{D}^T$ matrisi öyle düzenlenmiştir ki, 2.5 deki matris çarpımı yapıldığında denge denklemlerinin 2.3 ve 2.4 deki açık ifadeleri bulunur. $\sigma_{21} = \sigma_{12}$, $\sigma_{32} = \sigma_{23}$ ve $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ dir, bu nedenle $\underline{\sigma}$ vektörüne eklenmemişlerdir.

Uygulamada genellikle $\underline{g}$ hacimsel yükünün *eşdeğeri* cismin O_p yüzeyine aktarılır. Bu durumda

$$\underline{D}^T \underline{\sigma} = \underline{0}$$

Olur.

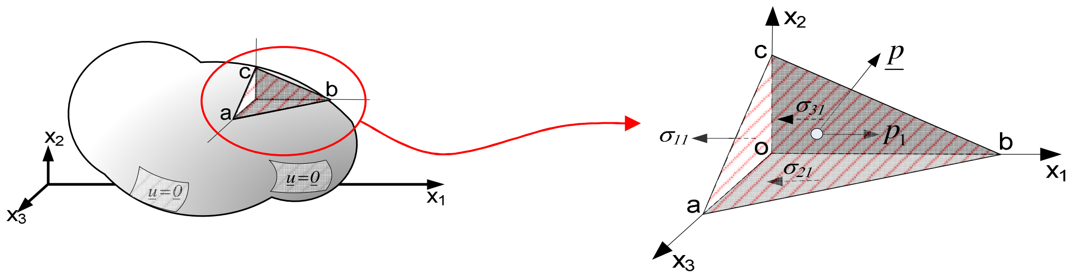
---

[1] Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x + dx$ noktasındaki değeri Brook **TAYLOR**(1685-1731, İngiliz) serisi ile

$f(x+dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{1!\,\partial x} dx + \frac{\partial^2 f(x)}{2!\,\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^3 f(x)}{3!\,\partial x^3} dx^3 + \ldots$ dir. dx küçük olmak kaydıyla dx^2 ve daha yüksek dereceden terimler, dx den çok daha küçük olacaklarından, ihmal edilebilirler: $f(x+dx) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$. Bundan şu anlaşılır: x küçük bir dx kadar artırılınca fonksiyonun değeri $\frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$ kadar artarak $f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$ olur.

O halde, benzeterek, $\sigma_{11} + d\sigma_{11} \approx \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dx$ olduğu, yani $d\sigma_{11} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dx$ alınabileceği anlaşılır.

Cismin yüzeyinde denge : $\underline{\sigma}$ gerilmeleri ile $\underline{p}$ yükü arasındaki bağıntılardır. Elastik cismin yüzeyini de içeren çok küçük üçgen piramit bir parça kesilip çıkartılarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



$\overset{\Delta}{abc}$ üçgen yüzeyi cismin $\underline{p}$ ile yüklü yüzeyi, $\overset{\Delta}{oac}$, $\overset{\Delta}{oab}$ ve $\overset{\Delta}{obc}$ yüzeyleri ise cismin içinde $\underline{\sigma}$ gerilmelerinin oluştuğu yüzeylerdir. Şekilde sadece x_1 ekseni yönünde etkiyen gerilmeler ve $\underline{p}$ yüzey yükünün x_1 yönündeki bileşeni gösterilmiştir. x_1 yönünde denge

$$\sigma_{11}\overset{\Delta}{oac}+\sigma_{21}\overset{\Delta}{oab}+\sigma_{31}\overset{\Delta}{obc}=p_1\overset{\Delta}{abc} \tag{2.6}$$

dir. abc yüzeyinin normalinin eksenlerle yaptığı açılar $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ olsun. Normalin Kosinüs doğrultmanları $n_1 = Cos\,\alpha_1,\ n_2 = Cos\,\alpha_2,\ n_3 = Cos\,\alpha_3$ gösterilsin. $\overset{\Delta}{oac}$, $\overset{\Delta}{oab}$ ve $\overset{\Delta}{obc}$ yüzeyleri $\overset{\Delta}{abc}$ yüzeyi cinsinden yazılabilir[1]:

$$\overset{\Delta}{oac}=\overset{\Delta}{abc}\,Cos\,\alpha_1=\overset{\Delta}{abc}\,n_1$$

$\overset{\Delta}{oac}$ yüzeyi , $\overset{\Delta}{abc}$ yüzeyinin normali x_1 olan x_2-x_3 düzlemindeki izdüşümüdür

$$\overset{\Delta}{oab}=\overset{\Delta}{abc}\,Cos\,\alpha_2=\overset{\Delta}{abc}\,n_2$$

$\overset{\Delta}{oab}$ yüzeyi, $\overset{\Delta}{abc}$ yüzeyinin normali x_2 olan x_1-x_3 düzlemindeki izdüşümüdür

$$\overset{\Delta}{obc}=\overset{\Delta}{abc}\,Cos\,\alpha_3=\overset{\Delta}{abc}\,n_3$$

$\overset{\Delta}{obc}$ yüzeyi, $\overset{\Delta}{abc}$ yüzeyinin normali x_3 olan x_1-x_2 düzlemindeki izdüşümüdür

Bunlar 2.6 da yerine yazılır,

$$\sigma_{11}\overset{\Delta}{abc}\,n_1+\sigma_{21}\overset{\Delta}{abc}\,n_2+\sigma_{31}\overset{\Delta}{abc}\,n_3=p_1\overset{\Delta}{abc}$$

$\overset{\Delta}{abc}$ kısaltılır ve $\sigma_{21}=\sigma_{12}\ ,\sigma_{31}=\sigma_{13}$ olduğu hatırlanırsa

$$\sigma_{11}\,n_1+\sigma_{12}\,n_2+\sigma_{13}\,n_3=p_1$$

x_1 yönünde denge denklemi

olur. Benzer yolla x_2 ve x_3 yönündeki denge yazılabilir:

$$\sigma_{21}\,n_1+\sigma_{22}\,n_2+\sigma_{23}\,n_3=p_2$$

x_2 yönünde denge denklemi

$$\sigma_{31}\,n_1+\sigma_{32}\,n_2+\sigma_{33}\,n_3=p_3$$

x_3 yönünde denge denklemi

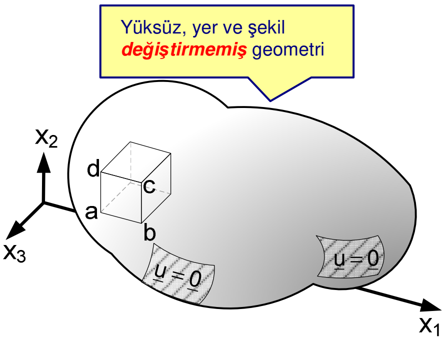
2.1 de tanımlı $\underline{\sigma}$ ve $\underline{g}$ vektörleri dikkate alınarak bu üç denge denklemi matris notasyonunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}}_{\underline{n}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}}=\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}_{\underline{p}} \longrightarrow \underline{n}^T\underline{\sigma}=\underline{p} \tag{2.7}$$

[1] Bir düzlemin bir başka düzlem üzerindeki izdüşümü düzlemin alanı ile düzlemlerin normalleri arasındaki açının kosinüsü ile çarpımıdır.

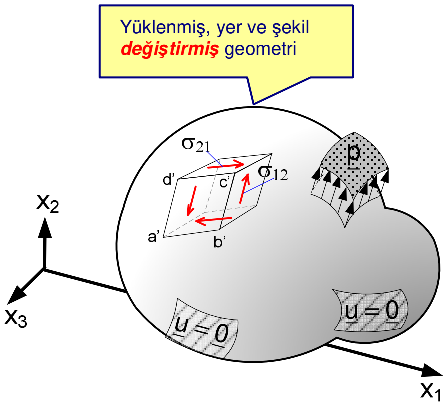
$n_i = Cos\ \alpha_i$ değerlerini içeren $\underline{n}^T$ matrisine yüzeyden alınan çok küçük parçanın denge matrisi denir. Yüklenebilir O_p yüzeyinin yük olmayan noktalarında $\underline{p} = \underline{0}$, O_u mesnet noktalarında $\underline{p} = \underline{r}$ reaksiyon kuvveti olacaktır. Burada $\underline{r}^T = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$ dir.

2.4 Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları



$\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirmeleri ile $\underline{u}$ yer değiştirmeleri arasındaki diferansiyel bağıntılardır. Geometrik uygunluk veya süreklilik koşulları da denir.

Yüksüz bir cisimde ne yer değiştirme ne de şekil değiştirme vardır. Yükler altındaki cismin noktaları yer değiştirir ve cisim şekil değiştirir. Cismin içindeki prizmatik bir cisimciğin kenarları normal gerilmelerin etkisiyle uzar veya kısalır. Kayma gerilmeleri de cisimciğin çarpılmasına, açılarının değişmesine neden olur.



Prizmatik cisimciğin yer ve şekil değiştirmemiş abcd yüzünün yer ve şekil değiştirmiş durumu a'b'c'd' dir. Her iki yüz büyütülerek sağ alttaki şekilde gösterilmiştir. dx_1 uzunluğundaki ab lifi a'b' olmuştur. ab nin birim boy değişimi

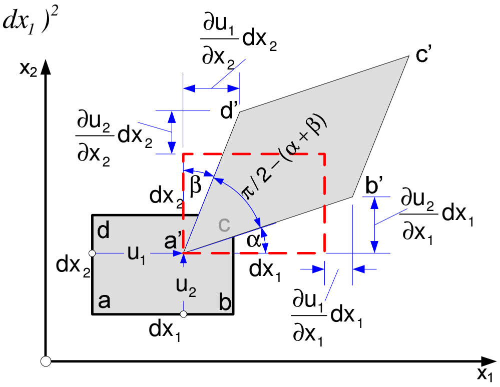
$$\varepsilon_{11} = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{a'b' - dx_1}{dx_1} \rightarrow a'b' = (1+\varepsilon_{11})dx_1$$

dir. Şekilden a'b' için

$$(a'b')^2 = (dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1)^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1)^2$$

$$(1+\varepsilon_{11})^2(dx_1)^2 = (dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1)^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1)^2$$

$$(1+2\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11}^2)(dx_1)^2 = (dx_1)^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(dx_1)^2 + (\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2(dx_1)^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2(dx_1)^2$$



Her iki taraf $(dx_1)^2$ terimine bölünürse:

$$2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}^2 = 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2$$

ε_{11} şekil değiştirmesi küçüktür, kareli terimler ihmal edilebilir:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad (2.8)$$

olur. x_2 ve x_2 yönündeki birim şekil değiştirmeler benzer yolla

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \text{ ve } \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad (2.9)$$

bulunabilir.

ε_{12} açısal şekil değiştirmesi, cismin $x_1 - x_2$ düzlemindeki açılarında olan değişim olarak tanımlanır. abcd düzlemi yer ve şekil değiştirerek a'b'c'd' düzlemi olmuştur. a noktasındaki dik açı ab kenarının α açısı kadar, ad kenarının da β açısı kadar dönmesi sonucu $\pi/2-(\alpha+\beta)$ olmuştur. Toplam açısal değişim

$$\varepsilon_{12} = \alpha + \beta$$

dır. α ve β küçük açılardır. Tanjantları kendilerine eşit alınabilir:

$$Tan\,\alpha \approx \alpha = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1}{dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1} = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1}{(1+\varepsilon_{11})dx_1} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$\varepsilon_{11} << 1$ dir, 1 in yanında ihmal edilebilir: $1+\varepsilon_{11} \approx 1$

$$Tan\,\beta \approx \beta = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2}{dx_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2} = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2}{(1+\varepsilon_{22})dx_2} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$\varepsilon_{22} << 1$ dir, 1 in yanında ihmal edilebilir: $1+\varepsilon_{12} \approx 1$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{2.10}$$

olur. Benzer yolla

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{2.11}$$

olduğu gösterilebilir. Bu bağıntılar mukavemetten çok iyi bilinmektedir. 2.8 den 2.11 e kadar olan bağıntılar bir araya toplanır ve matris notasyonunda yazılırsa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\\
\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\\
\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\
\varepsilon_{31} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}
\end{aligned}
\longrightarrow
\underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0\\
0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0\\
0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\
\dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0\\
0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\\
\dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_1}
\end{bmatrix}}_{\underline{D}}
\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}}_{\underline{u}}
\longrightarrow
\underline{\varepsilon} = \underline{D}\,\underline{u} \tag{2.12}$$

olur. $\underline{D}$ diferansiyel operatör matrisinin transpozu 2.5 de tanımlanmıştı. $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$ ve $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ dir. Bu nedenle, $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}$ şekil değiştirmeleri $\underline{\varepsilon}$ vektörüne eklenmemişlerdir. 2.12 bağıntısına süreklilik koşulu da denir.

2.5 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları

Gerilmeler ile şekil değiştirmeler veya şekil değiştirmeler ile gerilmeler arasındaki, deneysel olarak ortaya konmuş, bağıntılardır. Bünye denklemleri, malzeme kanunu veya HOOKE kanunu[1] da denilmektedir. İzotrop, doğrusal elastik malzeme ve küçük şekil değiştirmeler için aşağıda özetlenen bağıntılar mukavemetten bilinmektedir.

Şekil değiştirme- gerilme bağıntıları: $\underline{\varepsilon}$ ile $\underline{\sigma}$ arasındaki bağıntılardır:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22} - \upsilon\sigma_{33}) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \upsilon\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{33}) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \upsilon\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}) \\
\varepsilon_{12} &= \frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{12} \\
\varepsilon_{23} &= \frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{23} \\
\varepsilon_{31} &= \frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{31}
\end{aligned}
\;\Rightarrow\;
\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}}
= \underbrace{\frac{1}{E}\begin{bmatrix}
1 & -\upsilon & -\upsilon & 0 & 0 & 0 \\
-\upsilon & 1 & -\upsilon & 0 & 0 & 0 \\
-\upsilon & -\upsilon & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon)
\end{bmatrix}}_{\underline{G}}
\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}}
\;\Rightarrow\; \underline{\varepsilon} = \underline{G}\,\underline{\sigma} \qquad (2.13)
$$

Gerilme- şekil değiştirme bağıntıları: $\underline{\sigma}$ ile $\underline{\varepsilon}$ arasındaki bağıntılardır:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_{11} + \upsilon\varepsilon_{22} + \upsilon\varepsilon_{33}] \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_{22} + \upsilon\varepsilon_{11} + \upsilon\varepsilon_{33}] \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_{33} + \upsilon\varepsilon_{11} + \upsilon\varepsilon_{22}] \\
\sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\upsilon)}\varepsilon_{12} \\
\sigma_{23} &= \frac{E}{2(1+\upsilon)}\varepsilon_{23} \\
\sigma_{31} &= \frac{E}{2(1+\upsilon)}\varepsilon_{31}
\end{aligned}
\qquad (2.14)
$$

Matris notasyonunda

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}}
= \underbrace{\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix}
1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\
\upsilon & 1-\upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\
\upsilon & \upsilon & 1-\upsilon & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\upsilon)}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\upsilon)}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\upsilon)}{2}
\end{bmatrix}}_{\underline{E}}
\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}}
\;\Rightarrow\; \underline{\sigma} = \underline{E}\,\underline{\varepsilon} \qquad (2.15)
$$

[1] Robert **HOOKE** (1635-1703, İngiliz) tarafından bir eksenli gerilme durumu için 1660-1678 yıllarında ortaya konuldu. Leonhard **EULER** (1707-1783, İsviçreli), Thomas **YOUNG** (1773 –1829, İngiliz) , Giordano RICATTI (1782 civarı, İtalyan), Augustin-Louis **CAUCHY** (1789 – 1857, Fransız), Siméon Denis **POISSON** (1781 –1840, Adhémar Jean Claude Barré de **SAINT-VENANT** (1797 –1886), Fransız) katkıları ile geliştirildi, genelleştirildi ve genel HOOKE kanunu olarak anılmaya başladı.

$\underline{E}$ matrisine malzeme rijitlik, $\underline{G}$ matrisine malzeme esneklik matrisi de denir. Her ikisi de 6x6 boyutlu, simetrik ve pozitif tanımlıdır(determinantı sıfırdan farklı). Biri diğerinin tersidir: $\underline{G}=\underline{E}^{-1}$ veya $\underline{E}=\underline{G}^{-1}$. Bu matrisler sadece malzemenin E elastisite modulüne[1] ve υ Poisson oranına bağlıdır. E ve υ sayılarına malzeme sabitleri de denir[2].

Malzemenin G kayma modülü

$$G=\frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{2.16}$$

ile tanımlanır. Herhangi ikili bilinirse üçüncüsü bu bağıntıdan hesaplanabilir. Kayma modülü kayma şekil değiştirmeleri ile kayma gerilmeleri arasındaki ilişkiyi kurar. 2.16 kullanılarak 2.13 ve 2.14 bağıntılarından aşağıdaki bağıntılar çıkartılabilir.

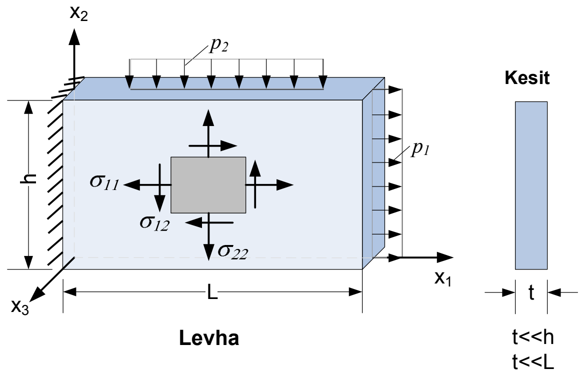
$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}&=\frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{12}=\frac{\sigma_{12}}{G} \qquad & \sigma_{12}&=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\varepsilon_{12}=G\varepsilon_{12}\\
\varepsilon_{23}&=\frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{23}=\frac{\sigma_{23}}{G} \qquad & \sigma_{23}&=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\varepsilon_{23}=G\varepsilon_{23}\\
\varepsilon_{31}&=\frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{31}=\frac{\sigma_{31}}{G} \qquad & \sigma_{31}&=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\varepsilon_{31}=G\varepsilon_{31}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.6 İki eksenli durum

Dış yükleri düzlemi içinde olan levhalar düzlem problem olarak ele alınabilir. İki farklı problem türü vardır: *a) Düzlem gerilme durumu b) Düzlem şekil değiştirme durumu.*

a) Düzlem gerilme durumu:

Sağda görülen levhanın kalınlığı diğer iki boyutu yanında çok küçüktür. Levha ve dış yükler x_1-x_2 düzlemindedir. Levhanın noktaları, mesnetler hariç, x_3 yönünde engellenmemiştir, Poisson etkisiyle levha bu yönde şekil değiştirebilir(şişer veya büzülür) fakat, engelleme olmadığı için, bu yönde gerilme oluşmaz.



Varsayım:

$$\sigma_{33}=\sigma_{32}=\sigma_{31}=0$$
$$\varepsilon_{31}=\varepsilon_{32}=0,\quad \varepsilon_{33}\neq 0$$

Bu varsayımlar 2.1-2.15 arasındaki genel bağıntılarda yerine konarak aşağıda özetlenen bağıntılar bulunur.

Yük vektörleri: $\underline{p}=[p_1 \quad p_2]^T$, $\underline{g}=[g_1 \quad g_2]^T$

Yer değiştirme vektörü: $\underline{u}=[u_1 \quad u_2]^T$

Gerilme vektörü: $\underline{\sigma}=[\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T$

Şekil değiştirme vektörü: $\underline{\varepsilon}=[\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}]^T$

[1] E elastisite modülüne (İngiliz Thomas **YOUNG'**a, 1773 –1829 ithafen) YOUNG modülü de denir. Elastisite modülü kavramını YOUNG' dan önce, 1727 yılında İsviçreli Leonhard **EULER**(1707-1783) kullanmış, ilk deneysel çalışmaları da İtalyan Giordano **RICATTI** 1782 yılında gerçekleştirmiştir.

[2] $\underline{E}$ ve $\underline{G}$ simetrik 6x6 boyutlu kare matrislerdir. Yapı malzemelerinde(Çelik, beton,…) E>0, 0≤ υ <0.5 dir. Bu nedenle $\underline{E}$ ve $\underline{G}$ matrislerinin determinantı det $\underline{E}\neq 0$ ve det $\underline{G}\neq 0$ dır, tersleri daima vardır. Determinantı sıfırdan farklı ve simetrik olan matrislere pozitif definit(pozitif tanımlı) matris denir. Pozitif definit matrisler sıfırdan farklı herhangi bir tamamen keyfi vektör ile soldan ve sağdan çarpıldığında daima pozitif bir sayı elde edilir. Yani $\underline{x}\neq\underline{0}$ herhangi bir keyfi vektör olmak üzere daima $\underline{x}^T\,\underline{E}\,\underline{x}>0$ dır. $\underline{x}^T\,\underline{E}\,\underline{x}>0$ ifadesine kare form da denir. Bu özellikten ilerideki konularda yararlanılacaktır.

Denge denklemleri:

$$\underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{g} = \underline{0}$$

$$\underline{D}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \text{(V hacminde)}$$

$$\underline{n}^T \underline{\sigma} = \underline{p}$$

$$\underline{n}^T = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad \text{(}O_p\text{ yüzeyinde)}$$

Şekil değiştirme–yer değiştirme bağıntıları:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D}\underline{u}$$

Poisson etkisiyle x_3 doğrultusunda oluşan şekil değiştirme:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(-\upsilon\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}) = \frac{1}{1-\upsilon}(-\upsilon\varepsilon_{11} - \upsilon\varepsilon_{22})$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$$

Şekil değiştirme-gerilme bağıntıları:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{G}\underline{\sigma}$$

Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları:

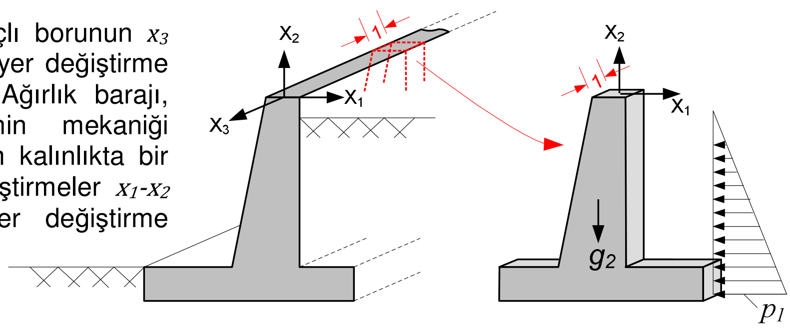
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E}\underline{\varepsilon}$$

(2.18)

b) Düzlem şekil değiştirme durumu:

Sağda görülen istinat duvarı ve basınçlı borunun x_3 yönünde boyu çok uzundur. Bu yönde yer değiştirme ve şekil değiştirme olmaz, $u_3=0$ dır. Ağırlık barajı, tüneller, basınçlı borular ve zemin mekaniği problemlerinde de durum aynıdır. Birim kalınlıkta bir dilim çıkartılırsa dış yükler ve yer değiştirmeler x_1-x_2 düzleminde olacaktır. x_3 yönünde yer değiştirme engellendiği için gerilme oluşacaktır.



İstinat duvarı **Birim kalınlıkta dilim**

Varsayım:

$$u_3 = 0, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{31} = 0$$

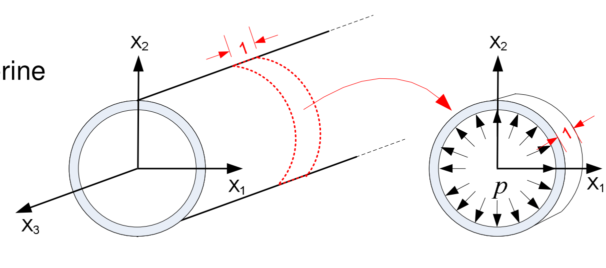
$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} \neq 0$$

Bu varsayımlar 2.1-2.15 arasındaki genel bağıntılarda yerine konarak aşağıda özetlenen bağıntılar bulunur.

Yük vektörleri: $\underline{p} = [p_1 \quad p_2]^T$, $\underline{g} = [g_1 \quad g_2]^T$

Yer değiştirme vektörü: $\underline{u} = [u_1 \quad u_2]^T$

Gerilme vektörü: $\underline{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T$



Basınçlı boru **Birim kalınlıkta dilim**

Şekil değiştirme vektörü: $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{12} \end{bmatrix}^T$

Denge denklemleri:

$$\underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{g} = \underline{0}$$

$$\underline{D}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \text{(V hacminde)}$$

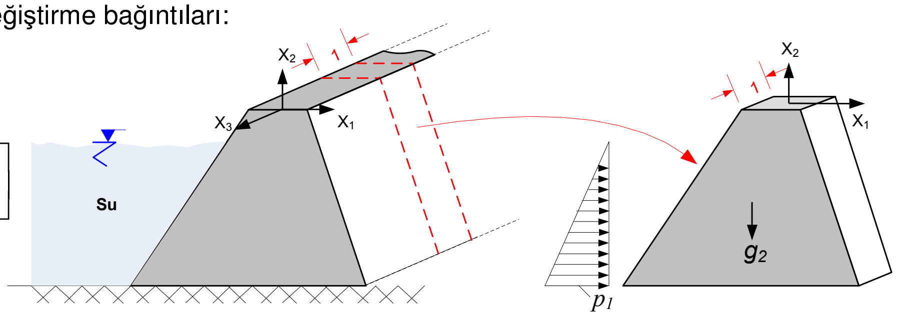
$$\underline{n}^T \underline{\sigma} = \underline{p}$$

$$\underline{n}^T = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad \text{(}O_p\text{ yüzeyinde)}$$

Şekil değiştirme–yer değiştirme bağıntıları:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D}\,\underline{u}$$



Ağırlık barajı

Birim kalınlıkta dilim

Şekil değiştirme-gerilme bağıntıları:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1+\upsilon}{E} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{G}\,\underline{\sigma}$$

Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\upsilon}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E}\,\underline{\varepsilon}$$

x_3 doğrultusunda oluşan gerilme: $\sigma_{33} = \upsilon\sigma_{11} + \upsilon\sigma_{22}$, $\sigma_{31} = \varepsilon_{32} = 0$ (2.19)

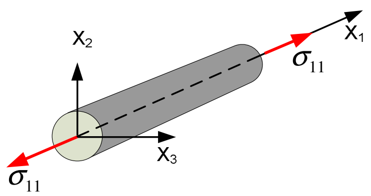
2.7 Bir eksenli durum

Sadece eksenel kuvveti olan kafes sistemlerdeki gerilme durumudur. Eleman x_1 ekseni boyunca uzar veya kısalır. Poisson etkisi olmadığı $(\upsilon = 0)$, $u_1 \neq 0, \varepsilon_{11} \neq 0,\ \sigma_{11} \neq 0$ ve tüm diğer gerilme ve şekil değiştirmelerin sıfır olduğu varsayılır. Bu nedenle

$\underline{u} \to u_1,\ \underline{\varepsilon} \to \varepsilon_{11},\ \underline{\sigma} \to \sigma_{11},\ \underline{E} \to E,\ \underline{G} \to G.$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1$$

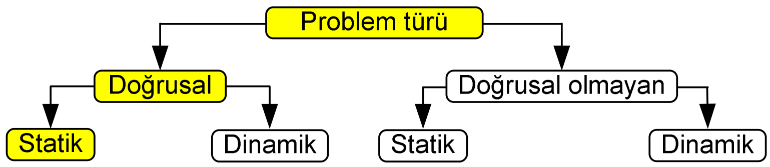
$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \quad (2.20)$$



2.8 Problem türleri ve çözüm yöntemleri

Uygulamada çözülmesi gereken en yaygın problem şudur: Geometrisi, malzemesi, $\underline{p}$, $\underline{g}$ yükleri ve mesnet koşulları bilinen elastik cismin(sistemin) $\underline{u}$ yer değiştirme, $\underline{\sigma}$ gerilme ve $\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirme vektörlerinin hesaplanması istenir. $\underline{\sigma}$ gerilmeleri dayanım hesapları için, $\underline{u}$ yer değiştirmeleri kullanılabilirlik için gereklidir.

Çözülmesi gereken sistemin malzemesi ve geometrisi *doğrusal* veya *doğrusal olmayan* türden olabilir. Yüklerin etkime şekline bağlı olarak problem *statik* veya *dinamik* olarak ele alınabilir.



Çözüm; cismin yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilme fonksiyonlarının belirlenmesi anlamındadır, analitik veya nümerik(sayısal) olarak yapılabilir.

Analitik çözüm 2.5, 2.12 ve 2.15 diferansiyel denklemlerinin integrasyonu yoluyla $\underline{u}$ yer değiştirme, $\underline{\varepsilon}$ şekil değiştirme ve $\underline{\sigma}$ gerilme fonksiyonlarının bulunması esasına dayanır. Sağlanması gereken 15 bağıntı vardır, bunlardan 9 u kısmi diferansiyellidir. Çözüm için cismin sınır koşulları kullanılır. Son derece kısıtlı ve teorik düzeyde kalan uygulaması vardır. Geometrisi, yükleri ve sınır koşulları karmaşık olmayan çok basit sistemlerin çözümü dışında kullanılamaz.

Nümerik(sayısal) çözüm yöntemleri 2.5, 2.12 ve 2.15 bağıntılarını doğrudan kullanmazlar, bu bağıntılar ile yaklaşık aynı anlama gelen, genelde enerji yöntemlerini kullanırlar. Sistemin çözümünü yer değiştirmeleri ve/veya gerilmeleri bilinmeyen olarak içeren bir denklem sisteminin çözümüne dönüştürürler.

Sonlu elemanlar metodu enerji temellidir. Bilinmeyenlerin yer değiştirmeler olması durumunda ***Sonlu elemanlar yer değiştirme*** veya *rijitlik metodu(displacement* or *Stiffness method)*, gerilmeler olması durumunda *Sonlu elemanlar kuvvet* veya *Fleksibilite metodu(force* or *flexibility method)*, hem yer değiştirmeler hem de gerilmeler olması durumunda *Karma sonlu elemanlar metodu(mixed method*) adını alır. Yer değiştirme metodu yaygın olarak kullanılmaktadır. Kuvvet metodu ve karma metod uygulama alanı bulamamıştır. **Bu ders notları sonlu elemanlar yer değiştirme metodunun temel ilkelerini içermektedir.**