ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli

Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$I = \int_{xa}^{xb} [\int_{ya(x)}^{yb(x)} f(x,y)\, dy]\, dx$$

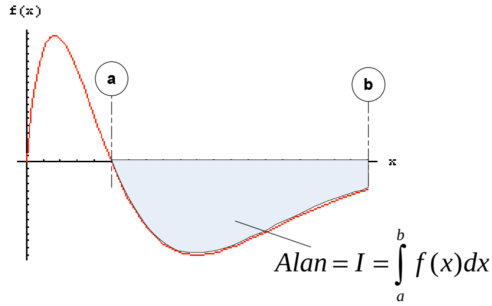
$$I = \int_{xa}^{xb} \{ \int_{ya(x)}^{yb(x)} [\int_{za(x,y)}^{zb(x,y)} f(x,y,z)\ dz]\, dy \} dx$$

38

BELİRLİ İNTEGRAL HESABI

- Dikdörtgen kuralı
- Dikdörtgen orta nokta kuralı
- Simpson kuralı
- Romberg metodu
- Gauss-Legendre metodu
- Adapte Simpson metodu
- Recursive Simpson metodu
- Tanh kuralı

38. BELİRLİ İNTEGRAL HESABI



Eğrisel uzunluk, alan, hacim, ağırlık merkezi, atalet momenti, rijitlik gibi problemlerde tek ya da çok katlı integral hesabı ile karşılaşırız.

En basit tanımıyla, bir f(x) fonksiyonunun [a,b] aralığındaki integrali f(x) fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan, a ve b ile sınırlanan alandır:

$$\mathrm{Alan} = \mathrm{I} = \int_a^b \mathrm{f(x)dx}$$

İntegralin (alanın) analitik hesabı her zaman mümkün olmaz. Aşağıdaki durumlarda nümerik integral hesabı kaçınılmaz olur:

- Analitik çözüm yoktur. Örnek $\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
- Kapalı çözüm vardır fakat kullanılamayacak kadar karmaşıktır
- Fonksiyon tanımlı değildir, sadece bazı noktalardaki değerleri bilinmektedir

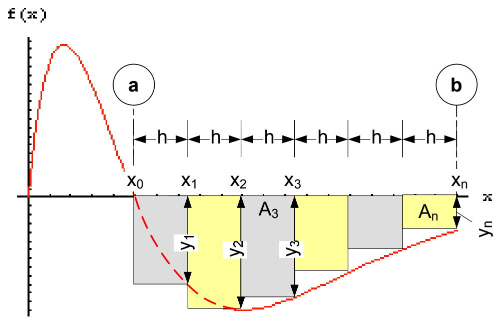
Teknik problemlerde kullanılabilecek çok sayıda nümerik integrasyon yöntemi vardır: Dikdörtgen kuralı, trapez kuralı; Simpson kuralı, Romberg, Gauss-Legendre, Tanh metotları ve bunların biraz değişik şekilleri.

Nümerik integrasyonda temel fikir, alanı küçük alt alanlara bölmek, alt alanların her birini yaklaşık olarak hesaplamak ve bu alanları toplamaktan ibarettir.

Dikdörtgen kuralı:

Alan dikdörtgenler ile modellenir. a-b aralığı n eşit aralığa bölünür, h=(b-a)/n.

f(x) in x_1, x_2, … , x_n noktalarındaki $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(y_2)$, … ,$y_n=f(x_n)$ ordinatları hesaplanır. $A_i=hy_i$ olur.



$$Alan = I = \int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$Alan = I = \int_a^b f(x)dx \approx hy_1 + hy_2 + \ldots + hy_n$$

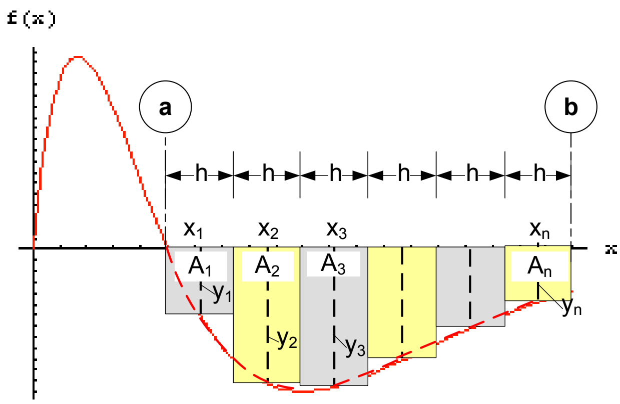
$$Alan = I = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Dikdörtgen orta nokta kuralı:

Alan dikdörtgenler ile modellenir. a-b aralığı n eşit aralığa bölünür, h=(b-a)/n.
i. aralığın orta noktasındaki x_i ye karşılık gelen $y_i = f(x_i)$ ordinatı hesaplanır, $A_i=hy_i$ olur.

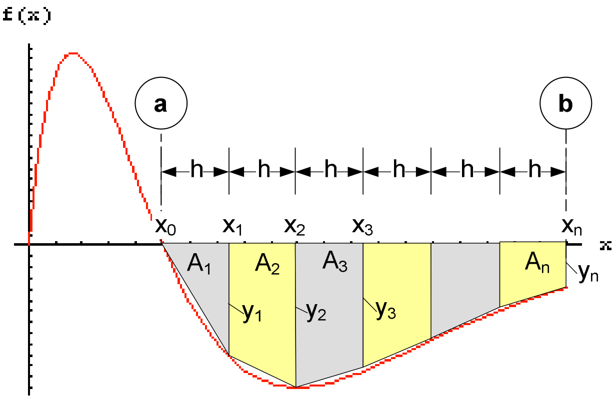
Toplam alan:

$$Alan = I = \int_a^b f(x)dx \approx hy_1 + hy_2 + \ldots + hy_n = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$



Yamuk(trapez) kuralı:

Alan yamuklar ile modellenir. a-b aralığı n eşit aralığa bölünür, h=(b-a)/n.



x_i ye karşılık gelen y_i = $f(x_i)$ ordinatları hesaplanır, $A_i = h\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$ olur.

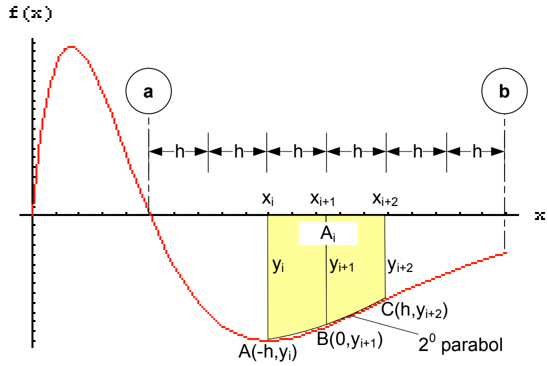
Toplam alan:

$$Alan = I = \int_a^b f(x)dx \approx h\frac{y_0 + y_1}{2} + h\frac{y_1 + y_2}{2} + ... + h\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

$$Alan = I \approx h(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + ... + \frac{1}{2}y_n = h(\frac{1}{2}y_0 + \sum_{i=2}^{n-1} y_i + \frac{1}{2}y_n)$$

Simpson kuralı:

n **çift tam sayı** olmak üzere, a-b aralığı n eşit aralığa bölünür, h=(b-a)/n. x_{i+2} - x_i=2h aralığında f(x) in ikince derece bir polinom olduğu varsayılır.



y_i, y_{i+1}, y_{i+2} ordinatlarının A, B ve C tepe noktalarından geçen $y=ax^2+bx+c$ parabolünün a, b ve c sabitleri x_i ye karşılık gelen y_i = $f(x_i)$ ordinatları yardımıyla bulunabilir. a, b, c nin hesabını basitleştirmek için, y ekseni B noktasına kaydırılırsa A, B, C noktalarının koordinatları A(-h,y_i), B(0,y_{i+1}), C(h,y_{i+2}) olur. Bu noktalar parabolün denklemini sağlamak zorundadır:

$$\begin{aligned} A(-h, y_i) &\to y_i = ah^2 - bh + c \\ B(0, y_{i+1}) &\to y_{i+1} = c \\ C(h, y_{i+2}) &\to y_{i+2} = ah^2 + bh + c \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{2h^2}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) \\ b &= \frac{1}{2h}(y_{i+2} - y_i) \\ c &= y_{i+1} \end{aligned}$$

A_i alanı:

$$A_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{2ah^3}{3} + 2ch$$

a, b ve c değerleri yerine konarak:

$$A_i \approx \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

Bulunur. Bu formüle Simpson[1] kuralı denir. Toplam alan

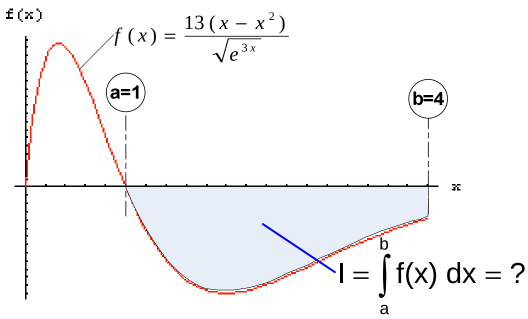
$$Alan = I = \int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + ... + A_i + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

olur.

[1] Thomas **Simpson** , 1710-1761, İngiliz. Bazı kaynaklarda bu formülün Simpson'dan 200 yıl önce **Kepler (**1571-1630, Alman) tarafından kullanıldığı, belirtilmektedir.

Örnek:

$$f(x) = \frac{13(x - x^2)}{\sqrt{e^{3x}}}, \quad I = \int_1^4 f(x)\,dx = ?$$

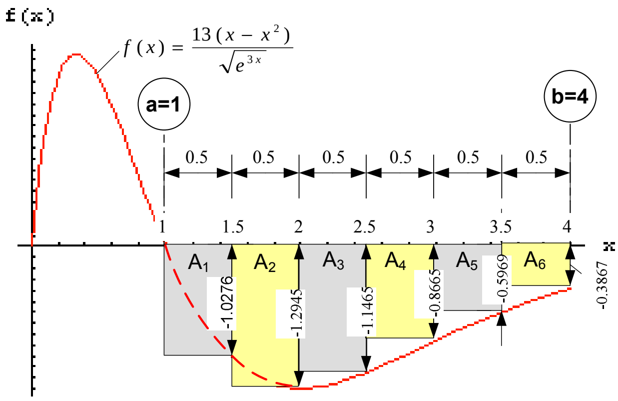


Dikdörtgen kuralı:

n=6 seçelim. [1,4] aralığını eşit genişlikli alt aralıklara bölelim: h=(4-1)/6=0.5.

h=0.5 aralıklarla x_i= 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4 noktalarındaki $y_i=f(x_i)$ ordinatları:

x_i	$y_i=f(x_i)$
1.5	-1.0276
2.0	-1.2945
2.5	-1.1465
3.0	-0.8665
3.5	-0.5969
4.0	-0.3867



İntegral:

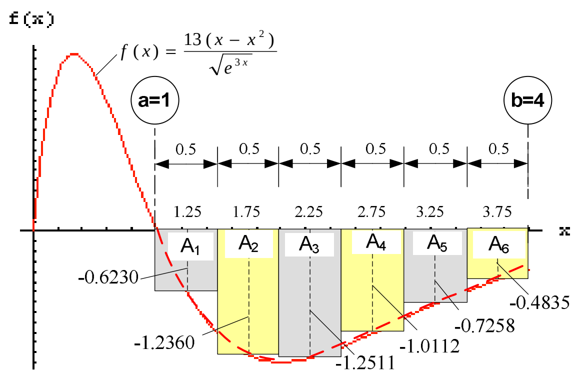
$$I = \int_1^4 f(x)dx = \approx 0.5(-1.0276 - 1.2945 - 1.1465 - 0.8665 - 0.5969 - 0.3867) = -2.6594$$

Dikdörtgen orta nokta kuralı:

n=6 seçelim. [1,4] aralığını eşit genişlikli alt aralıklara bölelim, h=(4-1)/6=0.5.

h=0.5 aralıklarının orta noktalarındaki x_i= 1.25, 1.75, 2.25, 2.75, 3.25, 3.75 noktalarındaki $y_i=f(x_i)$ ordinatları:

x_i	$y_i=f(x_i)$
1.25	-1.6230
1.75	-1.2360
2.25	-1.2511
2.75	-0.0112
3.25	-0.7258
3.75	-0.4835

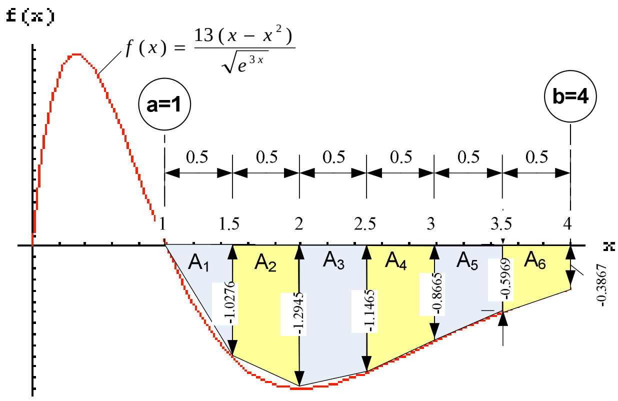


İntegral:

$$I = \int_1^4 f(x)dx = \approx 0.5(-1.6230 - 1.2360 - 1.2511 - 0.0112 - 0.7258 - 0.4835) = -2.6653$$

Yamuk(trapez) kuralı:

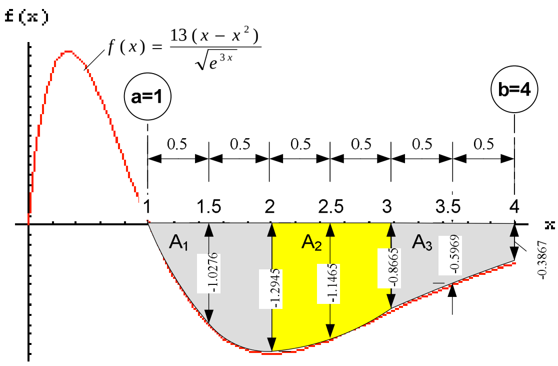
$$I=\int_1^4 f(x)dx=\approx 0.5(\frac{1}{2}0-1.0276-1.2945-1.1465-0.8666$$
$$-0.5969-\frac{1}{2}0.3867)=-2.5627$$



Simpson kuralı:

$A_i\approx\frac{h}{3}(y_i+4y_{i+1}+y_{i+2})$ bağıntısından:

$$A_1=\frac{0.5}{3}(0-4\cdot1.0276-1.2945)=-0.9008$$
$$A2=\frac{0.5}{3}(-1.2945-4\cdot1.1465-0.8665)=-1.1245$$
$$A_3=\frac{0.5}{3}(-0.8665-4\cdot0.5969-0.3867)=-0.6068$$



İntegral:

$$I=\int_1^4 f(x)dx=\approx A_1+A_2+A_3=-0.9008-1.1245-0.6068=-2.6321$$

Yorum:

İntegralin gerçek değeri

$$\int_1^4\frac{13(x-x^2)}{\sqrt{e^{3x}}}dx=-2.6310$$

ve yukarıda hesaplanan yaklaşık değerlerin hata miktarları

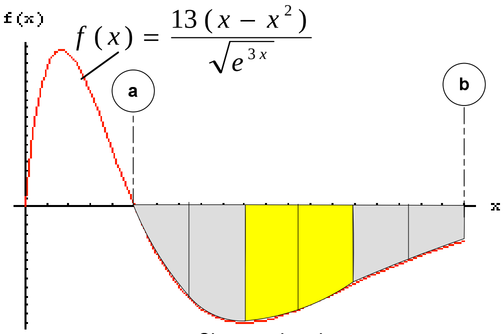
Dikdörtgen kuralı: |-2.6310-(-2.6594)|=0.02840
Dikdörtgen orta nokta kuralı: |-2.6310-(-2.6653)|=0.0343
Yamuk kuralı: |-2.6310-(-2.5627)|=0.0683
Simpson kuralı: |-2.6310-(-2.6321)|=0.0011

incelendiğinde, beklendiği gibi, Simpson kuralının en doğru sonucu verdiği görülür. En büyük hata yamuk kuralındadır. Dikdörtgen kuralı yamuk kuralına nazaran daha doğru gibi görülmekle birlikte yamuk kuralı genelde dikdörtgen kuralından daha doğru sonuç verir. Dikdörtgen kuralının nümerik integrasyonu anlamak açısından teorik değeri vardır. Uygulamada Simpson veya yamuk kuralı kullanılır.

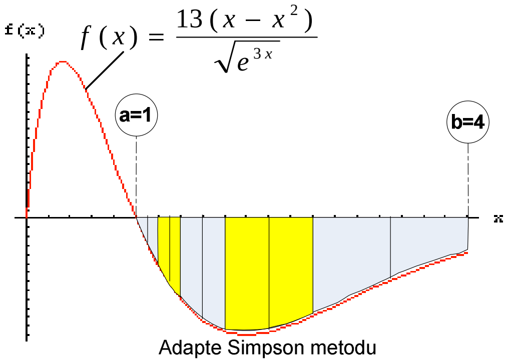
Örneklerde sadece 6 aralık ve alt aralık genişliği h=0.5 alınmıştır. Bu değerler uygulama açısından oldukça yetersizdir. Aralık sayısı 20-50, h=0.05-0.1 civarı genelde uygun olmaktadır.

Romberg[1], Gauss-Legendre[2], Adapte simpson, Recursive Simpson ve Tanh[3] metotlarının teorik detayına girilmeyecek, ancak bunlara ait program ve çözüm örnekleri sonraki bölümde verilecektir.

Simpson kuralında [a,b] aralığı çift sayıda eşit genişlikli alt aralığa bölünür. Adapte Simpson metodunda ise f(x) fonksiyonunun eğiminin hızla değiştiği bölgelerde küçük, eğimin yavaş değiştiği bölgelerde büyük aralıklar seçilir:



Simpson kuralı



Adapte Simpson metodu

Recursive Adapte Simpson metodu Adapte Simpson metodu ile aynıdır. Tek fark programının "recursive(kendi kendini çağıran alt program) tekniği ile yazılmasıdır. Recursive programlama tekniği çok az kod, fakat çok fazla yığın(register), daha çok bellek gerektirir. Hata oluşması durumunda programı durdurmak mümkün değildir, bilgisayarın kilitlenme riski vardır.

[1] Werner **Romberg**, 1909-2003, Alman. Adı ile anılan integrasyon metodunu 1955 yılında yayınladı, 1960 yılına kadar ilgi görmedi.

[2] Johann Carl Friedrich **Gauss** tarafından 1814-1816 yılında geliştirildi.

[3] Charles **Schwartz**, Numerical Integration of Analytic Functions, Journal of Comp. Physics, Vol. 4, Number 1, June 1969, pages 19-29.