ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

1970

Bilgisayar Destekli

Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

Rijitlik matrisi *Kütle matrisi*

$$\underline{K}\,\underline{\phi} - \omega^2\,\underline{M}\,\underline{\phi} = \underline{0} \;\rightarrow\; \underline{\mathbf{A}}\;\underline{\mathbf{x}} = \lambda\,\underline{\mathbf{x}}$$

Açısal frekans *Titreşim modu*

26

GENEL ÖZDEĞER PROBLEMİ

Yapı serbest titreşim açısal frekans, periyot, frekans ve modlarının hesabı

26. GENEL ÖZDEĞER PROBLEMİ, PERİYOT VE MOD HESABI

Bir yapının serbest titreşim frekans denklemi

$$\underline{K}\underline{\phi} - \omega^2 \underline{M}\underline{\phi} = \underline{0} \tag{26.1}$$

ile verilir. Burada

K :yapının rijitlik matrisi (simetrik, bant ve pozitif tanımlı)
M :yapının kütle matrisi (simetrik bant, genelde diyagonal)
ω yapının açısal titreşim frekansı
$\underline{\phi}$:Yapının ω ya karşılık gelen titreşim formu (modu).

K ve M bilinir ω ve $\underline{\phi}$ hesaplanır. $\lambda = \omega^2$ alınarak (26.1) ifadesi

$$\underline{K}\underline{\phi} - \lambda \underline{M}\underline{\phi} = \underline{0} \tag{26.2}$$

$$(\underline{K} - \lambda \underline{M})\underline{\phi} = \underline{0} \tag{26.3}$$

Şeklinde yazılabilir. (26.3) ifadesine genel özdeğer problemi denir. 25.3 bağıntısı ile verilen standart özdeğer probleminden farklıdır ($\underline{M} \neq \underline{I}$). $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ özdeğerlerinin ve her özdeğere karşılık gelen $\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \ldots, \underline{\phi}_n$ özvektörlerinin hesaplanabilmesi için 26.3 genel özdeğer probleminin 25.3 tipindeki standart özdeğer problemine dönüştürülmesi gerekir. Çünkü bazı nümerik yöntemler (POWER-MISES, JACOBI, gibi) sadece standart özdeğer problemini çözerler.

Özdeğer, açısal frekans, periyot ve frekans arasındaki ilişki:

Açısal frekans:

$\lambda_i = \omega_i^2$ olduğundan

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \tag{26.4}$$

dir. ω_i nin birimi rad/s dir.

Periyot:

Fizik, dinamik veya yapı dinamiği derslerinden hatırlanacağı gibi açısal frekans ile periyot arasında

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{26.5}$$

Bağıntısı vardır. Dolayısıyla yapının titreşim periyotları

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \tag{26.6}$$

dir. T_i nin birimi s dir. Bir titreşim sürecinin kaç saniye sürdüğü anlamındadır.

Frekans:

Periyodun tersidir.

$$f_i = \frac{1}{T_i} \tag{26.7}$$

f_i nin birimi Hz (Hertz) dir. Bir saniyede kaç titreşim yaptığı anlamındadır.

Genel özdeğer probleminin standart özdeğer problemine dönüştürülmesi

Özdeğer ve özvektör hesaplayan algoritmalar genelde standart özdeğer problemini çözerler. Bu nedenle genel özdeğer problemi standart özdeğer problemine dönüştürülür. Dönüştürme farklı yollarla yapılabilir.

1.Yol:

det $\underline{M}$≠0 ise, 26.3 ifadesi $\underline{M}^{-1}$ ile soldan çarpılarak oluşan $(\underline{M}^{-1}\underline{K}-\lambda\underline{M}^{-1}\underline{M})\underline{\phi}=\underline{0}$ ifadesinde $\underline{A}=\underline{M}^{-1}\underline{K}$ ve $\underline{I}=\underline{M}^{-1}\underline{M}$ alınarak

$$(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{\phi}=\underline{0} \qquad (26.8)$$

Standart özdeğer problemi elde edilir. **$\underline{K}$ ve $\underline{M}$ simetrik ve bant olmasına rağmen $\underline{A}$ tam doludur ve simetrik değildir! Siemetrik olmayan özdeğer problemi daha çok bellek, işlem gerektirir ve çözümü zorluk yaratır. Bu nedenle 1.yol genelde tercih edilmez.**

Hesap sırası:

1. $\underline{K}$ ve $\underline{M}$ hesaplanır.
2. $\underline{M}^{-1}$ hesaplanır.
3. $\underline{A}=\underline{M}^{-1}\underline{K}$ hesaplanır(simetrik değil ve tam dolu!).
4. $\underline{A}$ nın özdeğerleri $\lambda_1,\lambda_2,..\lambda_n$ ve $\underline{\phi}_1,\underline{\phi}_2,...\underline{\phi}_n$ özvektörleri(yapının titreşim modları) bulunur.
5. Açısal Frekanslar $\omega_i=\sqrt{\lambda_i}$ den bulunur.
6. Periyotlar $T_i=\dfrac{2\pi}{\omega_i}$ den bulunur.
7. Frekanslar $f_i=\dfrac{1}{T_i}$ den bulunur.

2.Yol:

Det $\underline{M}$=0 ise 1. yol uygulanamaz. $\underline{K}$ daima pozitif tanımlı ve det $\underline{K}$≠0 dır. 26.3 ifadesi $\underline{K}^{-1}$ ile sağdan çarpılarak oluşan $(\underline{K}^{-1}\underline{K}-\lambda\underline{K}^{-1}\underline{M})\underline{\phi}=\underline{0}$ ifadesinde $\underline{I}=\underline{K}^{-1}\underline{K}$ ve $\underline{A}=\underline{K}^{-1}\underline{M}$ alınarak $(\underline{I}-\lambda\underline{A})\underline{\phi}=\underline{0}$ olur. Her iki tarafı -$1/\lambda$ ile çarpılarak bulunan $(-\dfrac{1}{\lambda}\underline{I}+\underline{A})\underline{\phi}=\underline{0}$ ifadesinde $\lambda'=\dfrac{1}{\lambda}$ alınır ve düzenlenirse

$$(\underline{A}-\lambda'\underline{I})\underline{\phi}=\underline{0}$$

Standart özdeğer problemi elde edilir. **$\underline{K}$ ve $\underline{M}$ simetrik ve bant olmasına rağmen $\underline{A}$ tam doludur ve simetrik değildir, 2.yol da genelde tercih edilmez.**

Hesap sırası:

1. $\underline{K}$ ve $\underline{M}$ hesaplanır.
2. $\underline{K}^{-1}$ hesaplanır.
3. $\underline{A}=\underline{K}^{-1}\underline{M}$ hesaplanır(simetrik değil ve tam dolu!).
4. $\underline{A}$ nın özdeğerleri $\lambda'_1,\lambda'_2,...,\lambda'_n$ ve $\underline{\phi}_1,\underline{\phi}_2,...\underline{\phi}_n$ özvektörleri(yapının titreşim modları) bulunur.
5. Açısal Frekanslar $\omega_i=\sqrt{\lambda_i}=\sqrt{\dfrac{1}{\lambda'_i}}$ den bulunur.
6. Periyotlar $T_i=\dfrac{2\pi}{\omega_i}$ den bulunur.
7. Frekanslar $f_i=\dfrac{1}{T_i}$ den bulunur.

3.Yol:

1. ve 2. yol $\underline{K}$ ve $\underline{M}$ nin simetrik ve bant yapısını bozar. Aşağıda verilen, simetriyi bozmayan, yol tercih edilir. $\underline{M}$ kütle matrisi pozitif tanımlı olmak kaydıyla Cholesky yöntemi[1] ile

$$\underline{M} = \underline{U}\,\underline{U}^T \tag{26.9}$$

şeklinde üçgen çarpanlarına ayrılabilir. $(\underline{U}^{-1})^T = \underline{U}^{-T}$ ile gösterilir ve $\underline{U}^{-T}\underline{U}^T = \underline{I}$ özelliği kullanılırsa 26.2 ifadesi $\underline{K}\,\underline{U}^{-T}\underline{U}^T\underline{\phi} - \lambda\underline{U}\,\underline{U}^T\underline{\phi} = \underline{0}$ olarak yazılabilir.

$$\underline{x} = \underline{U}^T\underline{\phi} \tag{26.10}$$

alınırsa $\underline{K}\,\underline{U}^{-T}\underline{x} - \lambda\underline{U}\,\underline{x} = \underline{0}$ olur. Bu ifade $\underline{U}^{-1}$ ile soldan çarpılarak $\underline{U}^{-1}\underline{K}\,\underline{U}^{-T}\underline{x} - \lambda\underline{U}^{-1}\underline{U}\,\underline{x} = \underline{0}$ bulunur. $\underline{U}^{-1}\underline{U} = \underline{I}$ dir. $\underline{U}^{-1}\underline{K}\,\underline{U}^{-T} = \underline{A}$ alınarak

$$\underline{A}\,\underline{x} - \lambda\,\underline{I}\,\underline{x} = \underline{0}$$

Veya

$$(\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{x} = \underline{0} \tag{26.11}$$

Standart özdeğer problemi elde edilir.

Hesap sırası:

1. $\underline{K}$ ve $\underline{M}$ hesaplanır.
2. $\underline{M}$ Cholesky ile üçgen çarpanlara ayrılarak $\underline{U}$, $\underline{U}^{-1}$, $\underline{U}^{-T}$ hesaplanır.

Not: *$\underline{M}$ nin diyagonal olması durumunda $\underline{U}$ da diyagonaldir(Cholesky gerekmez!):* $u_{ii} = \sqrt{m_{ii}}$ *. $\underline{U}$ nun hesaplanması gerekmez, $\underline{U}^{-1} = \underline{U}^{-T}$ dir, $\underline{U}^{-1}$ doğrudan*

$$\underline{U}^{-1} = \underline{U}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_{11}}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{m_{22}}} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{m_{nn}}} \end{bmatrix}^T$$

ile hesaplanır.

3. $\underline{A} = \underline{U}^{-1}\,\underline{K}\,\underline{M}^{-T}$ **simetrik fakat tam dolu** matrisi hesaplanır.

Not: *$\underline{M}$ diyagonal yapıya sahipse $\underline{A} = \underline{U}^{-1}\,\underline{K}\,\underline{U}^{-1}$ ile hesaplanır, $\underline{A}$ simetriktir ve $\underline{K}$ ile aynı bant genişliğine sahiptir.*

5. $\underline{A}$ nın özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ve özvektörleri $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ bulunur.
6. 26.10 ifadesine göre $\underline{\phi}_i = \underline{U}^{-T}\underline{x}_i$ dir. Bu bağıntı kullanılarak yapının titreşim modları $\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, ...\underline{\phi}_n$ hesaplanır.
7. Açısal frekanslar $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ den bulunur.
8. Periyotlar $T_i = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$ den bulunur.
9. Frekanslar $f_i = \dfrac{1}{T_i}$ den bulunur.

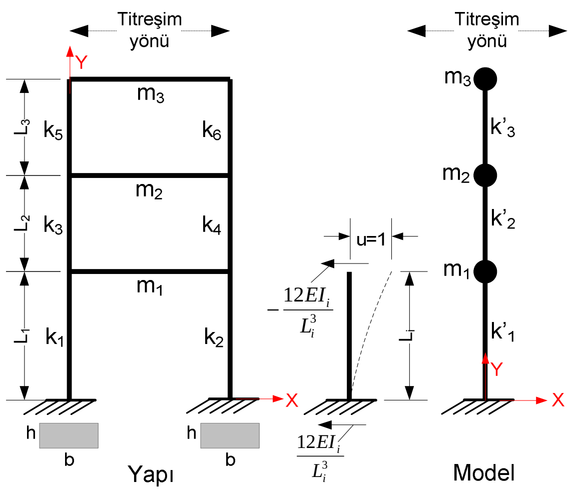
----

[1] Bak: bölüm 6. Simetriden dolayı $\underline{M} = \underline{U}\,\underline{U}^T$ veya $\underline{M} = \underline{U}^T\underline{U}$ şeklinde üçgen çarpanlarına ayrılabilir. Burada $\underline{M} = \underline{U}\,\underline{U}^T$ tercih edilmiştir.

Yapının titreşim modeli

Teorisi basit olmasına rağmen, özdeğer hesabı çok yoğun ve karmaşık hesap gerektirir. Bu nedenle, bir yapının serbest titreşim periyot ve modlarının belirlenmesi için çoğu kez basit modeller kullanılır. Genellikle kat döşeme ve kirişlerinin sonsuz rijit olduğu, deforme olmadığı, kat kütlelerinin sadece yatay yönde gidip-geldiği fakat dönmediği varsayılır. Bu durumda yatay bir kuvvet(örneğin deprem) sadece yatay yer değiştirme oluşturacak ve kolonlarının kesme rijitliği direnim gösterecektir varsayabiliriz. Bu varsayıma göre yapıyı kütleleri kat seviyesinde toplanmış bir konsol ile modelleyebiliriz.

Aşağıdaki şekilde görülen üç katlı yapının serbest titreşim frekans, periyot ve modları, genelliği bozmadan, örnek olarak hesaplanacaktır. Kat kütleleri kat seviyelerinde toplanmıştır.



E: Malzeme elastisite modülü
I_i: *i.* Kolonun titreşim yönündeki atalet momenti
L_i : *i.* Kolonun boyu
$k_i = \frac{12EI_i}{L_i^3}$:Yapının i.kolonunun kesme rijitliği
m_i : *i.* katın toplam kütlesi
k'_i : *i.* katın kolonlarının kesme rijitliklerinin toplamı

olmak üzere model sistemin K rijitlik ve M kütle matrisi:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k'_1 + k'_2 & -k'_2 & 0 \\ -k'_2 & k'_2 + k'_3 & -k'_3 \\ 0 & -k'_3 & k'_3 \end{bmatrix}$$

Simetrik ve bant

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

diyagonal

26.3 e göre serbest titreşim denklemi $(\underline{K} - \lambda \underline{M})\underline{\phi} = \underline{0}$:

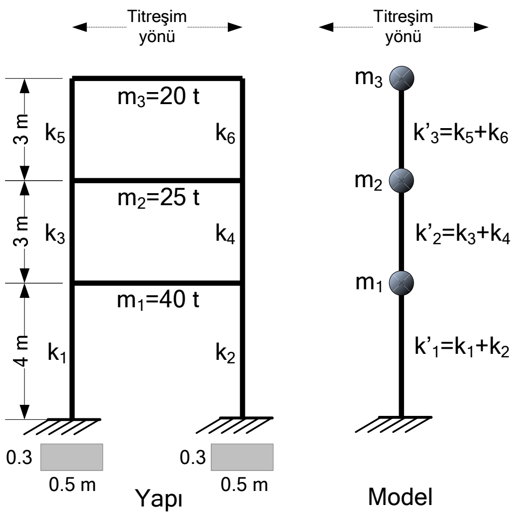
$$\left(\begin{bmatrix} k'_1 + k'_2 & -k'_2 & 0 \\ -k'_2 & k'_2 + k'_3 & -k'_3 \\ 0 & -k'_3 & k'_3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad (26.12)$$

dir.

Aşağıdaki sayısal örneklerin çözümünde bölüm 27-34 de verilen özdeğer-özvektör hesaplayan ve bölüm 35 verilen polinom kökleri bulan programlar kullanılacaktır.

Sayısal örnek 1:

Şekilde verilen çerçeve C30/37 betonu ile inşa edilecektir. Tüm kolonların kesitleri aynıdır. En büyük ve en küçük Serbest titreşim frekanslarını, periyotlarını ve titreşim modlarını bulunuz.



Metre, Ton, Kilo Newton ve Saniye birimleri kullanılacaktır.

$E=31800 \cdot 10^3$ kN/m^2 (C30/37 betonu için TS 500-2000 den)
$I_i=0.3 \cdot 0.5^3/12=3.125 \cdot 10^{-3}$ m^4 (i=1, 2, … ,6 tüm kolonlarda aynı)
$E\,I_i=99375$ kN m^2

$k_1=k_2=12 \cdot 99375/4^3=18632.81$ KN/m
$k_3=k_4=k_5=k_6=12 \cdot 99375/3^3=44166.67$ KN/m

$k'_1=k_1+k_2=18632.81+18632.81=37265.62$ kN/m
$k'_2=k_3+k_4=44166.67+44166.67=88333.34$ "
$k'_3=k_5+k_6=44166.67+44166.67=88333.34$ "

$m_1=40$ t, $m_2=25$ t, $m_3=20$ t

$$\underline{K}=\begin{bmatrix} k_1'+k_2' & -k_2' & 0 \\ -k_2' & k_2'+k_3' & -k_3' \\ 0 & -k_3' & k_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 37265.62+88333.34 & -88333.34 & 0 \\ -88333.34 & 88333.34+88333.34 & -88333.34 \\ 0 & -88333.34 & 88333.34 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}=\begin{bmatrix} 125598.96 & -88333.34 & 0 \\ -88333.34 & 176666.68 & -88333.34 \\ 0 & -88333.34 & 88333.34 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Serbest titreşim denklemi $(\underline{K}-\lambda\underline{M})\underline{\phi}=\underline{0}$:

$$\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 125598.96 & -88333.34 & 0 \\ -88333.34 & 176666.68 & -88333.34 \\ 0 & -88333.34 & 88333.34 \end{bmatrix}}_{\underline{K}}-\lambda\underbrace{\begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}}_{\underline{M}}\Bigg)\underline{\phi}=\underline{0} \qquad (26.13)$$

1. yol izlenerek 26.13 den özdeğer, özvektör, açısal frekans, periyot, frekans ve mod hesabı

$$\underline{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}=\underline{M}^{-1}\underline{K}=\begin{bmatrix} 3139.97 & -2208.33 & 0 \\ -3533.33 & 7066.67 & -3533.33 \\ 0 & -4416.67 & 4416.67 \end{bmatrix}$$

Simetrik değil!

$$(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{\phi}=\underline{0} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3139.97 & -2208.33 & 0 \\ -3533.33 & 7066.67 & -3533.33 \\ 0 & -4416.67 & 4416.67 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}=\underline{0} \qquad (26.14)$$

26.13 genel özdeğer probleminin standart özdeğer problemine dönüştürülmüş eşdeğeri

a) $(\underline{A}-\lambda \underline{I})\underline{\phi}=\underline{0}$ **ın en büyük özdeğeri ve özvektörü:**

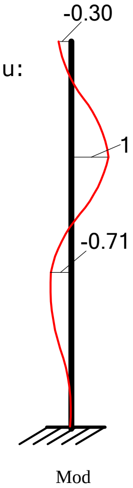
26.14 de $\underline{A}$ simetrik değildir. JACOBI kullanılamaz. Bölüm 28 de verilen PowerMises programı kullanarak en büyük özdeğer ve buna ait özvektör(titreşim modu) bulunabilir. $\underline{A}$ matrisi programa verilirse:


C:\NANALIZ\Basic\QBasic.EXE
```
İterasyon sayısı: 39
özdeğer ve özvektörü(PowerMises):
Mutlak değerce en büyük özdeğer= 10623.5533368227
özvektör:
-.295089918907431   1 -.711576126104686
```

λ

Titreşim modu:

$$\underline{\phi}=\begin{bmatrix}-0.30\\1\\-0.71\end{bmatrix}$$



En büyük özdeğer: $\lambda = 10623.6$

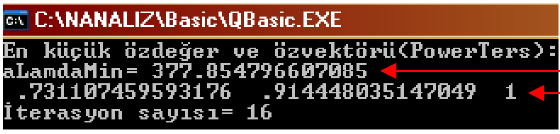
En büyük açısal frekans: $\omega = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10623.6} = 103.1\,\text{rad/s}$

En küçük periyot: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{103.1} = 0.06\,s$

En büyük frekans: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0.06} = 16.7\,\text{Hz}$

b) $(\underline{A}-\lambda \underline{I})\underline{\phi}=\underline{0}$ **ın en küçük özdeğeri ve özvektörü:**

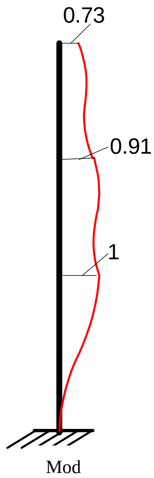
En küçük özdeğer ve buna ait özvektör bölüm 29 da verilen PowerTers programı ile bulunabilir. 26.14 bağıntısındaki $\underline{A}$ programa verilirse:


C:\NANALIZ\Basic\QBasic.EXE
```
En küçük özdeğer ve özvektörü(PowerTers):
aLamdaMin= 377.854796607085
 .731107459593176   .914448035147049   1
İterasyon sayısı= 16
```

λ

Titreşim modu:

$$\underline{\phi}=\begin{bmatrix}0.73\\0.91\\1\end{bmatrix}$$



En küçük özdeğer: $\lambda = 377.9$

En küçük açısal frekans: $\omega = \sqrt{\lambda} = \sqrt{377.9} = 19.44\,\text{rad/s}$

En büyük periyot: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{19.44} = 0.32\,s$

En küçük özdeğer→En büyük periyot

En küçük frekans: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0.32} = 3.1\,\text{Hz}$

3. yol ile 26.13 den özdeğer, özvektör, açısal frekans, periyot, frekans ve mod hesabı:

$\underline{M}$ diyagonal olduğundan Cholesky gerekmez, $\underline{U}^{-1}$ doğrudan hesaplanır.

$$\underline{U}^{-1}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{40} & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{25} & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1581 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.2236\end{bmatrix}$$

Simetrik ve bant

$$\underline{U}^{-1}\underline{K}=\begin{bmatrix}19857.20 & -13965.50 & 0\\ -17666.67 & 35333.34 & -17666.67\\ 0 & -19751.33 & 19751.33\end{bmatrix},\quad \underline{A}=\underline{U}^{-1}\underline{K}\underline{U}^{-1}=\begin{bmatrix}3139.42 & -2793.10 & 0\\ -2793.10 & 7066.67 & -3950.27\\ 0 & -3950.27 & 4416.40\end{bmatrix}$$

Serbest titreşim denklemi $(\underline{A}-\lambda\underline{I})x=\underline{0}$:

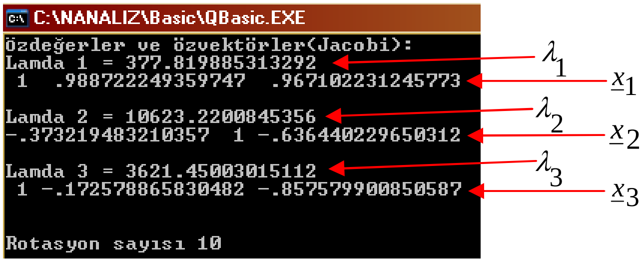
Dikkat: 26.10 a göre $\underline{x}=\underline{M}^{1/2}\underline{\phi}$ dir

$$\left(\begin{bmatrix}3139.42 & -2793.10 & 0\\ -2793.10 & 7066.67 & -3950.27\\ 0 & -3950.27 & 4416.40\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\underline{0}$$

26.13 genel özdeğer probleminin standart özdeğer problemine dönüştürülmüş eşdeğeri

A nın tüm özdeğerleri ve özvektörleri:

A matrisi simetriktir. Bölüm 30 da verilen Jacobi programı kullanılarak tüm özdeğer ve özvektörler bulunabilir:



En küçük özdeğer→En büyük periyot

$\lambda_1 = 377.82 \qquad \omega_1 = \sqrt{377.82} = 19.44 \text{ rad/s} \qquad T_1 = \dfrac{2\pi}{19.44} = 0.32 \text{ s} \qquad f_1 = \dfrac{1}{0.32} = 3.1 \text{ Hz}$

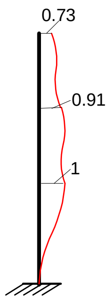
$\lambda_2 = 10623.22 \qquad \omega_2 = \sqrt{10623.22} = 103.07 \text{ rad/s} \qquad T_2 = \dfrac{2\pi}{103.07} = 0.06 \text{ s} \qquad f_2 = \dfrac{1}{0.06} = 16.7 \text{ Hz}$

$\lambda_3 = 3621.45 \qquad \omega_3 = \sqrt{3621.45} = 60.18 \text{ rad/s} \qquad T_3 = \dfrac{2\pi}{60.18} = 0.10 \text{ s} \qquad f_3 = \dfrac{1}{0.10} = 10 \text{ Hz}$

Modlar: 26.10 dan bulunur.

$\omega_1 = 19.44$ rad/s için:

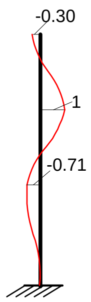
$$\underline{\phi}_1 = \underline{M}^{-1}\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.1581 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9887 \\ 0.9671 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1581 \\ 0.1977 \\ 0.2162 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.73 \\ 0.91 \\ 1 \end{bmatrix}$$



1. Mod

$\omega_2 = 103.07$ rad/s için:

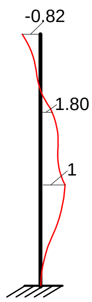
$$\underline{\phi}_2 = \underline{M}^{-1}\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.1581 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.3732 \\ 1 \\ -0.6364 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0590 \\ 0.2000 \\ -0.1423 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -0.30 \\ 1 \\ -0.71 \end{bmatrix}$$



2. Mod

$\omega_3 = 60.18$ rad/s için:

$$\underline{\phi}_3 = \underline{M}^{-1}\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.1581 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1726 \\ -0.8576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1581 \\ -0.0345 \\ -0.1918 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\phi}_3 = \begin{bmatrix} -0.82 \\ 0.18 \\ 1 \end{bmatrix}$$



3. Mod

26.13 genel özdeğer probleminin standart özdeğer problemine dönüştürülmeden çözümü

a)El ile özdeğer, frekans ve periyotların hesabı:

Serbest titreşim denklemi $(\underline{K}-\lambda\underline{M})\underline{\phi}=\underline{0}$:

$$\left(\begin{bmatrix}125598.96 & -88333.34 & 0\\ -88333.34 & 176666.68 & -88333.34\\ 0 & -88333.34 & 88333.34\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}40 & 0 & 0\\ 0 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 20\end{bmatrix}\right)\underline{\phi}=\underline{0}\rightarrow\begin{bmatrix}125598.96-40\lambda & -88333.34 & 0\\ -88333.34 & 176666.68-25\lambda & -88333.34\\ 0 & -88333.34 & 88333.34-20\lambda\end{bmatrix}\underline{\phi}=\underline{0}$$

El hesaplarını basitleştirmek için tüm terimleri 20 değerine bölelim. $\underline{\phi}\neq\underline{0}$ olduğundan eşitliğin sağlanabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{bmatrix}6279.95-2\lambda & -4416.67 & 0\\ -4416.67 & 8833.33-1.25\lambda & -4416.67\\ 0 & -4416.67 & 4416.67-\lambda\end{bmatrix}\underline{\phi}=\underline{0}\rightarrow f(\lambda)=\begin{vmatrix}6279.95-2\lambda & -4416.67 & 0\\ -4416.67 & 8833.33-1.25\lambda & -4416.67\\ 0 & -4416.67 & 4416.67-\lambda\end{vmatrix}=0$$

SARRUS kuralına göre:

$$f(\lambda)=(6279.95-2\lambda)(8833.33-1.25\lambda)(4416.67-\lambda)-4416.67^3-4416.67^2(6279.95-2\lambda)=0$$

$$f(\lambda)=2.5\lambda^3-36558.30\lambda^2+1.0965\cdot10^8\lambda-3.63469\cdot10^{10}=0$$

Polinomun katsayılarının çok büyük olduğuna dikkat ediniz.

NEWTON-RAPHSON metodu ile kökler hesaplanırsa(bak: bölüm 36):

```
C:\NANALIZ\Basic\QBasic.EXE
Polinomun kökleri(NewtonRapson):

Kök No     Gerçek kısım
     1       377.852816694985
     2       3621.87316627094
     3       10623.5940170341
```

λ_1 λ_2 λ_3

En küçük özdeğer→En büyük periyot

$\lambda_1=377.85$ → $\omega_1=\sqrt{377.85}=19.44$ rad/s → $T_1=\dfrac{2\pi}{19.44}=0.32$ s $\quad f_1=\dfrac{1}{0.32}=3.1\,\text{Hz}$

$\lambda_2=3621.87$ → $\omega_2=\sqrt{3621.87}=60.18$ rad/s → $T_2=\dfrac{2\pi}{60.18}=0.10$ s $\quad f_2=\dfrac{1}{0.10}=10\,\text{Hz}$

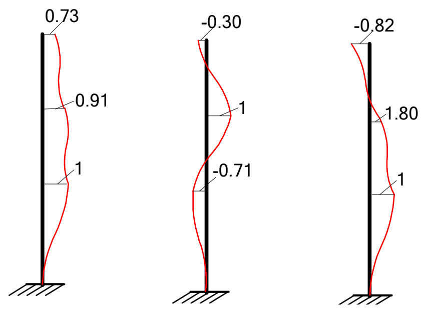
$\lambda_3=10623.59$ → $\omega_3=\sqrt{10623.59}=103.07$ rad/s → $T_3=\dfrac{2\pi}{103.07}=0.06$ s $\quad f_3=\dfrac{1}{0.06}=16.7\,\text{Hz}$

a)Eigen04 programı(bak: bölüm 34) ile özdeğer, frekans, periyot ve modların hesabı:

26.13 genel özdeğer probleminin K ve M matrisi programa verilierek λ_i ve $\underline{\phi}_i$ hesaplanabilir:

```
C:\NANALIZ\Basic\QBasic.EXE
Özdeğer ve özvektörler(Eigen04-Tridib-Bandv):
Lamda 1 = 377.851357405369
 .731107225315291   .914448755712656   1

Lamda 2 = 3621.90343402301
-.824564251413546   .179946454176759   1

Lamda 3 = 10623.5534085716
-.295090541492311   1 -.711575290610 58
```

λ_1 $\underline{\phi}_1$ λ_2 $\underline{\phi}_2$ λ_3 $\underline{\phi}_3$



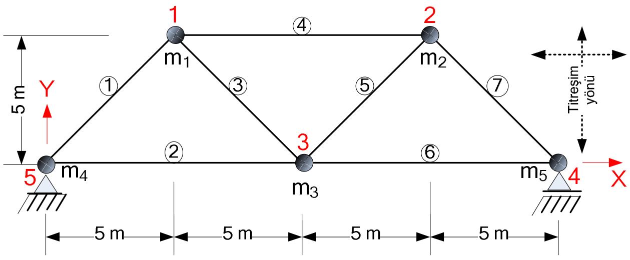
1. Mod 2. Mod 3. Mod

$\lambda_1=377.85$ → $\omega_1=\sqrt{377.85}=19.44$ rad/s → $T_1=\dfrac{2\pi}{19.44}=0.32$ s $\quad f_1=\dfrac{1}{0.32}=3.1\,\text{Hz}$

$\lambda_2=3621.87$ → $\omega_2=\sqrt{3621.87}=60.18$ rad/s → $T_2=\dfrac{2\pi}{60.18}=0.10$ s $\quad f_2=\dfrac{1}{0.10}=10\,\text{Hz}$

$\lambda_3=10623.55$ → $\omega_3=\sqrt{10623.55}=103.07$ rad/s → $T_3=\dfrac{2\pi}{103.07}=0.06$ s $\quad f_3=\dfrac{1}{0.06}=16.7\,\text{Hz}$

Sayısal Örnek 2[1]:



Şekilde görülen kafes kiriş IPB200 profili ile üretilecektir. Profil elemanların kütleri düğümlerde toplanmış varsayılmaktadır. Her noktada ayrıca 40 kg ek kütle vardır. Sistemin tüm serbest titreşim frekans, periyot ve modlarını belirleyiniz.

Verilerin hazırlanması:

Ton, metre, kilo Newton ve saniye birimleri kullanılacaktır.

E=2.1·10^6 N/mm^2 =2.1·10^8 kN/m^2 (Yapı çeliği elastisite modülü)
IPB 200 için profil tablosundan: A=78.1·10^{-4} m^2 (kesit alanı), m=61.3 kg/m (birim boy kütlesi)
EA=1640100 kN

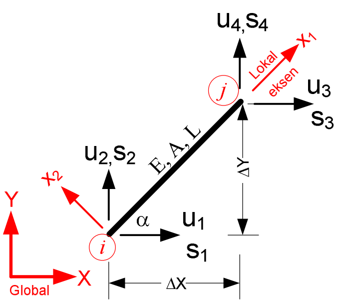
Düğümlerdeki kütleler:
Çubuk boyları: L=10 m (yatay elemanlarda), L=7.0711 m (diyagonal elemanlarda)
m_1= m_2=40+61.3(10+2·(7.0711)/2=780 kg=0.78 t
m_3=40+61.3(2·10+2.7.0711)/2=1086 kg=1.086 t
m_4=m_5=40+61.3(10+7.0711/2=563 kg=0.563 t

Düğümdeki kütle= 40 kg sabit kütle + düğüme birleşen elemanların toplam kütlelerinin yarısı

Sonlu Elemanlar Metodu ile çözüm:

- Sistemin 2x5=10 serbestlik derecesi vardır (her düğümde X ve Y yönünde).
- Her kafes elemanın global rijitlik matrisi kurulur.
- Direkt rijitlik metodu ile elemanların rijitlik matrisleri sistem rijitlik matrisi $\underline{K}$ ya eklenir. $\underline{K}$ nın boyutu 10x10 dur.
- 10x10 boyutlu kütle matrisi $\underline{M}$ kurulur. Kütleler düğüm noktalarına toplanarak modellendiğinden $\underline{M}$ diyagonaldir.
- $\underline{K}\,\underline{\phi}-\omega^2\underline{M}\,\underline{\phi}=\underline{0}$ serbest titreşim genel özdeğer denklemi oluşturulur, 10 denklem vardır.
- Sistemin sınır şartları $\underline{K}\,\underline{\phi}-\omega^2\underline{M}\,\underline{\phi}=\underline{0}$ denklemine işlenir. 4 noktası Y yönünde, 5 noktası hem X hem de Y yönünde serbest değildir. Sistem bu yönlerde(8., 9. ve 10. yönlerde) deplasman ve titreşim yapamaz. 8.,9. ve 10. satır ve sütunlar $\underline{K}\,\underline{\phi}-\omega^2\underline{M}\,\underline{\phi}=\underline{0}$ bağıntısından çıkartılır. 7 serbestlik derecesi kalır.
- Sınır şartları işlenmiş 7 serbestlik dereceli $\underline{K}\,\underline{\phi}-\omega^2\underline{M}\,\underline{\phi}=\underline{0}$ genel özdeğer probleminde $\lambda=\omega^2$ dönüşümü yapılır, $\underline{K}\,\underline{\phi}-\lambda\underline{M}\,\underline{\phi}=\underline{0}$ olur.
- $\underline{K}$ ve $\underline{M}$ matrisi Eigen04(bak bölüm 34) programına verilerek λ_i özdeğerleri ve $\underline{\phi}_i$ özvektörleri(modlar) hesaplanır.
- $\omega_i=\sqrt{\lambda_i}$, $T_i=\dfrac{2\pi}{\omega_i}$, $f_i=\dfrac{1}{T_i}$ den açısal frekanslar, periyotlar bulunur.

Düzlem kafes elemanın global rijitlik matrisi:



i, j: Elemanın bağlı olduğu düğüm no
E: Malzeme elastisite modülü
A: Eleman kesit alanı
L Eleman boyu
$u_1,\ldots,u_4$: Eleman global deplasmanları
$s_1,\ldots,s_4$: Eleman global kuvvetleri
$\underline{u}$: Eleman global deplasman vektörü
$\underline{s}$: Eleman global deplasman vektörü
$\underline{k}$: Eleman global rijitlik matrisi

Elemanın global denge denklemi:

$$\underline{k}\,\underline{u}=\underline{s}$$

$$L=\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}$$

$$\alpha_{11}=Cos\,\alpha=\frac{\Delta X}{L}$$

$$\alpha_{12}=Sin\,\alpha=\frac{\Delta Y}{L}$$

$$\underline{k}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\alpha_{11}^2 & \alpha_{11}\alpha_{12} & -\alpha_{11}^2 & -\alpha_{11}\alpha_{12}\\ \alpha_{11}\alpha_{12} & \alpha_{12}^2 & -\alpha_{11}\alpha_{12} & -\alpha_{12}^2\\ -\alpha_{11}^2 & -\alpha_{11}\alpha_{12} & \alpha_{11}^2 & \alpha_{11}\alpha_{12}\\ -\alpha_{11}\alpha_{12} & -\alpha_{12}^2 & \alpha_{11}\alpha_{12} & \alpha_{12}^2\end{bmatrix}$$

[1] Bu örneğin anlaşılabilmesi için sonlu elemanlar metodu bilgisi gerekir.

Gerekli büyüklükler tablosu

Eleman	i→j	ΔX	ΔY	L	$\alpha_{11}=\frac{\Delta X}{L}$	$\alpha_{12}=\frac{\Delta Y}{L}$	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}\alpha_{11}^2$	$\frac{EA}{L}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\frac{EA}{L}\alpha_{12}^2$
1	5→1	5	5	7.07	0.7071	0.7071	231980	115988	115988	115988
2	5→3	10	0	10	1	0	164010	164010	0	0
3	1→3	5	-5	7.07	0.7071	-0.7071	231980	115988	-115988	115988
4	1→2	10	0	10	1	0	164010	164010	0	0
5	3→2	5	-5	7.07	0.7071	0.7071	231980	115988	115988	115988
6	3→4	10	0	10	1	0	164010	164010	0	0
7	2→4	5	-5	7.07	0.7071	-0.7071	231980	115988	-115988	115988

a=115988, b=164010 olmak üzere elemanların global rijitlik matrisleri:

$$\underline{k}^1=\begin{bmatrix} a & a & -a & -a \\ a & a & -a & -a \\ -a & -a & a & a \\ -a & -a & a & a \end{bmatrix} \quad \underline{k}^2=\begin{bmatrix} b & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{k}^3=\begin{bmatrix} a & -a & -a & a \\ -a & a & a & -a \\ -a & a & a & -a \\ a & -a & -a & a \end{bmatrix} \quad \underline{k}^4=\begin{bmatrix} b & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^5=\begin{bmatrix} a & a & -a & -a \\ a & a & -a & -a \\ -a & -a & a & a \\ -a & -a & a & a \end{bmatrix} \quad \underline{k}^6=\begin{bmatrix} b & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{k}^7=\begin{bmatrix} a & -a & -a & a \\ -a & a & a & -a \\ -a & a & a & -a \\ a & -a & -a & a \end{bmatrix}$$

Sistem rijitlik matrisi:

$$\underline{K}=\begin{bmatrix} 2a+b & 0 & -b & 0 & -a & a & 0 & 0 & -a & -a \\ 0 & 2a & 0 & 0 & a & -a & 0 & 0 & -a & -a \\ -b & 0 & 2a+b & 0 & -a & -a & -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a & -a & -a & a & -a & 0 & 0 \\ -a & a & -a & -a & 2a+2b & 0 & -b & 0 & -b & 0 \\ a & -a & -a & -a & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & -b & 0 & a+b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & 0 & 0 & -a & a & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & a+b & a \\ -a & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \end{bmatrix}$$

Sistem kütle matrisi:

$$\underline{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}$$

$\underline{K}\,\underline{\phi} - \omega^2\,\underline{M}\,\underline{\phi} = \underline{0}$ **titreşim denklemi:**

$$
\begin{array}{c}
\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{array}\\
\begin{bmatrix}
2a+b & 0 & -b & 0 & -a & a & 0 & 0 & -a & -a\\
0 & 2a & 0 & 0 & a & -a & 0 & 0 & -a & -a\\
-b & 0 & 2a+b & 0 & -a & -a & -a & a & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2a & -a & -a & a & -a & 0 & 0\\
-a & a & -a & -a & 2a+2b & 0 & -b & 0 & -b & 0\\
a & -a & -a & -a & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -a & a & -b & 0 & a+b & -a & 0 & 0\\
0 & 0 & a & -a & 0 & 0 & -a & a & 0 & 0\\
-a & -a & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & a+b & a\\
a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a
\end{bmatrix}
\end{array}
\underline{\phi} - \omega^2
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{array}\\
\begin{bmatrix}
m_1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&m_1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&m_2&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&m_2&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&m_3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&m_3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&m_4&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&m_4&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&m_5&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&m_5
\end{bmatrix}
\end{array}
\underline{\phi} =
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

Sınır şartlarının işlenmesi:

4 nolu düğümdeki m_4 kütlesi Y yönünde salınım yapamaz. 8. satır ve 8. kolon silinmelidir! 5 nolu düğümdeki m_4 kütlesi hem X hem de Y yönünde salınım yapamaz. 9. ve 10. satırlar ve kolonlar silinmelidir!

Satırlar silindikten sonra 7 serbestlik derecesi, dolayısıyla 7 denklem, kalır. Genel özdeğer problemi:

K

$$
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}
\begin{bmatrix}
395986 & & & & & & \\
0 & 231976 & & & & \textit{Simetrik} & \\
-164010 & 0 & 395986 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 231976 & & & \\
-115988 & 115988 & -115988 & -115988 & 559996 & & \\
115988 & -115988 & -115988 & -115988 & 0 & 231976 & \\
0 & 0 & -115988 & 115988 & -164010 & 0 & 279998
\end{bmatrix}
\underline{\phi}
$$

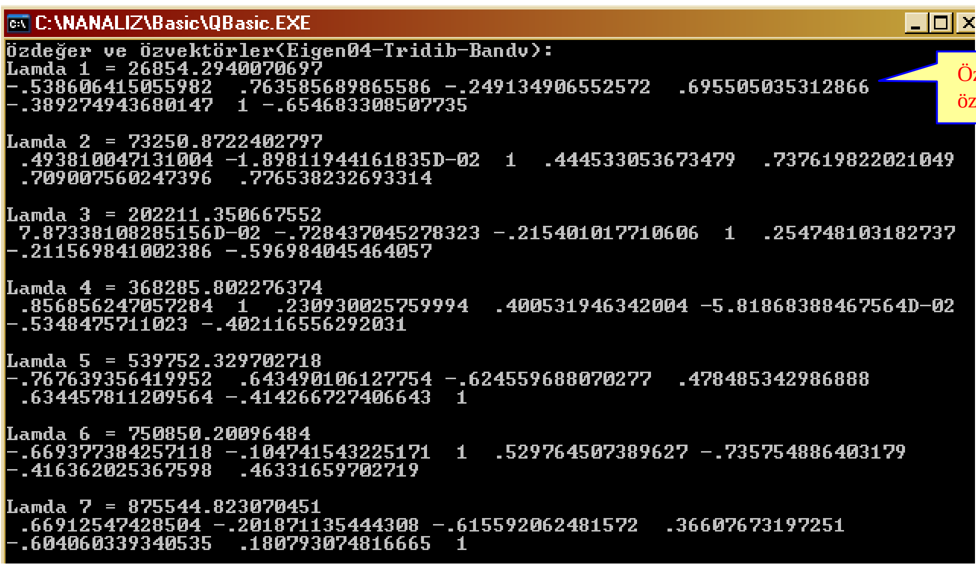
M

$$
-\omega^2
\begin{bmatrix}
0.78 & & & & & & \\
 & 0.78 & & & & & \\
 & & 0.78 & & & & \\
 & & & 0.78 & & & \\
 & & & & 1.086 & & \\
 & & & & & 1.086 & \\
 & & & & & & 0.563
\end{bmatrix}
\underline{\phi} =
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

olur.

Özdeğer ve özvektörlerin hesabı:

$\lambda = \omega^2$ alınarak $(\underline{A}\underline{\phi} - \lambda \underline{M})\underline{\phi} = \underline{0}$ genel özdeğer probleminin yukarıda hesaplanan K ve M matrisleri Eigen04 programına verilirse özdeğerler ve özvektörler bulunur:



```
C:\NANALIZ\Basic\QBasic.EXE
özdeğer ve özvektörler(Eigen04-Tridib-Bandv):
Lamda 1 = 26854.2940070697
-.538606415055982  .763585689865586 -.249134906552572  .695505035312866
-.389274943680147  1 -.654683308507735

Lamda 2 = 73250.8722402797
 .493810047131004 -1.89811944161835D-02  1  .444533053673479  .737619822021049
 .709007560247396  .776538232693314

Lamda 3 = 202211.350667552
 7.87338108285156D-02 -.728437045278323 -.215401017710606  1  .254748103182737
-.211569841002386 -.596984045464057

Lamda 4 = 368285.802276374
 .856856247057284  1  .230930025759994  .400531946342004 -5.81868388467564D-02
-.5348475711023 -.402116556292031

Lamda 5 = 539752.329702718
-.767639356419952  .643490106127754 -.624559688070277  .478485342986888
 .634457811209564 -.414266727406643  1

Lamda 6 = 750850.20096484
-.669377384257118 -.104741543225171  1  .529764507389627 -.735754886403179
-.416362025367598  .46331659702719

Lamda 7 = 875544.823070451
 .669125474285O4 -.201871135444308 -.615592062481572  .36607673197251
-.604060339340535  .180793074816665  1
```

Özdeğerler ve normalleştirilmiş özvektörler (≡ modlar)

Açısal frekans, periyot, frekans ve modlar:

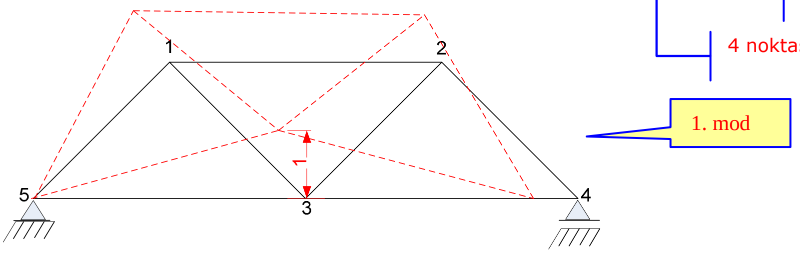
$$\lambda_1 = 26854.29 \qquad \omega_1 = \sqrt{26854.29} = 163.87 \text{ rad/s} \qquad T_1 = \frac{2\pi}{163.87} = 0.038\,\text{s} \qquad f_1 = \frac{1}{0.038} = 26.3\,\text{Hz}$$

5 ← Nokta no

$$\underline{\phi}_1^T = \big[\overbrace{-0.54 \quad 076}^{1} \quad \overbrace{-0.25 \quad 0.70}^{2} \quad \overbrace{-0.40 \quad 1}^{3} \quad \overbrace{-0.65 \quad 0}^{4} \quad \underbrace{\overbrace{0 \quad 0}^{5}}\big]$$

5 noktasının x ve y yönü sıfır deplasmanı

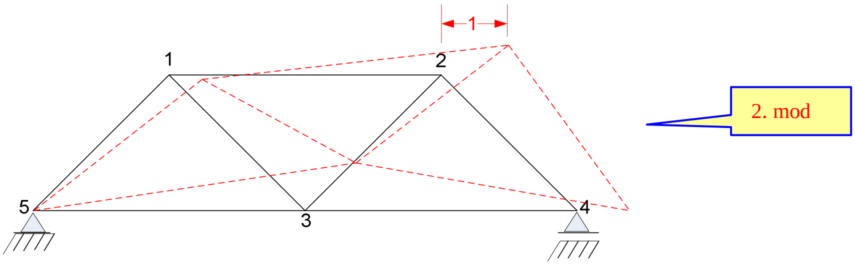
4 noktasının y yönü sıfır deplasmanı eklendi



$$\lambda_2 = 73250.87 \qquad \omega_2 = \sqrt{73250.87} = 270.65 \text{ rad/s} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{270.65} = 0.023\,\text{s} \qquad f_2 = \frac{1}{0.023} = 43.5\,\text{Hz}$$

5 ← Nokta no

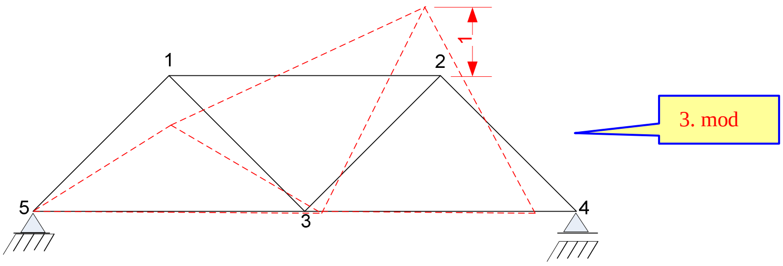
$$\underline{\phi}_2^T = \big[\overbrace{0.49 \quad -0.02}^{1} \quad \overbrace{1 \quad 0.44}^{2} \quad \overbrace{0.74 \quad 0.71}^{3} \quad \overbrace{0.78 \quad 0}^{4} \quad \overbrace{0 \quad 0}^{5}\big]$$



$$\lambda_3 = 202211.35 \qquad \omega_3 = \sqrt{202211.35} = 449.70 \text{ rad/s} \qquad T_3 = \frac{2\pi}{449.70} = 0.014 \text{ s} \qquad f_3 = \frac{1}{0.014} = 71.4\,\text{Hz}$$

5 ← Nokta no

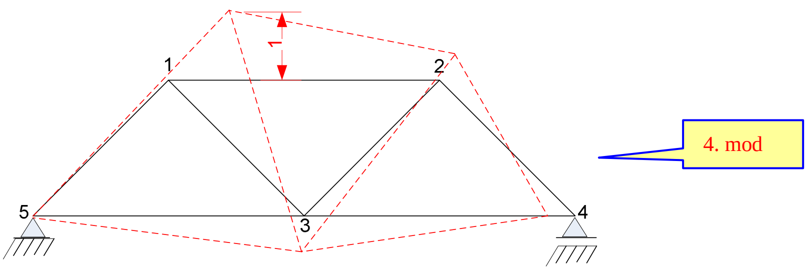
$$\underline{\phi}_3^T = \big[\overbrace{0.08 \quad -0.73}^{1} \quad \overbrace{-0.22 \quad 1}^{2} \quad \overbrace{0.25 \quad -0.21}^{3} \quad \overbrace{-0.60 \quad 0}^{4} \quad \overbrace{0 \quad 0}^{5}\big]$$



$$\lambda_4 = 368285.80 \qquad \omega_4 = \sqrt{368285.80} = 606.87 \text{ rad/s} \qquad T_4 = \frac{2\pi}{606.87} = 0.010 \text{ s} \qquad f_4 = \frac{1}{0.010} = 100\,\text{Hz}$$

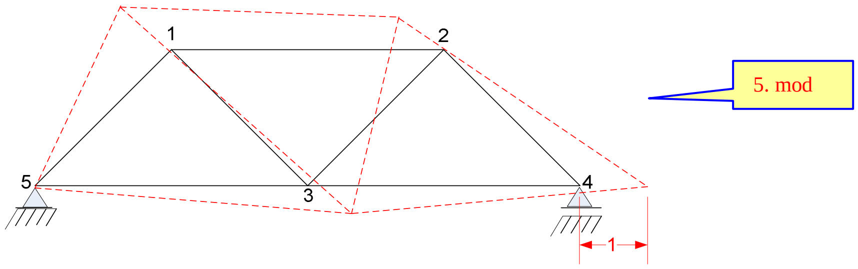
5 ← Nokta no

$$\underline{\phi}_4^T = \big[\overbrace{0.86 \quad 1}^{1} \quad \overbrace{0.23 \quad 0.40}^{2} \quad \overbrace{-0.06 \quad -0.53}^{3} \quad \overbrace{-0.40 \quad 0}^{4} \quad \overbrace{0 \quad 0}^{5}\big]$$



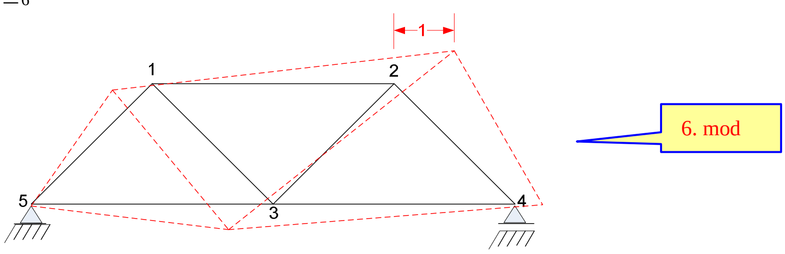
$$\lambda_5 = 539752.33 \quad \omega_5 = \sqrt{539752.33} = 734.68 \text{ rad/s} \quad T_5 = \frac{2\pi}{734.68} = 0.009 \text{ s} \quad f_5 = \frac{1}{0.009} = 111.1\,\text{Hz}$$

$$\underline{\phi}_5^T = [\overbrace{-0.77 \quad 0.64}^{1} \quad \overbrace{-0.62 \quad 0.48}^{2} \quad \overbrace{0.63 \quad -0.41}^{3} \quad \overbrace{1 \quad 0}^{4} \quad \overbrace{0 \quad 0}^{5 \leftarrow \text{Nokta no}}]$$



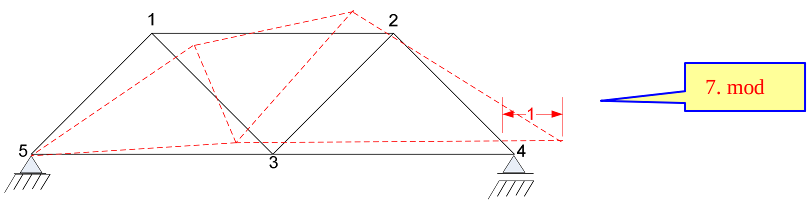
$$\lambda_6 = 750850.20 \qquad \omega_6 = \sqrt{750850.20} = 866.5 \text{ rad/s} \qquad T_6 = \frac{2\pi}{866.5} = 0.007 \text{ s} \qquad f_6 = \frac{1}{0.007} = 142.9\,\text{Hz}$$

$$\underline{\phi}_6^T = [\overbrace{-0.67 \quad -0.10}^{1} \quad \overbrace{1 \quad 0.53}^{2} \quad \overbrace{-0.74 \quad -0.42}^{3} \quad \overbrace{0.46 \quad 0}^{4} \quad \overbrace{0 \quad 0}^{5 \leftarrow \text{Nokta no}}]$$

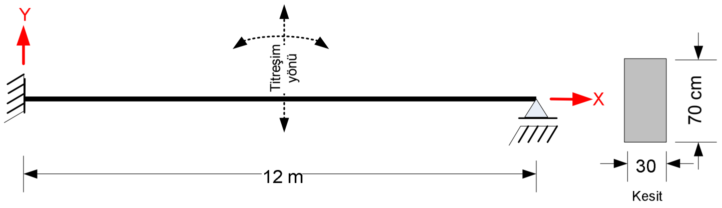


$$\lambda_7 = 875544.82 \quad \omega_7 = \sqrt{875544.82} = 935.71 \text{ rad/s} \quad T_7 = \frac{2\pi}{935.71} = 0.007 \text{ s} \quad f_7 = \frac{1}{0.007} = 142.9\,\text{Hz}$$

$$\underline{\phi}_7^T = [\overbrace{0.67 \quad -0.20}^{1} \quad \overbrace{-0.62 \quad 0.37}^{2} \quad \overbrace{-0.60 \quad 0.18}^{3} \quad \overbrace{1 \quad 0}^{4} \quad \overbrace{0 \quad 0}^{5 \leftarrow \text{Nokta no}}]$$



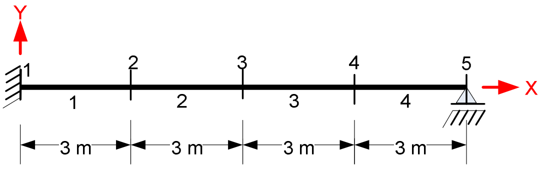
Sayısal Örnek 3[2]:

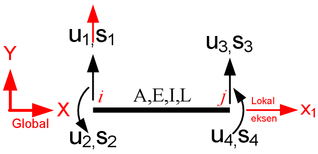


Şekilde görülen betonarme kiriş C30/37 betonu ile yapılacaktır. Kirişi dört eşit paçaya bölerek serbest titreşim denklemini kurunuz. İlk üç açısal frekansını, periyodunu ve frekansını bulunuz, bunlara ait titreşim modlarını çiziniz.

Model:

Sistem her biri 3 m boyunda 4 adet eleman ile modellenmiş, boyuna uzama olmadığı varsayılmıştır. Eleman lokal rijitlik ve yayılı kütle matrisi aşağıda verilmiştir(sonlu elemanlar metodu). Global ve lokal eksenler çakıştığından transformasyon matrisi birim matristir, transformasyona gerek yoktur.





A: Eleman kesit alanı
E: Malzeme elastisite modülü
I: Kesit atalet momenti
L: Eleman boyu
m: Eleman birim boy kütlesi
$u_1,\ldots,u_4$: Eleman global deplasmanları
$s_1,\ldots,s_4$: Eleman global kuvvetleri
$\underline{k}$: Eleman global rijitlik matrisi
$\underline{m}$: Eleman yayılı kütle matrisi

$$\underline{k}=\begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

$$\underline{m}=\frac{mL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Verilerin hazırlanması:

Ton, metre, kilo Newton ve saniye birimleri kullanılacaktır.

Betonarme betonunun birim kütlesi: 2.5 ton/m^3 (TS 498-1997 den)
C30/37 için elastisite modülü: E=31800 N/mm^2=31.8$\cdot$10^6 kN/m^2 (TS 500-2000 den)

Kesit atalet momenti: I=0.30$\cdot$0.70/12=8575$\cdot$10^{-6} m^4
EI=31.8$\cdot$10$^6\cdot$8575$\cdot$10^{-6}=272685 kNm^2
Eleman boyu: L=3 m
Elemanın birim boy kütlesi: m=0.30$\cdot$0.70$\cdot$2.5=0.525 t/m

Sistemin serbest titreşim denklemi

$$\underline{K}\,\underline{\phi}-\omega^2\underline{M}\,\underline{\phi}=0$$

Burada $\underline{K}$ sistemin rijitlik matrisi, $\underline{M}$ kütle matrisi ve ω açısal titreşim frekansıdır. $\lambda=\omega^2$ alınarak

$$(\underline{K}-\lambda\underline{M})\underline{\phi}=0$$

[2] Bu örneğin anlaşılabilmesi için sonlu elemanlar metodu bilgisi gerekir.

Özdeğer problemi elde edilir. K ve M direkt rijitlik metodu ile kurulur. Her noktada iki serbestlik derecesi (bir düşey deplasman ve bir dönme) olduğundan bu matrisler $2 \cdot 5=10$ satır ve kolonludur.

Eleman rijitlik ve kütle matrisleri:

Elemanların k ve m matrisleri aynıdır. Çünkü tüm elemanların kesitleri ve boyları aynıdır.

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 121193.33 & 181790.00 & -121193.33 & 181790.00 \\ 181790.00 & 363580.00 & -181790.00 & 181790.00 \\ -121193.33 & -181790.00 & 121193.33 & -181790.00 \\ 181790.00 & 181790.00 & -181790.00 & 363580.00 \end{bmatrix} \qquad \underline{m} = \begin{bmatrix} 0.585 & 0.2475 & 0.2025 & -0.14625 \\ 0.2475 & 0.135 & 0.14625 & -0.10125 \\ 0.2025 & 0.14625 & 0.585 & -0.2475 \\ -0.14625 & -0.10125 & -0.2475 & 0.135 \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisi

Eleman yayılı kütle matrisi

Sistem rijitlik matrisi(direkt rijitlik metodu):

İşlemleri basitleştirmek için a=121193, b=181790, c=363580 alalım(son iki ondalık hane ihmal edildi) :

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} a & b & -a & b \\ b & c & -b & b \\ -a & -b & a & -b \\ b & b & -b & c \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} a & b & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2a & 0 & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2c & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 2a & 0 & -a & b & 0 & 0 \\ & & & & & 2c & -b & b & 0 & 0 \\ & & & & & & 2a & 0 & -a & b \\ & & \text{Simetrik} & & & & & 2c & -b & b \\ & & & & & & & & a & -b \\ & & & & & & & & & c \end{bmatrix}$$

Sistem rijitlik matrisi

Sistem kütle matrisi(direkt rijitlik metodu):

Sistem kütle matrisi

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0.585 & 0.2475 & 0.2025 & -0.14625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.135 & 0.14625 & -0.10125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.270 & 0.14625 & -0.10125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625 & 0 & 0 \\ & & & & & 0.270 & 0.14625 & -0.10125 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625 \\ & & \text{Simetrik} & & & & & 0.270 & 0.14625 & -0.10125 \\ & & & & & & & & 0.585 & -0.2475 \\ & & & & & & & & & 0.135 \end{bmatrix}$$

$(\underline{K}-\lambda\underline{M})\underline{\phi}=\underline{0}$ **titreşim denklemi:**

$$
\left(
\begin{bmatrix}
a & b & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & c & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & 2a & 0 & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & 2c & -b & b & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 2a & 0 & -a & b & 0 & 0\\
 & & & & & 2c & -b & b & 0 & 0\\
 & \text{Simetrik} & & & & & 2a & 0 & -a & b\\
 & & & & & & & 2c & -b & b\\
 & & & & & & & & a & -b\\
 & & & & & & & & & c
\end{bmatrix}
-\lambda
\begin{bmatrix}
0.585 & 0.2475 & 0.2025 & 0.14625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & 0.135 & 0.14625 & -0.10125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & 1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & 0.270 & 0.14625 & -0.10125 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625 & 0 & 0\\
 & & & & & 0.270 & 0.14625 & -0.10125 & 0 & 0\\
 & & & & & & 1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625\\
 & & \text{Simetrik} & & & & & 0.270 & 0.14625 & -0.10125\\
 & & & & & & & & 0.585 & -0.2475\\
 & & & & & & & & & 0.135
\end{bmatrix}
\right)\underline{\phi}=\underline{0}
$$

Sınır şartları:

1 noktasında düşey deplasman ve dönme sıfır, 5 noktasında düşey deplasman sıfırdır. Deplasmanların ve dönmelerin sıfır olduğu yönlerde titreşim olamaz. $(\underline{K}-\lambda\underline{M})\underline{\phi}=\underline{0}$ denkleminden bu serbestlik derecelerine ait satır ve kolonların (1., 2., 9. satırlar ve kolonlar) silinmesi gerekir. a, b ve c değerleri yerine konarak $(\underline{K}-\lambda\underline{M})\underline{\phi}=\underline{0}$ titreşim denklemi

$$
\left(
\begin{bmatrix}
242386 & 0 & -121193 & 181790 & 0 & 0 & 0\\
 & 727160 & -181790 & 181790 & 0 & 0 & 0\\
 & & 242386 & 0 & -121193 & 181790 & 0\\
 & & & 727160 & -181790 & 181790 & 0\\
\text{Simetrik} & & & & 242386 & 0 & 181790\\
 & & & & & 727160 & 181790\\
 & & & & & & 363580
\end{bmatrix}
-\lambda
\begin{bmatrix}
1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625 & 0 & 0 & 0\\
 & 0.270 & 0.14625 & -0.10125 & 0 & 0 & 0\\
 & & 1.170 & 0 & 0.2025 & -0.14625 & 0\\
 & & & 0.270 & 0.14625 & -0.10125 & 0\\
\text{Simetrik} & & & & 1.170 & 0 & -0.14625\\
 & & & & & 0.270 & -0.10125\\
 & & & & & & 0.135
\end{bmatrix}
\right)\underline{\phi}=\underline{0}
$$

K

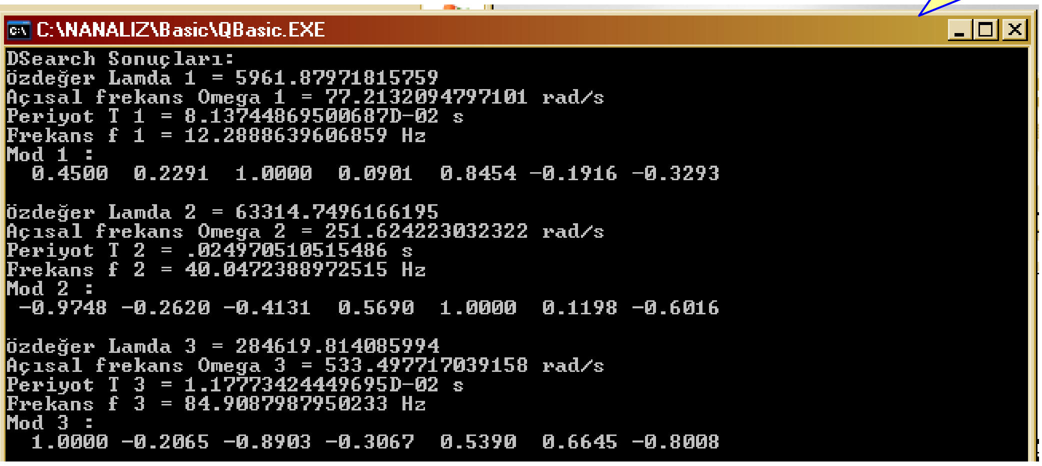
M

Görüldüğü gibi, K ve M simetrik ve bant yapıya sahiptir, bant genişliği 4 dür. Sonlu elemanlar teorisine göre her iki matris pozitif tanımlıdır.

En küçük 3 özdeğerin ve bunlara ait özvektörlerin hesabı için uygun program DSearch tür (bak: Bölüm 35).

K ve M matrislerine ait bilgiler DSearch adlı bir programa verilerek en küçük ilk 3 özdeğer ve buna karşılık gelen açısal frekans, periyot, frekans ve modlar hesaplanmıştır.

DSearch sonuçları


C:\NANALIZ\Basic\QBasic.EXE

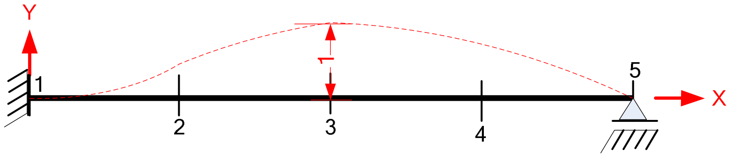
```
DSearch Sonuçları:
özdeğer Lamda 1 = 5961.87971815759
Açısal frekans Omega 1 = 77.2132094797101 rad/s
Periyot T 1 = 8.13744869500687D-02 s
Frekans f 1 = 12.2888639606859 Hz
Mod 1 :
  0.4500  0.2291  1.0000  0.0901  0.8454 -0.1916 -0.3293

özdeğer Lamda 2 = 63314.7496166195
Açısal frekans Omega 2 = 251.624223032322 rad/s
Periyot T 2 = .024970510515486 s
Frekans f 2 = 40.0472388972515 Hz
Mod 2 :
 -0.9748 -0.2620 -0.4131  0.5690  1.0000  0.1198 -0.6016

özdeğer Lamda 3 = 284619.814085994
Açısal frekans Omega 3 = 533.497717039158 rad/s
Periyot T 3 = 1.17773424449695D-02 s
Frekans f 3 = 84.9087987950233 Hz
Mod 3 :
  1.0000 -0.2065 -0.8903 -0.3067  0.5390  0.6645 -0.8008
```

Program sonuçları, mod vektörlerine 1 ve 5 noktasının sıfır deplasmanları da eklenerek, aşağıda yorumlanmıştır.

1.Mod:

$\lambda_1 = 5961.88,\ \omega_1 = 77.21\, rad/s,\ T_1 = 0.08\, s,\ \ f_1 = 12.29\, Hz$

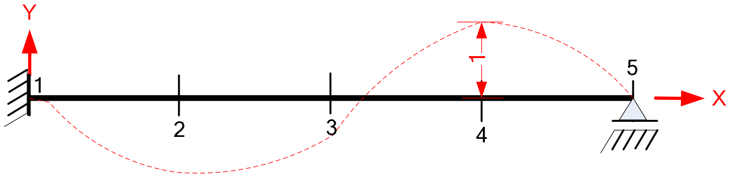
$\underline{\phi}_1^T = [0 \quad 0 \quad 0.45 \quad 0.23 \quad 1 \quad 0.09 \quad 0.85 \quad -0.19 \quad 0 \quad -0.33]$



2.Mod:

$\lambda_2 = 63314.75,\ \omega_2 = 251.62\, rad/s,\ T_2 = 0.02\, s,\ \ f_2 = 40.05\, Hz$

$\underline{\phi}_2^T = [0 \quad 0 \quad -0.97 \quad -0.26 \quad -0.41 \quad 0.57 \quad 1 \quad 0.12 \quad 0 \quad -0.60]$



3.Mod:

$\lambda_3 = 284619.81,\ \omega_3 = 533.50\, rad/s,\ T_3 = 0.01\, s,\ \ f_3 = 84.91\, Hz$

$\underline{\phi}_3^T = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -0.21 \quad -0.89 \quad -0.31 \quad 0.54 \quad 0.67 \quad 0 \quad -0.80]$