ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli

Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

Katsayılar matrisi

Özdeğer

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}\ \underline{\mathbf{x}} = \lambda\ \underline{\mathbf{x}}$$

Özvektör

Özvektör

25

ÖZDEĞER PROBLEMİ

Matrisin özdeğerleri ve özvektörleri
Standart özdeğer problemi

25. STANDART ÖZDEĞER PROBLEMİ

Mühendislik bilimlerinin hemen her dalında, özellikle dinamik ve stabilite problemlerinde standart özdeğer problemi adı verilen

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\lambda x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=\lambda x_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=\lambda x_n \end{matrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Katsayılar matrisi}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Özvektör}} = \underbrace{\lambda}_{\text{Özdeğer}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Özvektör}} \tag{25.1}$$

$$\underline{A}\underline{x}=\lambda\underline{x} \tag{25.2}$$

tipinde denklem sistemi ile karşılaşılır. Burada $\underline{A}_{nxn}$ gerçek sayılardan oluşan bir kare matris, λ sabit bir sayı, $\underline{x}$ sıfırdan farklı bir vektördür. 25.1 ifadesine standart özdeğer problemi, λ ya $\underline{A}$ nın özdeğeri, $\underline{x}$ e $\underline{A}$ nın özvektörü denir. $\underline{A}$ bilinir λ ve $\underline{x}$ bilinmez. 25.1 denklemini sağlayan λ sabitinin ve $\underline{x}\neq\underline{0}$ vektörünün hesabı istenir. Özdeğer problemi karşı tarafı da bilinmeyen bir denklem sistemidir.

25.1 denklemi, $\underline{I}$ birim matris olmak üzere

$$\underline{A}\underline{x}=\lambda\underline{I}\,\underline{x}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}=0$$

$$(\underline{A}-\lambda\underline{I}\,)\underline{x}=(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}=\underline{0}$$

$$(\underline{A}-\lambda\underline{I}\,)\underline{x}=\begin{bmatrix} a_{11}-\overbrace{\lambda}^{\text{Özdeğer}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ . & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}^{\text{Özvektör}}=\underline{0} \quad \text{Homojen denklem sistemi} \tag{25.3}$$

olarak yazılabilir. Demek ki, özdeğer problemi kare katsayılı bir homojen denklem sistemidir. Ancak, çözüm homojen denklem sisteminin çözümü kadar basit değildir. Çünkü hem λ hem de $\underline{x}$ bilinmemektedir. Bölüm 10 da kare katsayılı bir homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin tekil, yani determinantının sıfır olması gerektiği açıklanmıştı. O halde, 25.3 ün $\underline{x}\neq 0$ çözümünün olabilmesi için

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{I}\,)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ . & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{25.4}$$

olmalıdır. 25.3 ve 25.4 bağıntılarının anlamı şudur: **λ özdeğeri, katsayılar matrisi $\underline{A}$ nın determinantını sıfır yapan bir sayıdır. λ özdeğerini hesaplamak için; katsayılar matrisinin**

diyagonal elemanlarından λ çıkartılır, oluşan matrisin determinantı hesaplanır, sıfıra eşitlenir, λ özdeğerinin sayısal değeri bulunur. λ nın sayısal değeri 25.3 de yerine konur, homojen denklem sistemi çözülür, özdeğer vektörü $\underline{x}$ hesaplanır.

Örnek 1: Diyagonal matrisin özdeğer problemi

$$\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda=? \qquad \underline{x}=?$$

25.3 e göre:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & & \\ & -3-\lambda & \\ & & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

25.4 e göre, katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalı:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & & \\ & -3-\lambda & \\ & & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & & \\ & -3-\lambda & \\ & & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

> **Hatırlatma:** diyagonal matrisin determinantı diyagonal elemanların çarpımıdır

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & & \\ & -3-\lambda & \\ & & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$$

3. derece polinomunun 3 kökü vardır ≡ determinatı sıfır yapan 3 adet λ vardır ≡ 3 adet özdeğer vardır.

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1$$

Üç farklı özdeğer var, her biri katsayılar matrisi $\underline{A}$ nın determinantını sıfır yapar. 25.3 e göre üç özdeğere karşılık üç farklı $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ ve $\underline{x}_3$ özvektörü olacaktır.

λ_1=2 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_1$ hesaplanır:

$$\begin{bmatrix} \overset{\lambda_1}{2-\lambda_1} & & \\ & -3-\lambda_1 & \\ & & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \overset{\underline{x}_1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \overset{\lambda_1}{2-2} & & \\ & -3-2 & \\ & & 1-2 \end{bmatrix} \overset{\underline{x}_1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & -5 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \overset{\underline{x}_1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sisteminde x_1 serbest değişken olmuştur, çünkü $0x_1=0$ eşitliği vardır. O halde x_1 için herhangi bir değer seçilebilir.. Basit olması için $x_1=1$ seçelim. Son iki denklemden:
$-5x_2=0 \rightarrow x_2=0$
$-1x_3=0 \rightarrow x_3=0$
bulunur.

λ_1=2 özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

λ_2=-3 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_2$ hesaplanır:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & & \\ & -3-\lambda_2 & \\ & & 1-\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2-(-3) & & \\ & -3-(-3) & \\ & & 1-(-3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & & \\ & 0 & \\ & & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sisteminde x_2 serbest değişken olmuştur, çünkü $0x_2=0$ eşitliği vardır. O halde x_2 için herhangi bir değer seçilebilir. $x_2=1$ seçelim. İlk ve son denklemden:
$5x_1=0 \rightarrow x_1=0$
$4x_3=0 \rightarrow x_3=0$
bulunur.

λ_2=-3 özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

λ_3=1 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_3$ hesaplanır:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_3 & & \\ & -3-\lambda_3 & \\ & & 1-\lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & & \\ & -3-1 & \\ & & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sisteminde x_3 serbest değişken olmuştur, çünkü $0x_3=0$ eşitliği vardır. O halde x_3 için herhangi bir değer seçilebilir. $x_3=1$ seçelim.

İlk iki denklemden:
$1x_1=0 \rightarrow x_1=0$
$-4x_2=0 \rightarrow x_2=0$
bulunur.

λ_3=1 özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol: Özdeğerler $\underline{A}\,\underline{x}_i = \lambda_i\,\underline{x}_i$ bağıntısını sağlamalıdır.

$$\underline{A}\underline{x}_1=\lambda_1\underline{x}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\underline{A}\underline{x}_2=\lambda_2\underline{x}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\underline{A}\underline{x}_3=\lambda_3\underline{x}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Görüldüğü gibi, özdeğerler ve özvektörler özdeğer problemini sağlamaktadır.

Genelleştirme:

- $\underline{A}_{nxn}$ diyagonal matrisinin n tane özdeğeri vardır, $\lambda_i=a_{ii}$ dir. $\lambda_i=a_{ii}$ nin özvektörü birim matrisin i. vektörüdür.
- $\underline{I}_{nxn}$ birim matrisinin özdeğerlerinin tümü aynı, λ_i=1 dir. λ_i nin özvektörü birim matrisin i. vektörüdür.
- $\underline{0}_{nxn}$ sıfır matrisinin özdeğerlerinin tümü sıfırdır., λ_i=0 dir. Özvektörleri keyfi herhangi bir vektördür.

Örnek 2: Üst üçgen matrisin özdeğer problemi

$$\underline{U}\,\underline{x}=\lambda\underline{x}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ & -3 & -1\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\quad,\quad \lambda=?\qquad \underline{x}=?$$

25.3 ve 25.4 e göre

$$\begin{bmatrix}2-\lambda & 1 & 2\\ & -3-\lambda & -1\\ & & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad,\quad \det\begin{bmatrix}2-\lambda & 1 & 2\\ & -3-\lambda & -1\\ & & 1-\lambda\end{bmatrix}=0 \text{ olmalı.}$$

Üst üçgen matrisin determinantı diyagonal elemanların çarpımına eşittir:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 2\\ & -3-\lambda & -1\\ & & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\rightarrow(2-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda)=0\quad\begin{cases}\lambda^3-7\lambda+6=0\\ \lambda_1=2,\lambda_2=-3,\lambda_3=1\end{cases}$$

Üç farklı özdeğer var, her biri katsayılar matrisi $\underline{A}$ nın determinantını sıfır yapar. 25.3 e göre üç özdeğere karşılık üç farklı $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ ve $\underline{x}_3$ özvektörü olacaktır.

λ_1=2 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_1$ hesaplanır:

λ_1 $\quad$ $\underline{x}_1$

$$\begin{bmatrix}2-2 & 1 & 2\\ & -3-2 & -1\\ & & 1-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\underline{x}_1$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ & -5 & -1\\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Son iki denklemden:
$-1x_3=0\rightarrow x_3=0$
$-5x_2-1x_3=0\rightarrow x_2=0$
bulunur. Birinci denklemde $0x_1+1x_2+2x_3=0$ dır. $x_2=x_3=0$ yerine konulunca: $0x_1=0$ olur. O halde x_1 serbest değişkendir. Her değer seçilebilir: $x_1=1$

λ_1=2 özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

λ_2=-3 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_2$ hesaplanır:

λ_2 $\quad$ $\underline{x}_2$

$$\begin{bmatrix}2-(-3) & 1 & 2\\ & -3-(-3) & -1\\ & & 1-(-3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\underline{x}_2$

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\\ & 0 & -1\\ & & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Son denklemden:
$4x_3=0\rightarrow x_3=0$
İkinci denklemde $0x_2-1x_3=0$ dır. $x_3=0$ yerine konulunca $0x_2=0$ olur. O halde x_2 serbest değişkendir, her değer seçilebilir, $x_2=1$ seçelim.

Birinci denklemden: $5x_1+1x_2+2x_3=0$. x_2 ve x_3 değerleri yerine konarak $5x_1+1\cdot1+2\cdot0=0$ dan $x_1=-1/5=-0.2$ bulunur.

λ_2=-3 özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_2=\begin{bmatrix}-0.2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

λ_3=1 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_3$ hesaplanır:

λ_3 $\underline{x}_3$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 2 \\ & -3-1 & -1 \\ & & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{x}_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & -4 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Son denklemde:
$0x_3=0$ dır. O halde x_3 serbest değişkendir, her değer seçilebilir, $x_3=1$ seçelim.

2. ve 3. denklemden:
$x_2=(0-(-1)\cdot 1)/(-4)= -0.25$
$x_1=(0-2\cdot 1-1\cdot(-0.25))/1= -1.75$

λ_3=1özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} -1.75 \\ -0.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol: Özdeğerler $\underline{A}\,\underline{x}_i = \lambda_i\,\underline{x}_i$ bağıntısını sağlamalıdır.

$$\underline{U}\,\underline{x}_1 = \lambda_1\,\underline{x}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & -3 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\underline{U}\,\underline{x}_2 = \lambda_2\,\underline{x}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & -3 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\underline{U}\,\underline{x}_3 = \lambda_3\,\underline{x}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & -3 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.75 \\ -025 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1.75 \\ -025 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1.75 \\ -025 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.75 \\ -025 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Özdeğerler ve özvektörler özdeğer problemini sağlamaktadır.

Genelleştirme: nxn boyutlu alt veya üst üçgen matrisin özdeğerleri diyagonal elemanlarına eişittir.

Örnek 3: 2x2 matrisin özdeğer problemi

$$\underline{A}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x} \rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda=? \quad \underline{x}=?$$

4.3 ve 4.4 e göre

$$\begin{bmatrix} -7-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \det\begin{bmatrix} -7-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ olmalı.}$$

Hatırlatma: 2x2 matrisin determinantı=Diyagonal elemanların çarpımı - diğer diyagonal elemanların çarpımıdır.

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-7-\lambda)(-2-\lambda) - 2\cdot(-2) = 0 \rightarrow \lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -6, \lambda_2 = -3$$

İki farklı özdeğer var, her biri katsayılar matrisi $\underline{A}$ nın determinantını sıfır yapar. 25.3 e göre iki özdeğere karşılık iki farklı $\underline{x}_1$ ve $\underline{x}_2$ özvektörü olacaktır.

λ_1=-6 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_1$ hesaplanır:

$$\begin{bmatrix} \overset{\lambda_1}{-7-(-6)} & -2 \\ 2 & -2-(-6) \end{bmatrix} \overset{x_1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{x_1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow basit\ GAUSS \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Son denklemde:
$0x_2=0 \rightarrow$ x_2 serbest değişkendir, her değer seçilebilir, $x_2=1$ seçelim.
Birinci denklemden:
$-1x_1-2x_2=0$ dır $\rightarrow$ $-1x_1-2 \cdot 1=0 \rightarrow x_1=-2$ olur.

λ_1=-6 özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_2=-3 özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_2$ hesaplanır:

$$\begin{bmatrix} \overset{\lambda_2}{-7-(-3)} & -2 \\ 2 & -2-(-3) \end{bmatrix} \overset{x_2}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{x_2}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow basit\ GAUSS \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Son denklemde:
$0x_2=0 \rightarrow$ x_2 serbest değişkendir, her değer seçilebilir, $x_2=1$ seçelim.
Birinci denklemden:
$-4x_1-2x_2=0$ dır $\rightarrow$ $-4x_1-2 \cdot 1=0 \rightarrow x_1=-0.5$ olur.

λ_2=-3 özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol:

$$\underline{A}\underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\underline{A}\underline{x}_2 = \lambda_2 \underline{x}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -3 \end{bmatrix} \checkmark$$

Örnek 4: Sanal özdeğerler

$$\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda=? \quad \underline{x}=?$$

4.3 ve 4.4 e göre

$$\begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ olmalı.}$$

Hatırlatma: 2x2 matrisin determinantı=Diyagonal elemanların çarpımı - diğer diyagonal elemanların çarpımıdır.

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-2-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \cdot (-2) = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2-2i, \lambda_2 = -2+2i$$

Hatırlatma: $i = \sqrt{-1}, \ i^2 = -1$ dır.

İki farklı sanal özdeğer var, her biri katsayılar matrisi A nın determinantını sıfır yapar. 25.3 e göre her iki özdeğere karşılık iki farklı $\underline{x}_1$ ve $\underline{x}_2$ özvektörü olacaktır.

λ_1=-2-2*i* özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_1$ hesaplanır:

λ_1 $\qquad$ x_1 $\qquad$ x_1 $\qquad$ GAUSS'u kolayca uygulamak için satırlar değiştirildi

$$\begin{bmatrix} -2-(-2-2i) & -2 \\ 2 & -2-(-2-2i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ 2i & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basit GAUSS uygulandıktan sonra

$$\begin{bmatrix} 2 & 2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Son denklemde:
$0x_2=0 \rightarrow$ x_2 serbest değişkendir, her değer seçilebilir, $x_2=1$ seçelim.
Birinci denklemden:
$2x_1+2ix_2=0$ dır $\rightarrow$ $2x_1+2 \cdot i \cdot 1=0 \rightarrow$ $x_1=-i$ olur.

λ_1=-2-2*i* özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_1=\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_2=-2+2i özdeğeri homojen denklemde yerine konarak $\underline{x}_2$ hesaplanır:

λ_2 $\qquad$ x_2 $\qquad$ x_2 $\qquad$ GAUSS'u kolayca uygulamak için satırlar değiştirildi

$$\begin{bmatrix} -2-(-2+2i) & -2 \\ 2 & -2-(-2+2i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ -2i & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basit GAUSS uygulandıktan sonra

$$\begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Son denklemde:
$0x_2=0 \rightarrow$ x_2 serbest değişkendir, her değer seçilebilir, $x_2=1$ seçelim.
Birinci denklemden:
$2x_1-2ix_2=0$ dır $\rightarrow$ $2x_1-2 \cdot i \cdot 1=0 \rightarrow$ $x_1=i$ olur.

λ_2=-2+2*i* özdeğerine ait özvektör

$$\underline{x}_2=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol:

$$\underline{A}\underline{x}_1=\lambda_1\underline{x}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}=(-2-2i)\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2i-2 \\ -2i-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2i-2 \\ -2i-2 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\underline{A}\underline{x}_2=\lambda_2\underline{x}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}=(-2+2i)\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2i-2 \\ 2i-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2i-2 \\ 2i-2 \end{bmatrix} \checkmark$$

Özdeterminant ve özdenklem

25.4 bağıntısı ile verilen

$$\det(\underline{A}-\lambda \underline{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ . & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinantına **özdeterminat** veya **karakteristik determinant** denir. Sayısal örneklerden de anlaşıldığı gibi, bu determinant hesaplandığında λ ya bağlı n. derece bir polinom elde edilir:

$$\det(\underline{A}-\lambda \underline{I}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (25.5)$$

Bu polinoma **özdenklem** veya **özpolinom** veya **karakteristik denklem** denir. n. Dereceden olan özdenklemin n tane kökü vardır. Dolayısıyla $\underline{A}$ nın determinantını sıfır yapan n tane özdeğer vardır: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Her bir özdeğere karşılık gelen n tane de özvektör $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, …, $\underline{x}_n$ vardır.

Özdeğerler matrisi ve özvektörler matrisi

Her bir λ_i ve $\underline{x}_i$ çifti 25.1 özdeğer problemini sağlar:

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}\underline{x}_1 &= \lambda_1 \underline{x}_1 \\ \underline{A}\underline{x}_2 &= \lambda_2 \underline{x}_2 \\ &\dots \\ \underline{A}\underline{x}_n &= \lambda_n \underline{x}_n \end{aligned}\right\} \underline{A}\underbrace{[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{x}_n]}_{\underline{X}} = \underbrace{[\lambda_1\underline{x}_1 \quad \lambda_2\underline{x}_2 \quad \dots \quad \lambda_n\underline{x}_n]}_{\underline{X}\,\underline{\Lambda}} \rightarrow \underline{A}\underline{X} = \underline{X}\,\underline{\Lambda}$$

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{X}\,\underline{\Lambda} \qquad (25.6)$$

Burada $\underline{\Lambda}$ ve $\underline{X}$ matrisleri

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & . & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = [\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{x}_n]$$

Özdeğer ve özvektörlerin bir araya toplandığı matrislerdir. Çoğu kez $\underline{\Lambda}$ matrisine **spektral matris** $\underline{X}$ matrisine de **modal matris** adı verilir. Herhangi bir özdeğer sıfır olabileceğinden $\underline{\Lambda}$ özdeğerler matrisi tekil olabilir, $\underline{\Lambda}^{-1}$ her zaman tanımlı olmayabilir. Özvektörler 25.3 homojen denklem sisteminin temel çözüm kümesidir ve doğrusal bağımsızdırlar. Dolayısıyla nxn boyutlu $\underline{X}$ modal matrisi tekil değildir, yani tersi $\underline{X}^{-1}$ vardır.

Bu özellik nedeniyle, 25.6 ifadesi $\underline{X}^{-1}$ ile soldan çarpılırsa

$$\underline{X}^{-1}\underline{A}\underline{X} = \underline{X}^{-1}\underline{X}\,\underline{\Lambda} \rightarrow \underline{X}^{-1}\underline{A}\underline{X} = \underline{\Lambda} \qquad (25.7)$$

olduğu görülür. $\underline{X}^{-1}$ ile sağdan çarpılırsa

$$\underline{A}\underline{X}\,\underline{X}^{-1} = \underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1} \rightarrow \underline{A} = \underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1}$$

olur. Son özellik kullanılarak $\underline{A}$ nın n. Kuvveti için:

$$\underline{A}^n = \underline{A}\underline{A}\underline{A}\dots\underline{A}\underline{A} = \underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1}\underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1}\underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1}\dots\underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1}\underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1} \rightarrow \underline{X}\,\underline{\Lambda}\underline{\Lambda}\underline{\Lambda}\dots\underline{\Lambda}\underline{\Lambda}\,\underline{X}^{-1}$$

$$\underline{A}^n = \underline{X}\,\underline{\Lambda}^n\,\underline{X}^{-1}$$

yazılabilir.

$\underline{x}_i$ özvektörünün herhangi bir gerçek c_i sayısı ile çarpılması veya bölünmesi sonucunda elde edilen yeni vektör de bir özvektördür. Çünkü $c_i\underline{x}_i$ ile de

$$\underline{A}(c_i\,\underline{x}_i)=\lambda_i\,(c_i\,\underline{x}_i) \tag{25.8}$$

sağlanır. Bu önemli özellik nedeniyle, istenirse, c_i herhangi bir gerçek sayı seçilebilir. Özvektörlerin

$$\underline{\tilde{x}}=c_1\,\underline{x}_1+c_2\,\underline{x}_2+\ldots+c_n\,\underline{x}_n$$

doğrusal birleştirilmesi ile oluşan yeni $\underline{\tilde{x}}$ de bir özvektördür ve 25.1 i sağlar. Bu açıklamalardan şu sonuca varılır: Herhangi bir $\underline{A}_{nxn}$ matrisinin n tane özdeğeri, n tane temel özvektörü, fakat sonsuz özvektörü vardır.

Normalleştirilmiş özvektör

25.8 deki c_i katsayısının seçiminde uygulamada farklı yaklaşımlar vardır:

1. Basitliği nedeniyle, $\underline{x}_i$ özvektörünün hesabı sırasında serbest değişken genellikle 1 alınır. Bu c_i=1 anlamındadır. c_i=1 alınarak hesaplanan özvektör temel özvektördür. Yukarıdaki sayısal örneklerin tümünde serbest değişkenler 1 seçilmişti.
2. Bazı uygulamalarda özvektörün en büyük elemanının 1 olması istenir. Bunun için, $\underline{x}_i$ temel özvektörü hesaplandıktan sonra, $\underline{x}_i$ nin elemanlarından mutlak değeri en büyük olan sayı c_i olarak alınır, $\underline{x}_i$ nin tüm elemanları c_i ye bölünür. Oluşan yeni özvektörün en büyük elemanı 1 olur. Bu yolla hesaplanan özvektöre **normalleştirilmiş özvektör** denir. Önceki sayfalarda verilen örnek 2 den:

Temel özvektör

Normalleştirilmiş özvektör

$$\underline{x}_3=\begin{bmatrix}-1.75\\-0.25\\1\end{bmatrix}\rightarrow c_3=-1.75\rightarrow \underline{\tilde{x}}_3=\frac{1}{-1.75}\begin{bmatrix}-1.75\\-0.25\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.142857\\-0.571429\end{bmatrix}$$

Hem $\underline{x}_3$ hem de $\underline{\tilde{x}}_3$ örnek 2 deki özdeğer problemini sağlarlar.

3. Bazı uygulamalarda $\underline{x}_i$ temel özvektörü hesaplandıktan sonra $\underline{x}_i$ nin uzunluğunun 1 olması istenir. Genel olarak; herhangi bir $\underline{x}$= [x_1 x_2 ... x_n]^T vektörünün uzunluğu $|\underline{x}|=\sqrt{\underline{x}^T\,\underline{x}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ ile tanımlanır. $\underline{x}$ vektörünün uzunluğunu 1 yapmak için sabit bir c sayısı ile çarpmak gerekir:

$$|\underline{x}|=\sqrt{c(\underline{x}^T)(c\underline{x})}=\sqrt{c^2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}=1\rightarrow c\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}=1\rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}$$

dir. $\underline{\tilde{x}}=c\,\underline{x}$ ile hesaplanacak yeni vektörün uzunluğu 1 olacaktır:

$$\underline{\tilde{x}}=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\x_n\end{bmatrix}$$

Demek ki bir vektörün uzunluğunun 1 olması istenirse o vektörün elemanlarını o vektörün uzunluğuna bölmek gerekir. Önceki sayfalarda verilen örnek 2 den:

$$\underline{x}_3=\begin{bmatrix}-1.75\\-0.25\\1\end{bmatrix}\rightarrow|\underline{x}_3|=\sqrt{1.75^2+0.25^2+1^2}=2.031010$$

x_3 özvektörünün uzunluğu

$$\underline{\tilde{x}}_3=\frac{1}{2.031010}\begin{bmatrix}-1.75\\-0.25\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.861640\\-0.123091\\0.492366\end{bmatrix}$$

Hem $\underline{x}_3$ hem de $\underline{\tilde{x}}_3$ örnek 2 deki özdeğer problemini sağlarlar.

x_3 ün uzunluğu

x_3

Uzunluğu 1 olan yeni özvektör

Kontrol: $|\underset{\sim}{x}| = \sqrt{\underset{\sim}{x}_3^T \underset{\sim}{x}} = \sqrt{0.861640^2 + 0.123091^2 + 0.492366^2} = 0.999999 \approx 1$ ✓

Özdeğer ve özvektörlerin bazı önemli özellikleri

1. Özdeğer problemi sadece kare matrisler için tanımlıdır.
2. $\underline{A}_{nxn}$ matrisinin daima n tane özdeğeri, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ vardır.
3. λ_i özdeğeri $\underline{A}$ matrisinin determinantını sıfır yapar.
4. Her λ_i özdeğerine karşılık gelen bir $\underline{x}_i$ özvektörü vardır. λ_i ve $\underline{x}_i$ çifti beraber $(\underline{A} - \lambda_i \underline{I})\underline{x}_i = \underline{0}$ bağıntısını sağlar.
5. Özdeğerler pozitif, negatif, sıfır gerçek sayıları olabildiği gibi sanal sayılar da olabilir.
6. Özvektörlerin elemanları gerçek ve sanal sayılardan oluşabilir.
7. Elemanları gerçek sayılardan oluşan $\underline{A}$ simetrik ($\underline{A}^T$=$\underline{A}$) ise, tüm özdeğerler de gerçek sayılardan oluşur. Simetrik matrisin özvektörleri ortogonaldır: $\underline{X}^T\underline{X}$=$\underline{I}$
8. $\underline{A}$ simetrik ($\underline{A}^T$=$\underline{A}$) ve pozitif tanımlı ise tüm özdeğerler de pozitiftir.
9. Bazı özdeğerler birbirine eşit olabilir. Fakat Eşit özdeğerlerin özvektörleri mutlaka farklıdır. Çünkü özvektörler doğrusal bağımsızdır. Örneğin

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ birim matrisinde } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ ve özvektörler } \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dır. Görüldüğü gibi, özdeğerler birbirine eşit fakat özvektörler birbirinden farklıdır.

10. $\underline{x}_i$ özvektörünün herhangi bir gerçek c sayısı ile çarpılması veya bölünmesi sonucunda elde edilen yeni vektör de bir özvektördür. Yanı yeni vektör c$\underline{x}_i$ ile de $(\underline{A} - \lambda_i \underline{I})(c\underline{x}_i) = \underline{0}$ sağlanır. Bu önemli özellik nedeniyle, istenirse, c herhangi bir gerçek sayı seçilebilir.
11. $\underline{A}$ ve $\underline{A}^T$ aynı özdeğerlere sahiptir, fakat özvektörleri genelde farklıdır.
12. $\underline{A}_{nxn}$ ve $\underline{B}_{nxn}$ kare matrisler olmak üzere $\underline{A}$ $\underline{B}$ ve $\underline{B}$ $\underline{A}$ matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.
13. $\underline{A}$ nın özdeğeri λ_i ise $\underline{A}^{-1}$ in özdeğeri $1/\lambda_i$ dir. $\lambda_i = 0$ durumunda $1/\lambda_i$ tanımsızdır, bu ise $\underline{A}$ nın tekil ve $\underline{A}^{-1}$ in olmadığı anlamındadır.
14. $\underline{A}_{nxn}$ matrisinin izi özdeğerlerin toplamına eşittir:

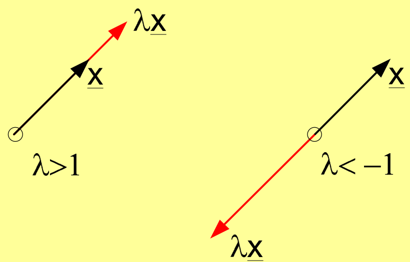
   İz $\underline{A}$=a_{11}+ a_{22}+...+ a_{nn}= $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.
15. $\underline{A}_{nxn}$ matrisinin determinantı özdeğerlerin çarpımına eşittir:

   det $\underline{A}$= $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$.

   Dolayısıyla, özdeğerlerden herhangi biri sıfırsa, $\lambda_i = 0$, det $\underline{A}$=0 dır ve $\underline{A}^{-1}$ tanımsızdır.

Özdeğer ve özvektörün geometrik yorumu

$\underline{A}$ $\underline{x}$=λ$\underline{x}$ bağıntısından hesaplan λ özdeğeri ve $\underline{x}$ özvektörü şu şekilde yorumlanabilir: $\underline{A}$ matrisi $\underline{x}$ vektörünü λ kadar büyütmekte veya küçültmektedir. $\underline{x}$ vektörünün doğrultusu değişmemekte fakat yönü değişebilmektedir. λ pozitif ise $\underline{x}$ ve λ$\underline{x}$ aynı yönde, aksi hale ters yöndedirler.



Örnek 5: 3x3 matrisin özdeğer problemi

$\underline{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$ verildiğine göre $(\underline{A}-\lambda \underline{I})\underline{x}=\underline{0}$ özdeğer problemini çözünüz.

Bu şu anlama gelmektedir: A nın determinantını sıfır yapan $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ özdeğerlerini ve her bir özdeğere ait $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3$ vektörlerini, $(\underline{A}-\lambda_i \underline{I})\underline{x}_i=\underline{0}$ bağıntısını sağlayacak şekilde, bulunuz.

Özdeğerlerin hesabı:

$$(\underline{A}-\lambda \underline{I})\underline{x}=\underline{0} \rightarrow \begin{bmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Özdeğer problemi

x≠0 çözümü arandığından, bu bağıntının sağlanabilmesi için, katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır:

$$f(\lambda)=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{bmatrix}=0$$

Laplace açılımı(1.kolona göre):

$$f(\lambda)=(-1)^{(1+1)}(3-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{(1+2)}(-1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$f(\lambda)=(3-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-1]+(-3+\lambda)=0$$

$$f(\lambda)=-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0$$

özdenklem

Özdenklemin MÜLLER programı ile bulunan kökleri(Bak: Bölüm 36, sayfa 294)

Son terimin çarpanlarından 1·3·4=12 kökler $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=4$ bulunur. Bunlar A nın özdeğerleridir, A nın determinantını sıfır yaparlar. Özdenklemin kökleri uygun bir programla da bulunabilir, derecesi 5 ve yukarı olan problemlerde zaten başka çare yoktur(kök bulma programları için bak: bölüm 36).

Özvektörlerin hesabı:

$\underline{x}_i$ özvektöleri $(\underline{A}-\lambda_i \underline{I})\underline{x}_i=\underline{0}$ homojen denkleminden hesaplanır. En uygun yöntem GAUSS indirgeme metodudur. İndirgeme sonucunda $\underline{A}-\lambda_i \underline{I}$ katsayılar matrisi eşdeğer bir üst üçgen matrise dönüşür. Üçgen matrisin diyagonal elemanı sıfır olur. Bu determinantın sıfır olduğu anlamındadır. Sıfır diyagonale ve karşı tarafa herhangi bir sabit c_i sayısı yazılır. Bu özvektörün c_i katının da bir özvektör olduğu özelliğinden yararlandığımız anlamına gelir. Basitliği nedeniyle çoğu kez c_i=1 tercih edilir. Yukarı doğru hesap yapılarak özvektörün tüm terimleri belirlenir.

$\lambda_1=1$ için özvektörün hesabı:

$$\begin{bmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}_{\underline{x}_1}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\lambda=\lambda_1=1$ alınır.

$$\begin{bmatrix}3-1 & -1 & 0\\ -1 & 2-1 & -1\\ 0 & -1 & 3-1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}_{\underline{x}_1}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sistemi GAUSS ile indirgenir.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.diyagonal sıfırdır. x_3 serbest değişkendir. Diyagonale ve karşı tarafa 1 yazılır: $1 \cdot x_3=1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yukarı doğru hesap ile tüm bilinmeyenler belirlenir

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ e ait temel özvektör

$$\tilde{\underline{x}}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Normalleştirilmiş özvektör (en büyük terim=1)

Normalleştirilmiş özvektör (uzunluğu=1)

$$\tilde{\underline{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.408248 \\ 0.816497 \\ 0.408248 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$ için özvektörün hesabı:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3-3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ 0 & -1 & 3-3 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sistemi GAUSS ile indirgenir.

GAUSS ile:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.diyagonal sıfırdır. x_3 serbest değişkendir. Diyagonale ve karşı tarafa 1 yazılır: $1 \cdot x_3=1$. Yukarı doğru hesap ile tüm bilinmeyenler belirlenir.

$\lambda_2 = 3$ e ait temel özvektör

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalleştirilmiş özvektör (en büyük terim=1)

$$\tilde{\underline{x}}_2 = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normalleştirilmiş özvektör (uzunluğu=1)

$$\tilde{\underline{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+0+1^2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707108 \\ 0 \\ 0.707108 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 4$ için özvektörün hesabı:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3-4 & -1 & 0 \\ -1 & 2-4 & -1 \\ 0 & -1 & 3-4 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sistemi GAUSS ile indirgenir.

GAUSS ile:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.diyagonal sıfırdır. x_3 serbest değişkendir. Diyagonale ve karşı tarafa 1 yazılır: $1 \cdot x_3=1$. Yukarı doğru hesap ile tüm bilinmeyenler belirlenir.

$\lambda_3 = 4$ e ait temel özvektör

$$\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalleştirilmiş özvektör (en büyük terim=1)

$$\tilde{\underline{x}}_3 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalleştirilmiş özvektör (uzunluğu=1)

$$\tilde{\underline{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.577350 \\ -0.577350 \\ 0.577350 \end{bmatrix}$$

Özdeğerler matrisi ve temel özvektörler matrisi:

Özdeğerler matrisi

$$\underline{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 3 & \\ & & 4\end{bmatrix}, \qquad \underline{X}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Modal matris
(temel özvektörler)

Normalleştirilmiş modal matris(en büyük eleman=1)

Normalleştirilmiş modal matris (her vektörün uzunluğu=1)

$$\underline{\tilde{X}}=\begin{bmatrix}0.5 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0.5 & -1 & 1\end{bmatrix}, \qquad \underline{\tilde{X}}=\begin{bmatrix}0.408248 & -0.707108 & 0.577350\\ 0.816497 & 0 & -0.577350\\ 0.408248 & -0.707108 & 0.577350\end{bmatrix}$$

Kontrol: $\underline{A}\,\underline{X}=\underline{X}\,\underline{\Lambda}$ ve $\underline{A}\,\underline{\tilde{X}}=\underline{\tilde{X}}\,\underline{\Lambda}$ ile çözümler kontrol edilebilir.

Özdeğer problemi çözüm metotları

Özdeğer problemi, sayfa 158 de açıklandığı gibi, 1. determinant hesabı 2. homojen denklem sistemi çözümünden ibarettir. Çözümün yükü ve zorluğu özdeğerlerin belirlenmesindedir. Çözüm için direkt ve iterasyon metotları kullanılmaktadır.

Direkt metotlar bir takım işlemler sonrası 25.5 bağıntısında verilen özdenklemi kurar ve çözerler. Büyük denklem sistemleri için uygun değildirler. Çünkü n. derece olan özdenklem≡özpolinomun n tane kökünün bulunması büyük nümerik sorunlar yaratır. Çok basit bir örnek ile açıklayalım:

Özdeğerler

Özvektörler

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}100 & & & & & \\ & 110 & & & & \\ & & 120 & & & \\ & & & 130 & & \\ & & & & 140 & \\ & & & & & 150\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}\rightarrow \underline{\Lambda}=\begin{bmatrix}100 & & & & & \\ & 110 & & & & \\ & & 120 & & & \\ & & & 130 & & \\ & & & & 140 & \\ & & & & & 150\end{bmatrix}, \ \underline{X}=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}$$

Diyagonal katsayılı özdeğer probleminin 6 adet özdeğeri, bilindiği gibi, diyagonal elemanlarına eşittir. Özvektörleri de birim matristir. Özdenklem

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{I})=\begin{vmatrix}100-\lambda & & & & & \\ & 110-\lambda & & & & \\ & & 120-\lambda & & & \\ & & & 130-\lambda & & \\ & & & & 140-\lambda & \\ & & & & & 150-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{I})=(100-\lambda)(110-\lambda)((120-\lambda)(130-\lambda)(140-\lambda)(150-\lambda)=0$$

$$\lambda^6-750\lambda^5+233500\lambda^4-38625000\lambda^3+3580240000\lambda^2-176310000000\lambda+3603600000000=0$$

dır. Görüldüğü gibi, bu çok basit ve çok küçük problemde bile polinomun katsayıları çok büyüktür. 6 adet λ_i özdeğerlerinin bu polinomdan hesaplanması yuvarlama hatalarının çok büyük olacağı anlamındadır. Çok büyük özdeğer problemlerinde sayı taşması kaçınılmazdır. Bu nedenle, büyük boyutlu özdeğer problemlerinde, iterasyon yöntemleri tercih edilir.

Çok sayıdaki iterasyon yöntemlerinden **determinant arama, power(MISES)**, **invers power, JACOBI**, **ARNOLDI**, **LANCZOS**, **QR, HOUSEHOLDER, GIVENS** gibi metotlarının adı verilebilir. İterasyon yöntemleri el hesapları için fazlasıyla karmaşıktır. Bu nedenle adı, geçen yöntemlerin teorisi yerine sadece bazı yöntemlerin programları verilecektir(Bak: bölüm 27)