

11. PROGRAMLAR: Basit matris işlemleri ve doğrusal denklem sistemi çözücüler

Nümerik metotlar neticede programlanarak bilgisayarda çözüm yapabilmek amacıyla geliştirilmişlerdir. Teorik bilgilerin test edilmesi, kavranması ve kullanılabilir duruma getirilebilmesi için program yazmak ya da yazılmış programları kullanmak gerekecektir. Program yazmak da başlı başına derin bir konudur. Ancak mühendislik problemleri ile uğraşan kişinin, çok profesyonel olmasa bile, küçük programlar yazabilme becerisinin olması da gerekir.

Bu amaca yönelik olarak test edilmiş programlara yer verilecektir. Bu bölüm basit matris işlemleri ve doğrusal denklem sistemi çözümü için QBASIC dilinde hazırlanmış programlar içermektedir. Öğrencinin bu programları görsel bir programlama diline çevirmesi, test etmesi, deneyim kazanması beklenir.

QBASIC(QuickBasic) programlama dili Microsoft tarafından geliştirilmiş, MS-DOS tabanlı basit bir programlama dilidir. 1990-2000 li yıllarda kullanılmış; günümüzde yerini Visual Basic, C, Delphi gibi modern dillere bırakmıştır.

Programlar neden QBASIC dilinde veriliyor? Neden görsel bir dilde verilmiyor?

Bunun iki ana nedeni vardır. 1) Görsel programlama dilleri, görselliği sağlamak için, çok sayıda program kodunu otomatik eklerler. Bir kitabın sayfalarında verilemeyecek kadar çok ve karmaşık kod üretilir. Asıl vurgulanmak istenen program parçacığı otomatik eklenen kodlar arasında kaybolur, anlaşılması güçleşir. 2) 1960-1970 li yıllar nümerik analizin altın yıllarıdır. Bu dönemin bilimsel yayınları ve kitapları ALGOL, FORTRAN ve BASIC gibi, günümüzde pek kullanılmayan dillerde kodlanmış çok önemli programlar içerir. Neticede 60 yıllık bir bilgi birikimi vardır.

QBASIC basit fakat oldukça yapısal ve kavranması kolay kodlardan oluşur, öğretim amaçlı programların anlaşılır düzeyde kitaplarda verilmesine olanak sağlar. Visual Basic QBASIC dilinin gelişmiş şekli olduğundan ve hemen tüm QBASIC kodlarını da içerdiğinden dönüştürülmesi kolaydır. Çoğu kez kopyala-yapıştır yeterli olur. Ancak, Türkçe karakter desteği yoktur. Bu, programların çalışmasını etkilemez fakat Türkçe açıklama satırlarını kullanıcının okuması zorlaşır.

QBASIC deyimleri hakkında öz bilgiler

* işareti ve sonrası programın anlaşılabilirliğini artırmak için programcının yaptığı açıklamadır, programın çalışmasını etkilemez.

Değişkenler bir harf ile başlar. Aynı değişken büyük veya küçük harf olarak yazılabilir: A veya a aynı değişkendir.

DATA 3,-7,10 benzeri satırlar veri satırıdır. READ deyimini bu satırlardan sıra ile değer okur.

DEFINT I-N deyimini i,j,k,l,m,n harfleri ile başlayan değişkenlerin tam sayı olacağını belirtir.

DEFDBL A-H, O-Z deyimini bu harf aralığındaki bir harf ile başlayan değişkenlerin DOUBLE≡ çift hassasiyetli olacağını belirtir.

DECLARE SUB Matrisoku (n, m, a()) benzeri deyimler bir alt programın adını ve parametrelerini ana programa tanımlar: Bu örnekte alt programın adı Matrisoku, parametreleri de n, m ve a dır. n ve m tam sayı, a() matris anlamındadır. Ana programda CALL deyimini ile çağrılacak alt program, çağrılmadan önce, DECLARE ile ana programa tanımlanmalıdır.

READ n,m,L benzeri deyimler DATA satırlarından değer okur. Bu örnekte n, m ve L değişkenleri okunur.

DIM a(n, m), b(m, L), c(n, L) benzeri deyimler matrislerin boyutunu tanımlar ve ana bellekte yer ayırır. Bu örnekte a, b ve c matrisleri tanımlanmaktadır. n, m ve L matrislerin boyutudur, değerleri DIM deyimini öncesi okunmuş veya atanmış olmalıdır.

CLS deyimini ekranı temizler.

CALL Matrisoku(n, m, a()) benzeri deyimler, adı ve parametreleri verilen alt programı çağırır, çalıştırır. Bu örnekte Matrisoku adlı alt program çağırılıyor. n, m, a() parametrelerdir. n ve m matrisin boyutu, a() matristir.

PRINT deyimini kendini izleyen parametrelerin değerlerini ekrana yazar. PRINT "Z="; 5 ekrana Z=5 yazar.

* işareti çarpma ve ^ işareti üs alma için kullanılır. Örnek 2*3 çarpım ve 2^3 üs alma anlamındadır.

```
SUB
...
END SUB
```

} Kelimeleri arasında alt program kodları yer alır.

EXIT SUB alt programdan çıkılmasını sağlar.

```
FOR i = 1 TO n STEP 2
...
NEXT i
```

} deyimini i= 1, 3,..., n değerleri için FOR-NEXT arasındaki kodları işler

```
DO
...
LOOP UNTIL s<11
```

} deyimini s<1 oluncaya kadar DO ile LOOP arasındaki kodları tekrar tekrar işler

IF T <= Zero THEN deyimini t değişkeni Zero değişkeninden küçük veya Zero ya eşitse THEN i izleyen ... kodları işler.

```
IF T = 0 THEN
...
ELSE
...
END IF
```

} deyimini t değişkeni sıfır ise THEN i izleyen ..., değilse ELSE izleyen ... kodları işler.

GOTO 200 deyimini 200 nolu satıra atlanmasını sağlar.

ABS(x) fonksiyonu x değişkeninin mutlak değerini hesaplar.

SQR(x) fonksiyonu x in karekökünü hesaplar.

: işareti ile birden çok satır tek satırda yazılabilir. Örnek:

```
rank = 0: v = 1: Zero = 0   satırı
rank = 0
v = 1
Zero = 0
```

} satırları ile aynı anlamdadır.

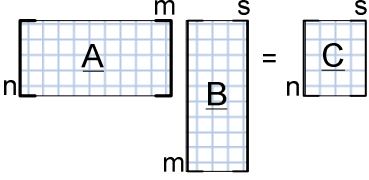
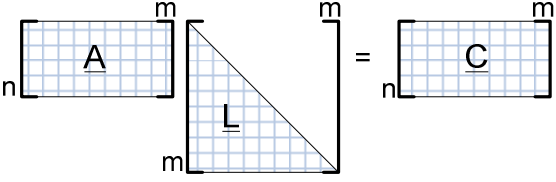
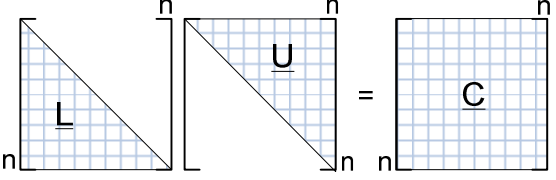
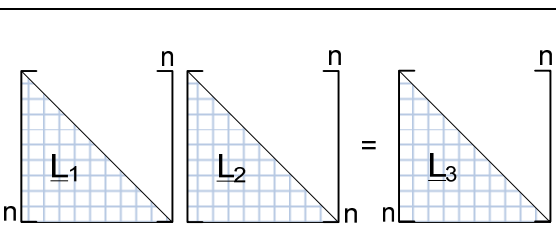
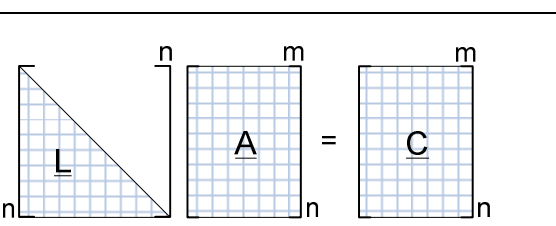
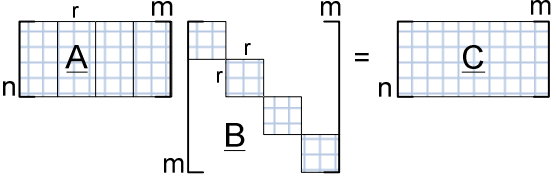
Matris metodlarında gerekli işlem sayısı

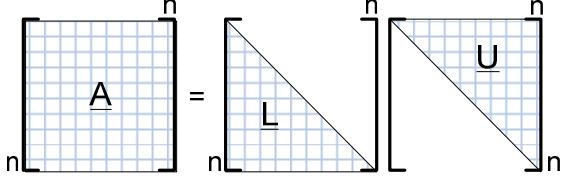
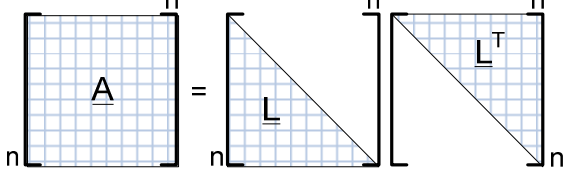
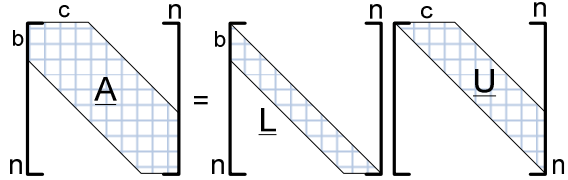
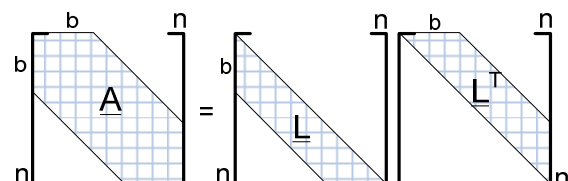
Uygulamada sıkça karşılaşılan matris metodları(çarpma, üçgen çarpanlara ayırma, denklem sistemi çözümü, v.s.) ne kadar dört işlem(toplama, çıkarma çarpma, bölme) gerektirir? Aşağıda verilen tablo yardımıyla toplam işlem sayısı belirlenebilir.

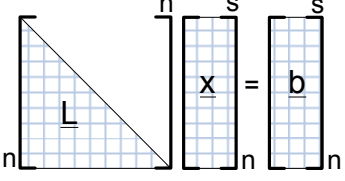
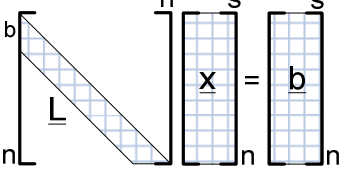
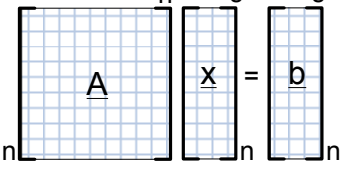
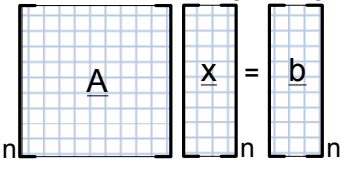
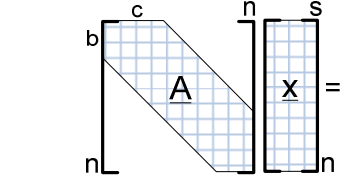
Örnek: $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sisteminin $n=1000$ bilinmeyeni ve $s=1$ karşı taraf vektörü olsun. Gauss veya Crout veya Doolittle metodu kullanılarak denklem sistemi çözülmek istenirse gerekli toplam işlem sayısı

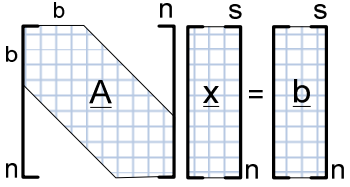
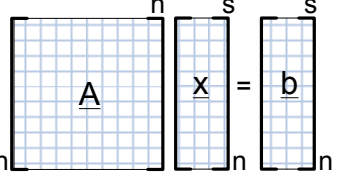
$$\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 2n^2s = \frac{2 \cdot 1000^3}{3} - \frac{1000^2}{2} - \frac{1000}{6} + 2 \cdot 1000^2 \cdot 1 = 6681665$$

olur. Bir bilgisayar bu kadar işlemi kaç saniyede yapar? Bunun için bilgisayarın FLOPS(**F**loating point **O**perations **P**er **S**econd) denilen değerinin bilinmesi gerekir. 2010 yılında üretilen Intel Core I7 980 XE işlemcisi 107 GFLOP (bir saniyede 10^9) çift hassasiyetli(DOUBLE) işlem yapabilmektedir. Bu işlemciye sahip bir bilgisayarda denklem sisteminin çözümü teorik ve yaklaşık olarak $6681665/10^9=0.007$ saniye sürecektir. Gerçekte çözüm daha uzun sürer. Çünkü işletim sistemi, programlama dili, programın kalitesi, ara işlemler, bellek tipi, bellek miktarı, v.s. süreyi etkiler.

İŞLEM: Matris çarpımı	AÇIKLAMA	İŞLEM SAYISI
	<p>\underline{A}, \underline{B} ve \underline{C} dikdörtgen matrisler</p> <p>n, m, s matrislerin boyutları</p>	<p>Çarpma : nms</p> <p>Toplama: nms</p> <p>Toplam : $2nms$</p>
	<p>\underline{A} ve \underline{C} dikdörtgen, \underline{L} alt veya üst üçgen matris</p>	<p>Çarpma : $\frac{nm^2}{2} + \frac{nm}{2}$</p> <p>Toplama: $\frac{nm^2}{2} + \frac{nm}{2}$</p> <p>Toplam : $nm^2 + nm$</p>
	<p>\underline{L} alt, \underline{U} üst üçgen ve \underline{C} kare matris</p>	<p>Çarpma : $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$</p> <p>Toplama: $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$</p> <p>Toplam : $\frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{n}{3}$</p>
	<p>\underline{L}_1, \underline{L}_2, \underline{L}_3 hepside alt veya hepside üst üçgen matris</p>	<p>Çarpma : $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$</p> <p>Toplama: $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$</p> <p>Toplam : $\frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2n}{3}$</p>
	<p>\underline{A} ve \underline{C} dikdörtgen, \underline{L} alt veya üst üçgen matris</p>	<p>Çarpma : $\frac{mn^2}{2} + \frac{mn}{2}$</p> <p>Toplama: $\frac{mn^2}{2} + \frac{mn}{2}$</p> <p>Toplam : $mn^2 + mn$</p>
	<p>\underline{A} ve \underline{C} dikdörtgen, \underline{B} diyagonal elemanları $r \times r$ boyutlu bölünmüş matris. Blok sayısı=m/r (tam sayı)</p>	<p>Çarpma : nmr</p> <p>Toplama: nmr</p> <p>Toplam : $2nmr$</p>

İŞLEM: Üçgen çarpanlara ayırma	YÖNTEM	İŞLEM SAYISI
 <p>$A = L U$</p>	GAUSS CROUT DOOLITTLE	Çarpma : $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ Toplama : $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ Bölme : $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ Toplam : $\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$
 <p>$A = L L^T$</p> <p>A simetrik</p>	CHOLESKY	Çarpma : $\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6}$ Toplama : $\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6}$ Bölme : $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ Karekök : n Toplam : $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$
 <p>$A = L U$</p> <p>A bant matris, b üst bant, c alt bant genişliği</p>	GAUSS CROUT DOOLITTLE	Çarpma: $nbc - nc + n - nb - \frac{b^2c}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{b}{2}$ $- \frac{c^3}{6} + \frac{c^2}{2} - \frac{c}{2}$ Toplama: Çarpma kadar Bölme : $nb - \frac{b^2}{2} - n + \frac{b}{2}$ Toplam : $2nbc - 2nc - nb + n - \frac{c^3}{3} + c^2 - b^2c$ $+ bc - \frac{2c}{3} + \frac{b^2}{2} - \frac{b}{2}$
 <p>$A = L L^T$</p> <p>A bant ve simetrik, b yarı bant genişliği</p>	CHOLESKY	Çarpma : $\frac{nb^2}{2} - \frac{nb}{2} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} - \frac{b}{6}$ Toplama: Çarpma kadar Bölme : $nb - \frac{b^2}{2} - n + \frac{b}{2}$ Karekök : n Toplam : $b^2n + \frac{b^2}{2} + \frac{b}{6} - \frac{2b^3}{3}$

İŞLEM: Denklem sistemi çözümü	YÖNTEM	İŞLEM SAYISI
 <p>\underline{L} alt veya üst üçgen matris n, m, s matrislerin boyutları</p>	Yukarıdan aşağı veya aşağıdan yukarı doğru hesap	Çarpma : $\frac{n^2 s}{2} - \frac{ns}{2}$ Toplama : $\frac{n^2 s}{2} - \frac{ns}{2}$ Bölme : ns Toplam : $n^2 s$
 <p>\underline{L} alt veya üst bant matris, b bant genişliği</p>	Yukarıdan aşağı veya aşağıdan yukarı doğru hesap	Çarpma : $nbs - \frac{b^2 s}{2} - \frac{ns}{2}$ Toplama : $nbs - \frac{b^2 s}{2} - \frac{ns}{2}$ Bölme : ns Toplam : $2nbs - b^2 s$
 <p>GAUSS CROUT DOOLITTLE</p>		Çarpma : $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 s - ns$ Toplama : $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 s - ns$ Bölme : $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 2ns$ Toplam : $\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 2n^2 s$
 <p>\underline{A} simetrik</p>	CHOLESKY	Çarpma : $\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6} + n^2 s - ns$ Toplama : $\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6} + n^2 s - ns$ Bölme : $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 2ns$ Karekök : n Toplam : $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 2n^2 s$
 <p>\underline{A} bant matris, b üst bant, c alt bant genişliği</p>	GAUSS CROUT DOOLITTLE	Çarpma : $\frac{1}{6}(-3b + 3b^2 - 2c + 3bc - 3b^2 c + 3c^2 - c^3 + 6n - 6bn - 6cn + 6bcn - 3b^2 s - 3c^2 s - 6ns + 6bns + 6cns)$ Toplama : Çarpma kadar Bölme : $nb + \frac{b}{2} + ns - n - \frac{b^2}{2}$ Toplam : $\frac{1}{6}(-3b + 3b^2 - 4c + 6bc - 6b^2 c + 6c^2 - 2c^3 + 6n - 6bn - 12cn + 12bcn - 6b^2 s - 6c^2 s - 6ns + 12bns + 12cns)$

 <p>\underline{A} simetrik bant matris, b yarı bant genişliği</p>	<p>CHOLESKY</p>	<p>Çarpma : $\frac{nb^2}{2} - \frac{nb}{2} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} - \frac{b}{6}$ $+ 2nbs - b^2s - ns$ Toplama: Çarpma kadar Bölme: $nb - \frac{b^2}{2} - n + \frac{b}{2} + 2ns$ Karekök: n Toplam : $4nbs + nb^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b}{6} - \frac{2b^3}{3} - 2b^2s$</p>
	<p>GAUSS-JORDAN</p>	<p>Çarpma : $\frac{n^3}{2} - \frac{n^2}{2} + n^2s$ Toplama: $\frac{n^3}{2} - \frac{n^2}{2} + n^2s$ Bölme: n^2 Toplam : $n^3 + 2n^2s$</p>
<p>İTERASYON YÖNTEMLERİ Bir itersyon adımı için</p>	<p>JACOBI GAUSS-SEIDEL</p>	<p>Çarpma : n^2 Toplama: $n^2 - n$ Bölme: n Toplam : $2n^2$</p>
	<p>CG (Conjugate Gradient) simetri dikkate alınmadan</p>	<p>Çarpma: $3n^2 + 6n + 2$ Toplama: $3n^2 + 3n - 3$ Bölme: 2 Toplam : $6n^2 + 9n + 1$</p>

Test edilmiş programlar:

Matris işlemleri, doğrusal denklem sistemi çözücüler(direkt ve iterasyon yöntemleri) olmak üzere, 12.-24. bölümlerde 15 adet program verilmiştir. Programların adı ve işlevi aşağıda özetlenmiştir.

- Basit Matris işlemleri:** matris okuma, yazma, toplama, çarpma, determinant hesabı gibi basit program parçacıklarından oluşur. QBASIC dilinin yapısının kavranmasını amaçlamaktadır.
- Gauss:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini çözer.
- CholeskyFull:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini çözer. \underline{A} simetrik, pozitif tanımlı, tam dolu.
- Cholesky2:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini çözer. \underline{A} simetrik, pozitif tanımlı, bant. İki boyutlu depolama tekniği kullanılmıştır.
- Cholesky1:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini çözer. \underline{A} simetrik, pozitif tanımlı, bant. Vektör depolama tekniği kullanılmıştır.
- CholeskySkyline:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini çözer. \underline{A} simetrik, pozitif tanımlı. \underline{A} ufuk çizgisi(Skyline) tekniği ile depolanır.
- GaussJordan:** \underline{A} matrisinin tersi \underline{A}^{-1} i hesaplar.
- GaussJordanSim:** \underline{A} matrisinin tersi \underline{A}^{-1} i hesaplar. \underline{A} simetrik pozitif tanımlı.
- LeastSquares:** Dengeleme hesabı, en uygun eğri(polinom) uydurma
- QR:** $\underline{A}_{n \times m} \underline{x}_m = \underline{b}_n$ denklem sayısı bilinmeyen sayısından çok olan sistemin QR çarpanlara ayırma metodu ile çözümü, $n \geq m$.
- BoBx:** $\underline{A}_{n \times m}$ dikdörtgen matrisinin \underline{B}_o sağ ters matrisini ve \underline{B}_x çekirdeğini hesaplar, $n \leq m$.
- GaussSeidel:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini iterasyon ile çözer.
- CG:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini Conjugate gradient iterasyon metodu ile çözer. \underline{A} simetrik, pozitif tanımlı.
- PCG:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini kondisyon iyileştirmesi (Preconditioning) yaparak Conjugate gradient iterasyon metodu ile çözer. \underline{A} simetrik, pozitif tanımlı.
- PCGsparse:** $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ doğrusal denklem sistemini kondisyon iyileştirmesi (Preconditioning) yaparak Conjugate gradient iterasyon metodu ile çözer. \underline{A} simetrik, pozitif tanımlı ve seyrek(sparse). \underline{A} nın sadece sıfırdan farklı elemanları depolanır.