ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli
Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

n<m

Katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & \dots & a_{2m} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}\underline{x} = \underline{0}$$

Bilinmeyenler

Karşı taraf

10

GENEL DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ:

Denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olan homojen ve inhomojen denklem sistemleri

10. GENEL DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

$\underline{A}_{nxm}\,\underline{x}_m = \underline{b}_n$ genel denklem sisteminin n=m durumu için, çözüm yöntemleri bölüm 4-7 de verilmişti. n>m, denklem sayısının bilinmeyen sayısından çok olması, durumu da bölüm 9 da ele alınmıştı. Bu bölümde n<m, denklem sayısının bilinmeyen sayısından az olması, durumu ele alınacaktır. Uygulamada nadiren karşılaşılan bu tür denklem sistemlerinde karşı taraf vektörünün sıfır olması veya sıfırdan farklı olması gibi iki farklı durum söz konusu olur. $\underline{b}_n = \underline{0}$ ise **homojen denklem sistemi**, $\underline{b}_n \neq \underline{0}$ ise **inhomojen denklem sistemi** adı verilir.

Homojen denklem sistemi

Karşı taraf vektörü sıfır olan denklem sistemlerine homojen denklem sistemi denir.
$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{0}$ homojen denklem sistemi n denklem ve m bilinmeyen içerir ve n<m dir:

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{0},\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & \dots & a_{2m} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Örnek:} \begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.1}$$

Katsayılar matrisi $\underline{A}$ satır düzenlidir, yani satırları doğrusal bağımlı değildir, rank $\underline{A}$=n dir. n<m olduğundan $\underline{A}$ nın d=m-n kolonu doğrusal bağımlıdır. Bu tanıma uygun homojen denklem sistemleri ile teknik dallarda, mesela yapı statiği kuvvet metodunda, karşılaşılır.

$\underline{x}=\underline{0}$ vektörü 10.1 homojen denklem sisteminin bir çözümüdür, 10.1 i sağlar. $\underline{x}=\underline{0}$ çözümüne trivial(önemsiz, değersiz) çözüm denir ve uygulama açısından hiçbir önem taşımaz. Önemli olan 10.1 denklemini sağlayan $\underline{x} \neq \underline{0}$ çözümü bulmaktır. $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{0}$ sistemi

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_0 & \underline{a}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \end{bmatrix} = \underline{0} \tag{10.2}$$

şeklinde alt matrislere bölünmüş olsun. Burada $\underline{a}_0$ nxn ve $\underline{a}_1$ nxd boyutlu alt matrislerdir. Bu alt matrisler şöyle oluşturulmuş olsun: $\underline{A}$ nın m kolonundan n tane doğrusal bağımsız olanları belirlenir, gerekirse kolonlara yer değiştirilir, bir araya toplanır $\underline{a}_0$ oluşturulur. Geriye kalan d=m-n kolon da bir araya toplanarak $\underline{a}_1$ oluşturulur. $\underline{a}_0$ alt matrisi nxn kare matristir, hem satırları hem de kolonları doğrusal bağımsız olduğundan tekil değildir, yani tersi, $\underline{a}_0^{-1}$, vardır. 10.2 den

$$\underline{a}_0\underline{x}_0 + \underline{a}_1\underline{x}_1 = \underline{0} \tag{10.3}$$

$$\underline{x}_0 = -\underline{a}_0^{-1}\underline{a}_1\underline{x}_1 \tag{10.4}$$

yazılabilir. 10.4 bağıntısı 10.3 de yerine konursa

$$-\underbrace{\underline{a}_0\underline{a}_0^{-1}}_{\underline{I}\text{ (birim matris)}}\underline{a}_1\underline{x}_1 + \underline{a}_1\underline{x}_1 = -\underline{a}_1\underline{x}_1 + \underline{a}_1\underline{x}_1 = \underline{0} \tag{10.5}$$

Bu son bağıntıdan şu anlaşılır: $\underline{x}_1$ vektörü ne olursa olsun 10.5 daima sağlanır. O halde $\underline{x}_1 \neq 0$ ve tamamen keyfi bir vektör seçilir ve $\underline{x}_0 = -\underline{a}_0^{-1}\underline{a}_1\underline{x}_1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{a}_0^{-1}\underline{a}_1\underline{x}_1 \\ \underline{x}_1 \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

olur. Bu genel çözüm 10.2 denklem sistemini sağlar fakat 10.1 genel homojen denklem sistemini sağlamaz. Çünkü 10.2 bağıntısı oluşturulurken $\underline{A}$ nın kolonlarına yer değiştirilmiştir. Kolonların yerinin değiştirilmesi bilinmeyenlerin sırasının değiştirildiği anlamındadır. 10.6 çözümünün 10.1 bağıntısını sağlaması için, 10.6 bağıntısı hesaplandıktan sonra, $\underline{x}$ vektörünün de aynı nolu satırlarının yerleri değiştirilmelidir.

10.6 çözümüne **temel çözüm** adı verilir. $\underline{x}_1$ vektörü tamamen keyfi seçilebildiğinden temel çözümün herhangi bir katı da çözümdür. c herhangi bir sabit olmak üzere:

$$\underline{x} = c\begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -\underline{a}_0^{-1}\underline{a}_1\underline{x}_1 \\ \underline{x}_1 \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

vektörünün 10.2 ifadesini

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_0 & \underline{a}_1 \end{bmatrix} c\begin{bmatrix} -\underline{a}_0^{-1}\underline{a}_1\underline{x}_1 \\ \underline{x}_1 \end{bmatrix} = \underline{0} \rightarrow -c\underline{a}_0\underline{a}_0^{-1}\underline{a}_1\underline{x}_1 + c\underline{a}_1\underline{x}_1 = c\underline{a}_1\underline{x}_1 + c\underline{a}_1\underline{x}_1 = \underline{0}$$

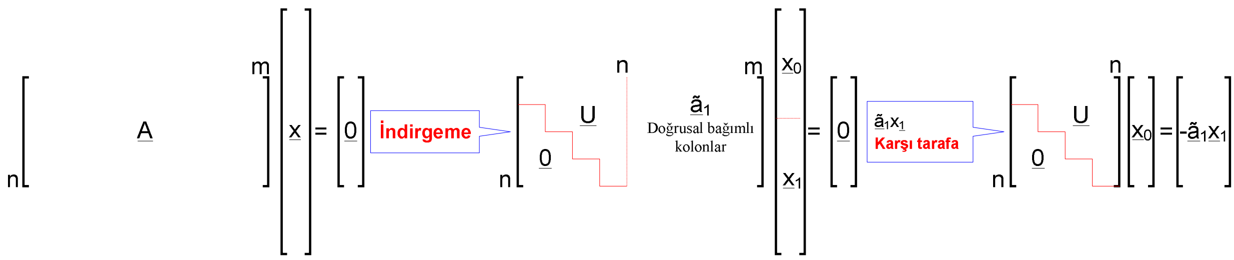
sağladığı görülür. c sonsuz farklı değer alabileceğinden, denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğu anlaşılır.

Genelleştirilirse:

- n<m ve d=m-n doğrusal bağımlı kolonu olan homojen denklem sisteminin d temel çözümü vardır. Temel çözümlerin herhangi bir katı veya temel çözümlerin herhangi bir birleşimi de çözümdür, yani sonsuz çözüm vardır.
- Herhangi keyfi bir değer alabildiğinden $\underline{x}_1$ e serbest değişken denir. $\underline{x}_0$ ise $\underline{x}_1$ e bağımlıdır.

Temel çözümlerin belirlenmesi

Çözüm için basit GAUSS, GAUSS-JORDAN veya DOOLITLE metodu kullanılabilir. Çözüme başlamadan önce $\underline{A}$ matrisinin hangi kolonlarının doğrusal bağımsız olduğu bilinmediğinden $\underline{a}_0$ alt matrisi doğrudan oluşturulamaz. Bu iş, örneğin basit GAUSS indirgeme metodu ile çözüm aranıyorsa, şöyle yapılır: İndirgeme, satırda pivot arama ve gerekirse kolonlara yer değiştirme ile yapılır. İndirgemenin i. adımında pivot eleman bulunamazsa i. kolon sonraki i+1., i+2.,…, m. kolonlardan biri ile, pivot eleman sıfırdan farklı olacak şekilde, değiştirilir ve indirgemeye devam edilir. n-1 adım sonra denklem sistemi aşağıdaki şematik forma dönüşür:



Burada $\underline{U}$ indirgeme sonucu $\underline{a}_0$ ın üst üçgene dönüşen kısmıdır ve $\underline{a}_0$ ın alt üçgeni sıfırlanmıştır. $\underline{\tilde{a}}_1$ ise $\underline{a}_1$ in değişmiş şeklidir. $\underline{x}_1$ herhangi bir keyfi değer alabileceği için $\underline{x}_1 \neq \underline{0}$ seçilerek $\underline{\tilde{a}}_1\,\underline{x}_1$ vektörü karşı tarafa atılabilir. Bu aşamada denklem sistemi katsayılar matrisi üst üçgen olan normal bir denklem sistemine dönüşmüş olur. Bilinmeyen sadece $\underline{x}_0$ vektörüdür. Yukarı doğru hesap ile $\underline{x}_0$ belirlenir. Aşağıdaki sayısal örnekler çözümün kavranmasını sağlayacaktır.

Örnek 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ bağıntısını sağlayan ve sıfırdan farklı $\underline{x}$ vektörünü bulunuz.

Basit GAUSS indirgeme metodu ile:

1. adım:

pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & -7 & 12 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.adım

pivot, $\underline{x}_0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U}\;\underbrace{\begin{matrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{matrix}}_{\underline{\tilde{a}}_1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{x}_1$

4. kolon önceki üç kolona doğrusal bağımlıdır, $\underline{x}_0=[x_1\ x_2\ x_3]^T$ ve $\underline{x}_1=x_4$ dır. x_4 için herhangi bir(sıfırdan farklı) keyfi bir değer seçilebilir. $\underline{x}_1=x_4=1$ seçilir ve yerine konursa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}}_{-\underline{\tilde{a}}_1\,\underline{x}_1} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= (-4-(-5)\cdot 0-3(-2))/1=2 \\ x_2 &= (6-6\cdot 0)/(-3)=-2 \\ x_3 &= 0/(-2)=0 \end{aligned}$$

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \underline{x}_1 = [x_4] = [1] \rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ temel çözümü bulunur. Bu temel çözüm denklem sisteminde yerine konarak doğruluğu kanıtlanabilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Yorum:
Örnek denklem sisteminde d=m-n=4-3=1 doğrusal bağımlı kolon olduğundan sadece tek bir temel çözüm bulunmuştur. Bu temel çözümün herhangi bir c katı da çözüm olacağından sonsuz çözüm vardır.

Örnek 2:

$$\begin{bmatrix}1&3&-5&4&1\\2&6&-4&2&1\\3&9&-3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \underline{x}=?$$

1.adım:

pivot

$$\begin{bmatrix}1&3&-5&4&1\\0&0&6&-6&-1\\0&0&12&-14&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

2.adım:

Pivot=0, kolon değiştirilecek

$$\begin{bmatrix}1&3&-5&4&1\\0&0&6&-6&-1\\0&0&12&-14&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-5&4&3\\0&-1&6&-6&0\\0&-2&12&-14&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_5\\x_3\\x_4\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-5&4&3\\0&-1&6&-6&0\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_5\\x_3\\x_4\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

3.adım:

Pivot=0, kolon değiştirilecek

$$\begin{bmatrix}1&1&-5&4&3\\0&-1&6&-6&0\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_5\\x_3\\x_4\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\left[\underbrace{\begin{matrix}1&1&4\\0&-1&-6\\0&0&-2\end{matrix}}_{U}\;\vdots\;\underbrace{\begin{matrix}-5&3\\6&0\\0&0\end{matrix}}_{\tilde{a}_1}\right]\left[\begin{array}{c}\left.\begin{matrix}x_1\\x_5\\x_4\end{matrix}\right\}\underline{x}_0\\ \hline \left.\begin{matrix}x_3\\x_2\end{matrix}\right\}\underline{x}_1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

4. ve 5. kolon önceki üç kolona doğrusal bağımlıdır, $\underline{x}_0=[x_1\ x_5\ x_4]^T$ ve $\underline{x}_1=[x_3\ \ x_2\ ]$ dır. Doğrusal bağımlı kolon sayısı d=m-n=5-3=2 olduğundan 2 temel çözüm vardır. $\underline{x}_1$ için herhangi sıfırdan farklı keyfi bir değer

$\underline{x}_1=\begin{bmatrix}x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ve $\underline{x}_1=\begin{bmatrix}x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ seçilerek 2 temel çözüm bulunur.

1.temel çözüm, $\underline{x}_1=[1\ \ 0]^T$ için:

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}1&1&4\\0&-1&-6\\0&0&-2\end{matrix}}_{U}\;\vdots\;\underbrace{\begin{matrix}-5&3\\6&0\\0&0\end{matrix}}_{\tilde{a}}\right]\left[\begin{array}{c}\left.\begin{matrix}x_1\\x_5\\x_4\end{matrix}\right\}\underline{x}_0\\ \hline \left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}\underline{x}_1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&4\\0&-1&-6\\0&0&-2\end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_5\\x_4\end{bmatrix}}_{\underline{x}_0}=\underbrace{\begin{bmatrix}5\\-6\\0\end{bmatrix}}_{-\tilde{a}_1\underline{x}_1}\rightarrow\begin{aligned}x_1&=(5-4\cdot0-1\cdot6)/1=-1\\x_5&=(-6-(-6)\cdot0)/(-1)=6\\x_4&=0/(-2)=0\end{aligned}$$

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_5\\x_4\\\hline x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\6\\0\\\hline 1\\0\end{bmatrix}$$

Kolon değişikliğinin karşılığı olarak satırlara yer değiştirilir

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\6\end{bmatrix}$$

1. temel çözüm

2.temel çözüm, $\underline{x}_1=[0\ \ 1]^T$ için:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&4\\0&-1&-6\\0&0&-2\end{bmatrix}}_{\underline{U}}\!\!\underbrace{\begin{bmatrix}-5&3\\6&0\\0&0\end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{a}}_1}\begin{bmatrix}\overbrace{\begin{matrix}x_1\\x_5\\x_4\end{matrix}}^{\underline{x}_0}\\\hline \underbrace{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}_{\underline{x}_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&4\\0&-1&-6\\0&0&-2\end{bmatrix}}_{\underline{U}}\overbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_5\\x_4\end{bmatrix}}^{\underline{x}_0}=\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\0\\0\end{bmatrix}}_{-\underline{\tilde{a}}_1\,\underline{x}_1}\rightarrow\begin{aligned}x_1&=(-3-4\cdot 0-1\cdot 0)/1=-3\\x_5&=(0-(-6)\cdot 0)/(-1)=0\\x_4&=0/(-2)=0\end{aligned}$$

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_5\\x_4\\\hline x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\\hline 0\\1\end{bmatrix}$$

Kolon değişikliğinin karşılığı olarak satırlara yer değiştirilir

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

2. temel çözüm

Her iki temel çözüm homojen denklem sistemini sağlar:

$$\begin{bmatrix}1&3&-5&4&1\\2&6&-4&2&1\\3&9&-3&-2&1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}-1\\0\\1\\0\\6\end{matrix}}_{\text{1. temel çözüm}}&\underbrace{\begin{matrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{matrix}}_{\text{2. temel çözüm}}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\ \checkmark$$

Temel çözümlerin herhangi keyfi bir birleşimi de homojen denklemi sağlar. Mesela toplamları:

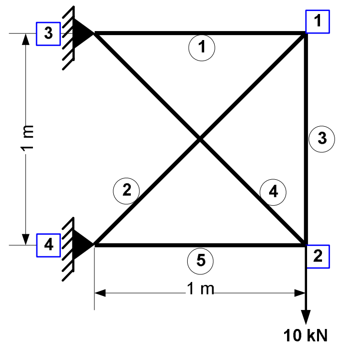
$$\begin{bmatrix}1&3&-5&4&1\\2&6&-4&2&1\\3&9&-3&-2&1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}-4\\1\\1\\0\\6\end{bmatrix}}_{\text{1. ve 2. temel çözümün toplamı}}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\ \checkmark$$

Özel uygulama: İzostatik sistemin ve birim yüklemelere ait iç kuvvetlerin otomatik hesabı

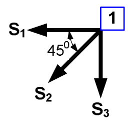
Yapı statiği kuvvet metodunda temel ilke, izostatik bir temel sistemin seçilmesi, hiperstatik bilinmeyenlerin birim yükle yüklenmesi ve bu yüklemelerden oluşan iç kuvvetlerin hesabıdır. İzostatik sistemde dış yük sıfırdır. Bu şu anlama gelir: Sistemin denge denklemlerinde karşı taraf vektörü sıfırdır(yük yok!), yani denklem sistemi homojen bir denklem sistemidir. İzostatik bilinmeyenler 1 (birim yük) seçilir. Bu da şu anlama gelir, izostatik bilinmeyenler serbest değişkendir. O halde, izostatik bilinmeyenler homojen denklem sisteminde karşımıza çıkan serbest değişkenler ile aynı anlamdadır ve temel çözümler de birim yüklemelerden oluşan iç kuvvetlerdir. Yukarıda açıklanan homojen denklem sistemi çözümünde serbest değişkenler kendiliğinden ortaya çıktığı için, bu çözüm metodu herhangi bir hiperstatik sistemin izostatik sisteminin otomatik seçimi ve birim yüklemelere ait iç kuvvetlerin hesabının da otomatik belirlenmesinde kullanılabilir. Aşağıdaki basit örnek konuya açıklık getirecektir.

Örnek 3:

Aşağıda verilen kafes sistemin içten hiperstatiklik derecesi 1 dir (2 veya 4 nolu çubuk olmasaydı 1 ve 2 nolu düğümün denge denklemleri ile tüm çubuk kuvvetleri hesaplanabilirdi). Homojen denklem sistemi çözümü kullanılarak izostatik sistemin seçimi ve birim yüklemeden oluşan iç kuvvetlerin hesabı otomatik olarak yapılacaktır.



1 noktasında denge:

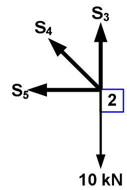


Cos 45=0.7071

$S_1+0.7071S_2=0$

$0.7071S_2+S_3=0$

2 noktasında denge:



$0.7071S_4+ S_5=0$

$S_3+0.7071S_4 =10$

Matris notasyonunda sistemin denge denklemi:

Denge matrisi

Çubuk kuvvetleri ≡ Bilinmeyenler

Dış yük vektörü

$$\underline{A}\underline{S}=\underline{P},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

İzostatik sistemin denge denklemi(dış yük yok):

$$\underline{A}\underline{S}=\underline{0},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sistemi

Homojen denklem sisteminin çözümü: Çözüm için basit GAUSS indirgeme metodu uygulanacaktır.

1.ve 2.adımlar: 1 ve 2 kolonun diyagonali altındaki sayılar kendiliğinden sıfır olduğundan bu adımlarda denklem sistemi değişmez.

3.adım:

Pivot=0, kolon değiştirilecek

$$\begin{bmatrix}1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.7071 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_5\\S_4\\S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\underline{x}_0$

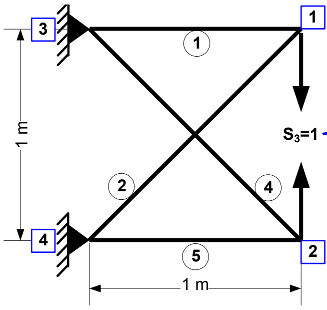
$\underline{U}$ $\quad$ $\underline{\tilde{a}}_1$

$\underline{x}_1=S_3$=Hiperstatik bilinmeyen

S_3 serbest değişken≡Hiperstatik bilinmeyen olarak karşımıza çıkmıştır. 3 nolu çubuk kesilmiştir.
S_3 serbet değişkenini=1 seçelim≡birim yükleme:

$$\begin{bmatrix}1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_5\\S_4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

S_3=1 (birim yükleme)



S_3=1 (birim yükleme)

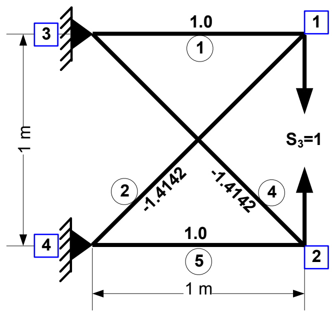
$$\begin{bmatrix}1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_5\\S_4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0.7071 & 0 & 0\\ 0 & 0.7071 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.7071\\ 0 & 0 & 0 & 0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_5\\S_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$\underline{\tilde{a}}_1$ $\quad$ S_3=1 (birim yükleme) $\quad$ $-\underline{\tilde{a}}_1 S_3=-\underline{\tilde{a}}_1\cdot 1$

$$S_1=(0-.7071\cdot(-1.4142)/1=1.0\ kN$$
$$S_2=-1/0.7071=-1.4142\ kN$$
$$S_5=(0-0.7071\cdot(-1.4142)/1=1.0\ kN$$
$$S_4=-1/0.7071=-1.4142\ kN$$
$$S_3=1.0\ kN \text{ (seçilmiş serbest değişken} \equiv \text{birim yükleme)}$$

$$\underline{S}=\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0\\-1.4142\\1.0\\-1.4142\\1.0\end{bmatrix}$$

Homojen denklem sisteminin çözümü ≡ birim yüklemeden izostatik sistemde oluşan iç kuvvetler



NOT:

$\underline{A}$ $\underline{x}$=$\underline{0}$ homojen denklem sisteminin d=m-n adet temel çözümü olduğu yukarıda açıklanmıştı. Bu temel çözümlerden oluşan d vektörlü $\underline{x}$ matrisine $\underline{A}$ nın çekirdeği (İng.: Kernel veya Nullspace) denir.

$\underline{A}$ nın çekirdeği $\underline{x}$, GAUSS, DOOLITLE, GAUSS-JORDAN veya SVD (Singular value decomposition) metotları ile belirlenir. Büyük denklem sistemlerinde SVD metodu tercih edilir.

İnhomojen denklem sistemi

Karşı taraf vektörü sıfırdan farklı olan denklem sistemlerine inhomojen denklem sistemi adı verilir. A x = b inhomojen denklem sistemi n denklem ve m bilinmeyen içerir ve n<m dir:

$$\underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&.&\dots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&.&\dots&a_{2m}\\.&.&.&\dots&.\\a_{n1}&a_{n1}&.&\dots&a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\.\\b_n\end{bmatrix}\qquad \text{Örnek: }\begin{bmatrix}3&-7&4&4&-2\\-2&3&9&1&0\\6&6&-6&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-10\\3\end{bmatrix}\tag{10.8}$$

Katsayılar matrisi A satır düzenlidir, satırları doğrusal bağımlı değildir, rank A=n dir. n<m olduğundan A nın d=m-n kolonu doğrusal bağımlıdır. A x = b sistemi A nın kolonlarına yer değiştirilerek

$$\begin{bmatrix}\underline{a}_0 & \underline{a}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_0\\\underline{x}_1\end{bmatrix}=\underline{b}\tag{10.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\underline{a}_0$ düzenli bir matristir, det $\underline{a}_0 \neq \underline{0}$ dır, tersi vardır:

$$\underline{a}_0\underline{x}_0+\underline{a}_1\underline{x}_1=\underline{b}$$

$$\underline{x}_0=\underline{a}_0^{-1}(\underline{b}-\underline{a}_1\underline{x}_1)$$

olur. $\underline{x}_1$ keyfi değerler alabilen serbest değişkenlerin vektörüdür. Genel çözüm

$$\underline{x}\;=\begin{bmatrix}\underline{a}_0^{-1}(\underline{b}-\underline{a}_1\underline{x}_1)\\\underline{x}_1\end{bmatrix}\tag{10.10}$$

olur.

Örnek 4:

Örnek 3 de verilen kafes sitemin izostatik sisteminde dış yükten oluşan iç kuvvetleri hesaplayalım. Hiperstatik sistemin denklem sistemi

$$\underline{A}\underline{S}=\underline{P},\quad\begin{bmatrix}1&0.7071&0&0&0\\0&0.7071&1&0&0\\0&0&0&0.7071&1\\0&0&1&0.7071&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\10\end{bmatrix}$$

Dış yük

idi. Bu denklem sistemi basit GAUSS ile indirgenirse

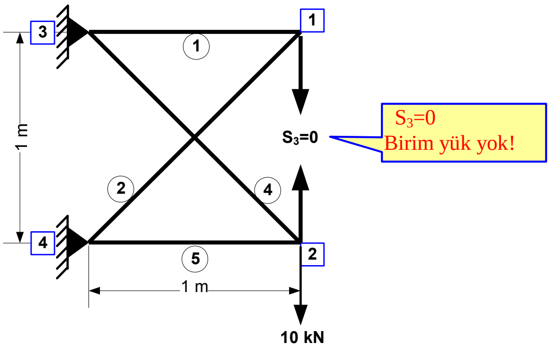
$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0.7071&0&0\\0&0.7071&0&0\\0&0&1&0.7071\\0&0&0&0.7071\end{bmatrix}}_{\underline{U}}\;\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{a}}_1}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_5\\S_4\\S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\10\end{bmatrix}$$

$\underline{x}_1=S_3\equiv$ Hiperstatik bilinmeyen

S_3 serbest değişken≡Hiperstatik bilinmeyen olarak karşımıza çıkmıştır. 3 nolu çubuk kesilmiştir. İzostatik sistemde dış yük varken birim yükleme yoktur. S_3 serbet değişkeni=0 seçilmelidir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_5 \\ S_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

S_3=0 (birim yükleme yok)



Son kolonun 0 ile çarpılıp karşı tarafa atıldığı düşünülürse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_5 \\ S_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_5 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\tilde{a}_1$

S_3=0 (birim yükleme yok!)

Yukarı doğru hesap ile:

$S_1 = 0$

$S_2 = 0$

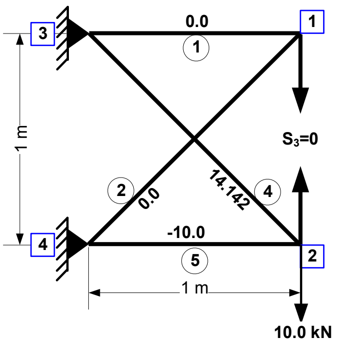
$S_5 = (0 - 0.7071 \cdot 14.142)/1 = -10.0\ kN$

$S_4 = 10/0.7071 = 14.142\ kN$

$S_3 = 0$ (seçilmiş olan serbest değişken)

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14.142 \\ -10 \end{bmatrix}$$

İnhomojen denklem sisteminin çözümü ≡ Dış yükten izostatik sistemde oluşan iç kuvvetler



Kare katsayılı homojen ve inhomojen denklem sistemi

a)Homojen denklem sistemi:

Sayfa 93 de denklem sayısı bilinmeyen sayısından az, n<m olan homojen denklem sisteminin çözümü tartışılmıştı. Uygulamada denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit, n=m olan homojen denklem sistemleri ile dinamik ve stabilete problemlerinde karşılaşılır ve çok daha büyük önem taşır. $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{0}$ homojen denklem sistemi n denklem ve n bilinmeyen içerir:

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{0}\rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Örnek: } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10.11)$$

Katsayılar matrisi $\underline{A}$ kare matristir. Çözüm için iki farklı durum vardır: det $\underline{A}\neq 0$ ve det $\underline{A}=0$ durumu.

det $\underline{A}\neq 0$ durumu: $\underline{A}$ nın tersinin tanımlı olduğu anlamındadır. $\underline{A}\ \underline{x}=\underline{0}$ homojen denklemi $\underline{A}^{-1}$ ile çarpılırsa $\underline{A}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{x}=\underline{A}^{-1}\underline{0} \rightarrow \underline{x}=\underline{0}$ olmak zorundadır(trivial çözüm), bu çözüm önemsenmez.

det $\underline{A}=0$ durumu: $\underline{A}$ nın satırlarının doğrusal bağımlı olması, yani rank $\underline{A}$<n, olması halinde mümkündür. İndirgeme sonucunda $\underline{A}$ nın en az bir satırının tüm elemanları sıfıra dönüşür. Aynı denklemin karşı tarafı da zaten sıfırdır. Neticede denklemlerden en az biri yok olur. Bu da kare katsayılı denklem sisteminin dikdörtgen katsayılı denklem sistemine dönüştüğü, en az bir serbest değişkenin bulunacağı anlamındadır. Dolayısıyla en az bir temel çözüm vardır. 93. sayfada verilen çözüm tekniği ile temel çözüm veya çözümler bulunabilir.

Örnek 5:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ çözümü?}$$

Basit GAUSS ile indirgeme:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det \underline{A} = 1\cdot(-2)\cdot 1 = -2$$

Det $\underline{A}\neq 0$ olduğundan sadece sıfır(trivial) çözüm vardır, $\underline{x}=\underline{0}$ dır.

Örnek 6:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ çözümü?}$$

Basit GAUSS ile indirgeme:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det \underline{A} = 1\cdot(-2)\cdot 0 = 0$$

Sıfırlanan satır.

det $\underline{A}$=0 olduğundan $\underline{x}\neq\underline{0}$ çözümü vardır. İndirgenmiş katsayılar matrisi incelenirse:

- 3. satırın tüm elemanları sıfır olmuş, 3. denklem yok olmuş, sadece iki denklem kalmıştır.
- x_3 bilinmeyeni serbest değişken olarak ortaya çıkmıştır.
- Bir serbest değişken olduğundan bir temel çözüm vardır.
- x_3 serbest değişkenine herhangi bir değer verilerek, mesela x_3=1 seçilerek, diğer değişkenler hesaplanabilir.

x_3=1 seçilirse:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1=(-1-(-2\cdot 1)/1=1 \\ x_2=-2/(-2)=1 \end{matrix} \rightarrow \underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sisteminin temel çözümü $\underline{x}=[1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ olarak bulunur.

b)İnhomojen denklem sistemi:

$$\underline{A}\underline{x}=b, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{Örnek:} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad (10.2)$$

- İnhomojen denklen sisteminde det $\underline{A}\neq0$ ise, bilindiği gibi, çözüm vardır ve tektir. Bölüm 5-6 de verilen yöntemlerden biri (Basit GAUSS, DOLITTLE, CROUT, CHOLESKY,…) ile çözüm bulunur.
- det $\underline{A}$=0 ise çözüm, ya yoktur veya birden çok çözüm vardır. det $\underline{A}$=0 durumu $\underline{A}$ nın satırlarının doğrusal bağımlı olduğu anlamındadır. Bu nedenle indirgeme sonucunda, $\underline{A}$ nın en az bir satırının tüm elemanları sıfıra dönüşür. Aynı satırın karşı tarafı sıfır veya sıfırdan farklı olabilir.

  Aynı satırdaki karşı taraf sıfırdan farklı ise: sıfır=bir sayı gibi bir denklem var demektir. Bu, matematik anlamda bir çelişkidir, denklemlerin kuruluşunda bir hata vardır, denklemler tutarsızdır, çözüm yoktur.

  Aynı satırdaki karşı taraf da sıfır ise: en az bir serbest değişken var demektir. Denklem sistemi sayfa 101 de verilen yolla çözülür.

Örnek 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{çözümü?}$$

det $\underline{A}$=-2≠0 dır (yukarıdaki örnek 5 e bakınız). Bu nedenle çözüm vardır ve tektir, GAUSS ile bulunabilir: $\underline{x}=[-1 \;\; 3 \;\; 1]^T$ dir.

Örnek 8:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -10\\ 8\end{bmatrix}$$ çözümü?

Basit GAUSS ile indirgeme:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -4\\ 14\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -4\\ 12\end{bmatrix}\rightarrow \det \underline{A}=1\cdot(-2)\cdot 0=0$$

<u>A</u> nın sıfırlanan satırı. det A=0

Aynı satırın karşı tarafı sıfırdan farklı: $0 \cdot x_3 = -3$ matematik çelişkidir.

det <u>A</u>=0 ve <u>A</u> nın üçüncü satırının tüm elemanları sıfır olmuş, fakat 3. satırın karşı tarafı 12 olmuş. 3. denklem $0 \cdot x_3=12$ dir. Matematik olarak böyle bir eşitlik olamaz. Demek ki çözümü istenen denklem sisteminin denklemleri çelişkilidir, denklem sisteminin kuruluşunda bir hata vardır. Netice olarak bu denklem sisteminin çözümü yoktur.

Örnek 9:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -10\\ -8\end{bmatrix}$$ çözümü?

Basit GAUSS ile indirgeme:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -4\\ -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -4\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow \det \underline{A}=1\cdot(-2)\cdot 0=0$$

<u>A</u> nın sıfırlanan satırı. det A=0

Aynı satırın karşı tarafı da sıfır

det <u>A</u>=0 dır. 3. satır hem sol hem de sağ tarafta sıfırdır. $0 \cdot x3=0$ denklemi matematik olarak çelişkili değildir. x_3 ün keyfi her değeri için bu denklem sağlanır. x_3 serbest değişkendir, sonsuz çözüm vardır. $x_3=1$ seçelim, üçüncü kolonu $x_3=1$ ile çarparak karşı tarafa atalım:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -4\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}x_3=\begin{bmatrix}-7\\ -6\end{bmatrix}$$

Yukarı doğru hesap ile:

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\ -6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{matrix}x_1=(-7-(-2)\cdot 3)/1=-1\\ x_2=-6/(-2)=3\\ x_3=1 \text{ seçildi}\end{matrix}\quad\rightarrow \underline{x}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

$x_3=1$ için çözüm $\underline{x}=[-1 \quad 3 \quad 1]^T$ dir. x_3 serbest değişkeni için başka sayısız değer seçilebileceğinden sonsuz çözüm vardır.