ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli

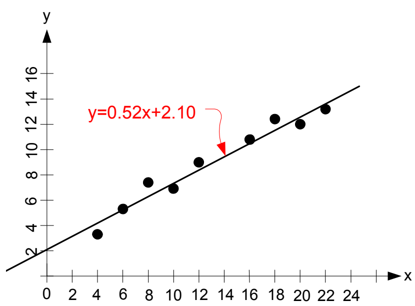
Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

n>m

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \\ 14 & 1 \\ 16 & 1 \\ 18 & 1 \\ 20 & 1 \\ 22 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.3 \\ 5.3 \\ 7.4 \\ 6.9 \\ 9.0 \\ 8.6 \\ 10.8 \\ 12.4 \\ 12.0 \\ 13.2 \end{bmatrix} \rightarrow$$



9

DENKLEM SAYISININ BİLİNMEYEN SAYISINDAN ÇOK OLDUĞU DENKLEM SİSTEMLERİ: DENGELEME HESABI

- **En küçük kareler metodu**
- **QR çarpanlara ayırma metodu**

9. DENKLEM SAYISININ BİLİNMEYEN SAYISINDAN ÇOK OLDUĞU DENKLEM SİSTEMLERİ: DENGELEME HESABI

Denklem sayısının bilinmeyen sayısından çok olması durumudur. Gözlem, ölçüm ve deneye dayalı problemlerde ortaya çıkar. Ölçümler hata içerir. Mesela jeodezik ölçümlerde; okuma hatası, alet hatası, atmosferik koşullar(ışığın kırılması, hava basıncı, sıcaklığı gibi) gerçek değerlerin belirlenmesini imkânsız kılar. Ölçme ve deney yoluyla belirlenen veri hatalarını en aza indirgemek için gereğinden çok ölçüm yapılır ve bilinmeyen sayısından daha çok denklem oluşturulur. Kesin çözüm yoktur, çözüm yaklaşıktır ve minimum hata olacak şekilde bulunmaya(dengelenmeye) çalışılır.

$\underline{A}\ \underline{x} \approx \underline{b}$ genel denklem sistemi n denklem ve m bilinmeyen içerir ve n>m dir:

$$\underline{A}\underline{x} \approx \underline{b}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \text{Örnek:} \begin{bmatrix} 3.1 & -6.6 \\ -2.9 & 4.2 \\ 2.7 & 5.8 \\ 1.8 & 2.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.58 \\ 2.01 \\ -4.43 \\ 3.39 \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

$\underline{b}$ karşı taraf vektörü hata(ölçme hatası) içerir. $\underline{A}$ kolon düzenlidir, yani rank $\underline{A}$=m dir. Ancak, denklemler uyumlu olmadığından, denklemlerin hepsini de tam olarak sağlayan $\underline{x}$ vektörü bulmak mümkün değildir. ***Elden geldiğince iyi bir çözüm*** bulmaya çalışılır. *Elden geldiğince iyi bir çözüm* nedir? $\underline{x}$ öyle hesaplanmalı ki denklem sisteminde yerine konulduğunda, ki denklemi sağlamayacaktır, oluşacak $\underline{h}$ fark vektörünün

$$\underline{h} = \underline{A}\ \underline{x} - \underline{b} \tag{9.2}$$

elemanlarının karelerinin toplamı minimum olsun:

$$f(\underline{h}) = \underline{h}^T \underline{h} \rightarrow \min \tag{9.3}$$

Bu koşulu sağlayacak farklı çözüm yöntemleri vardır. Bunlardan ilki, "**En küçük kareler metodu**", **LEGENDRE**[1] tarafından 1806 yılında yayınlandı. En küçük kareler metodunu **GAUSS**'un 1794-1795 yıllarında geliştirdiği fakat yayınlamadığına inanılır. Metot **LEGENDRE** tarafından yayınlanmasına rağmen onun adıyla değil **GAUSS** adı ile anılır. Bir diğer metot **QR** çarpanlara ayırma metodudur.

Adrien-Marie **Legendre**(1752-1833)

En küçük kareler metodu

9.3 koşulu 9.2 de yerine konarak

$$f(\underline{h}) = \underline{h}^T \underline{h} = (\underline{A}\underline{x} - \underline{b})^T (\underline{A}\underline{x} - \underline{b}) = \underline{x}^T \underline{A}^T \underline{A}\underline{x} - \underline{x}^T \underline{A}^T \underline{b} - \underline{b}^T \underline{A}\underline{x} + \underline{b}^T \underline{b}$$

Bu ifade artık $\underline{h}$ nın değil $\underline{x}$ in fonksiyonudur.

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{A}^T \underline{A}\underline{x} - 2\underline{x}^T \underline{A}^T \underline{b} + \underline{b}^T \underline{b} \rightarrow \min$$

Minimum olma koşulu $\dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$ dır. $\underline{A}^T \underline{A}$ simetrik ve kare bir matristir.

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = 2\underline{A}^T \underline{A}\underline{x} - 2\underline{A}^T \underline{b} = \underline{0}$$

$$\underline{A}^T \underline{A}\underline{x} = \underline{A}^T \underline{b} \tag{9.4}$$

olur[2].

[1] Adrien-Marie **Legendre** (1752-1833), Fransız

[2] Matris ifadelerin türevinin alınması ile ilgili temel kurallar için bak: Bölüm 2**.**

$$\underline{B} = \underline{A}^T \underline{A} \text{ ve } \underline{c} = \underline{A}^T \underline{b} \tag{9.5}$$

ile kısaltılırsa

$$\underline{B}\underline{x} = \underline{c} \tag{9.6}$$

olur. Bu bağıntıdan hesaplanan $\underline{x}$ minimum hata içerir. 9.4 ve karşılığı olan 9.5 bağıntısına ***en küçük kareler metodunun normal denklemleri*** adı verilir. $\underline{A}^T \underline{A}$ veya karşılığı $\underline{B}$ simetrik, pozitif tanımlı kare matristir, det $\underline{B} \neq 0$ dır. 9.6 denklem sistemi **CHOLESKY** ile çözülerek $\underline{x}$ bulunur. Bu şekilde hesaplanan $\underline{x}$ minimum hata içerir ve 9.3 koşulunu sağlar. Ancak 9.1 genel denklemini tam olarak sağlamaz, yani $\underline{x}$ ***elden geldiğince iyi bir çözümdür***, hatalar elden geldiğince dengelenmiştir.

Örnek 1:

Bir altın külçe 4 kez tartılıyor ve 1000.3, 1000.1, 998, 1000.15 gram geliyor. Muhtemelen hiçbiri doğru değil. Külçenin minimum hata içeren kütlesi ne kabul edilmelidir. Kütlesini x ile gösterelim. Matris notasyonunda denklem sistemi

$$\underline{A}\underline{x} \approx \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \approx \begin{bmatrix} 1000.3 \\ 1000.1 \\ 998 \\ 1000.15 \end{bmatrix}$$

olur. 3.4.5 ve 3.4.6 ya göre

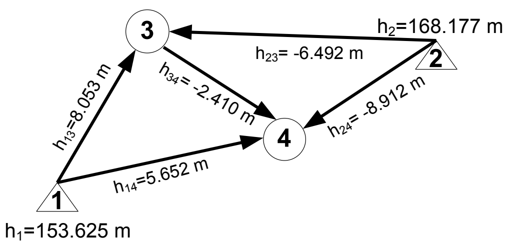
$$\underline{B} = \underline{A}^T \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \qquad \underline{c} = \underline{A}^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000.3 \\ 1000.1 \\ 998 \\ 1000.15 \end{bmatrix} = 3998.55$$

Minimum hata koşulu:

$\underline{B}\underline{x} = \underline{c} \rightarrow 4x=3998.55 \rightarrow x=999.6375$ gramdır (ortalama değer olduğuna dikkat ediniz).

Örnek 2:

1 ve 2 nolu nirengi noktalarının yükseklikleri bilinmektedir: h_1=153.625 m, h_2=168.177 m. 3 ve 4 noktalarının yüksekliklerini belirlemek için noktaların yükseklik farkları aşağıdaki gibi ölçülmüştür:



1 noktasında durularak 1-3 yükseklik farkı ölçülmüş, h_{13}=8.053 m
1 noktasında durularak 1-4 yükseklik farkı ölçülmüş, h_{14}=5.652 m
2 noktasında durularak 2-3 yükseklik farkı ölçülmüş, h_{23}=-6.492 m
2 noktasında durularak 2-4 yükseklik farkı ölçülmüş, h_{24}=-8.912 m
3 noktasında durularak 3-4 yükseklik farkı ölçülmüş, h_{34}=-2.410 m

3 ve 4 noktalarının en az hata içeren h_3 ve h_4 yüksekliklerini bulunuz?

Denklemler:

$h_1+h_{13}= h_3 \rightarrow 153.625+8.053= h_3 \rightarrow h_3=161.678$ m

$h_1+h_{14}= h_4 \rightarrow 153.625+5.652= h_4 \rightarrow h_4=159.277$ m

$h_2+h_{23}= h_3 \rightarrow 168.177-6.492= h_3 \rightarrow h_3=161.685$ m

$h_2+h_{24}= h_4 \rightarrow 168.177-8.912= h_4 \rightarrow h_4=159.265$ m

$h_3+h_{34}= h_4 \rightarrow h_3- h_4=- h_{34} \rightarrow h_3- h_4=-(-2.410)=2.410$ m

Bu denklemler matris notasyonunda yazılırsa

$$\underline{A}\underline{x} \approx \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 161.678 \\ 159.277 \\ 161.685 \\ 159.265 \\ 2.410 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \underline{A}^T \underline{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{c} = \underline{A}^T \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 161.678 \\ 159.277 \\ 161.685 \\ 159.265 \\ 2.410 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 325.773 \\ 316.132 \end{bmatrix}$$

Minimum hata koşulu:

$$\underline{B}\underline{x} = \underline{c} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 325.773 \\ 316.132 \end{bmatrix} \rightarrow Cholesky \rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161.681 \\ 159.271 \end{bmatrix} m$$ bulunur.

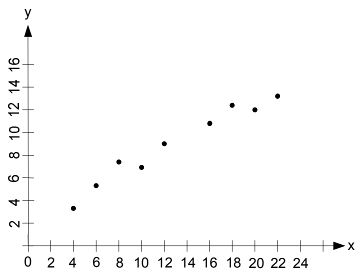
Hata vektörünü ve hataların karelerinin toplamını bulalım:

$$\underline{h} = \underline{A}\underline{x} - \underline{b} \rightarrow \underline{h} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 161.681 \\ 159.271 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 161.678 \\ 159.277 \\ 161.685 \\ 159.265 \\ 2.410 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003 \\ -0..006 \\ -0.004 \\ 0.006 \\ 2.4869 \cdot 10^{-14} \end{bmatrix}, \qquad \underline{h}^T \underline{h} = 0.000097$$

Örnek 3:

y_i ordinatları deneysel olarak belirlenen 10 noktanın koordinatları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Nokta no→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
y_i	3.3	5.3	7.4	6.9	9.0	8.6	10.8	12.4	12.0	13.2



Bu noktalar x-y düzleminde işaretlendiğinde sağdaki grafik oluşuyor. Noktalar neredeyse bir doğru üzerindeymiş gibi görünüyor. Bu noktaları en iyi temsil edecek bir doğru uydurmak istiyoruz.

Doğru denklemi y=ax+b dir. En uygun a ve b sayılarını belirlememiz gerekiyor. Tablodaki koordinatlar bu denklemde yerine konarak bulanan 10 denklem ve matris notasyonundaki karşılığı:

3.3=4a+b
5.3=6a+b
7.4=8a+b
6.9=10a+b
9.0=12a+b
8.6=14a+b
10.8=16a+b
12.4=18a+b
12=20a+b
13.2=22a+b

$$\underline{A}\underline{x} \approx \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \\ 14 & 1 \\ 16 & 1 \\ 18 & 1 \\ 20 & 1 \\ 22 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.3 \\ 5.3 \\ 7.4 \\ 6.9 \\ 9.0 \\ 8.6 \\ 10.8 \\ 12.4 \\ 12.0 \\ 13.2 \end{bmatrix}$$

Normal denklem ve çözümü:

$$\underline{B}=\underline{A}^T\underline{A}=\begin{bmatrix}2020 & 130\\ 130 & 10\end{bmatrix},\quad \underline{c}=\underline{A}^T\underline{b}=\begin{bmatrix}1328\\ 88.9\end{bmatrix}$$

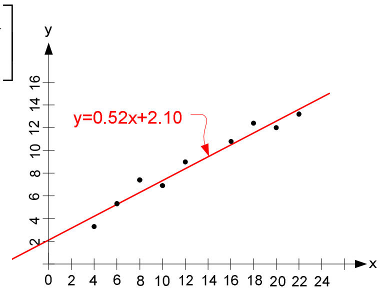
Minimum hata koşulu:

$$\underline{B}\underline{x}=\underline{c}\rightarrow\begin{bmatrix}2020 & 130\\ 130 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1328\\ 88.9\end{bmatrix}\rightarrow Cholesky\rightarrow\underline{x}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.522121\\ 2.10242\end{bmatrix}$$

a≈0.52 ve b≈2.10 alınarak y=ax+b doğrusunun denklemi:

y=0.52x+2.10

olur. Bu doğru sağda görülen x-y düzleminde çizilmiştir.



Hata vektörünü ve hataların karelerinin toplamını 2. örnekteki yolla bulalım:

$$\underline{h}=\underline{A}\underline{x}-\underline{b}\rightarrow,\qquad \underline{h}^T\underline{h}=4.66762$$

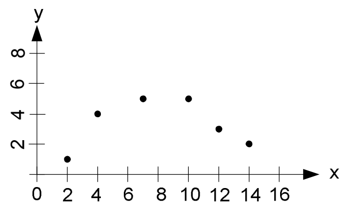
Hataların karelerinin toplamı oldukça büyüktür. Noktalar bir doğru denklemi yerine, daha yüksek dereceden bir eğri ile modellenirse hatanın azalacağı beklenir.

Örnek 4:

y_i ordinatları deneysel olarak belirlenen 6 noktanın koordinatları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Nokta no→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\mathbf{x_i}$	2	4	7	10	12	14
$\mathbf{y_i}$	1	4	5	5	3	2

Bu noktalar x-y düzleminde işaretlendiğinde sağdaki grafik oluşuyor. Noktalar bir eğri gibi görünüyor. Bu noktaları en iyi temsil edecek bir eğri uydurmak istiyoruz. Eğrinin derecesini tam olarak bilemiyoruz, ama ikinci derece bir polinom (parabol) gibi görünüyor. Bir parabol uydurmaya çalışalım.



İkinci derece polinomun(parabolün) genel denklemi $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ dir. En uygun a_0, a_1, a_2 sayılarını bulmak istiyoruz. Tablodaki koordinatlar $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ fonksiyonunda yerine konarak:

$1=a_0+2a_1+2^2a_2$
$4=a_0+4a_1+4^2a_2$
$5=a_0+7a_1+7^2a_2$
$5=a_0+10a_1+10^2a_2$
$3=a_0+12a_1+12^2a_2$
$2=a_0+14a_1+14^2a_2$

$$\underline{A}\underline{x}\approx\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 16\\ 1 & 7 & 49\\ 1 & 10 & 100\\ 1 & 12 & 144\\ 1 & 14 & 196\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 5\\ 5\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

Normal denklem ve çözümü:

$$\underline{B}=\underline{A}^T\underline{A}=\begin{bmatrix}6 & 49 & 509\\ 49 & 509 & 5887\\ 509 & 5887 & 71825\end{bmatrix},\quad \underline{c}=\underline{A}^T\underline{b}=\begin{bmatrix}20\\ 167\\ 1637\end{bmatrix}$$

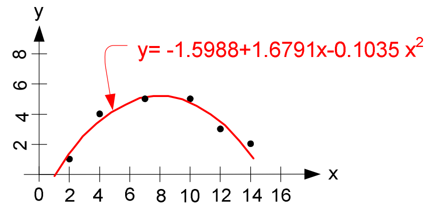
Minimum hata koşulu:

$$\underline{B}\underline{x}=\underline{c}\rightarrow\begin{bmatrix}6 & 49 & 509\\ 49 & 509 & 5887\\ 509 & 5887 & 71825\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 167\\ 1637\end{bmatrix}\rightarrow Cholesky\rightarrow\underline{x}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.59881\\ 1.67906\\ -0.1035\end{bmatrix}$$

$a_0 \approx -1.5988$, $a_1 \approx 1.6791$ ve $a_2=-0.1035$ alınarak $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ eğrisinin denklemi:

$y=-1.5988+1.6791x-0.1035x^2$

olur. Bu eğri sağda görülen x-y düzleminde çizilmiştir.

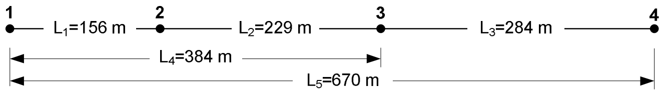


Hata vektörünü ve hataların karelerinin toplamını 2. örnekteki yolla bulalım:

$$\underline{h} = \underline{A}\underline{x} - \underline{b} \rightarrow \quad \underline{h}^T \underline{h} = 1.0013$$

Örnek 5:

Bir doğru üzerinde bulunan 4 noktanın aralarındaki mesafeler ölçülmüştür. Ayrıca, ölçüm hatalarını azaltmak için, 1 -3 arası ve 1-4 arası da ölçülmüştür. Ölçülen değerler sağdaki şekilde gösterilmiştir. Ölçüm hatalarını dengeleyiniz.



Ölçümler: $L_1=156$ m, $L_2=229$ m, $L_3=284$ m, $L_4=384$, $L_5=670$ m

Ayrıca, noktalar bir doğru üzerinde olduğundan, şu ek koşulların da sağlanması gerekir:
$L_4-L_1-L_2=0$
$L_5-L_1-L_2-L_3=0$
$L_5-L_3-L_4=0$

Denklem sistemi ve çözümü:

$$\underline{A}\underline{x} \approx \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ -1 & -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & & 1 \\ & & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 156 \\ 229 \\ 284 \\ 384 \\ 670 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{B} = \underline{A}^T \underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{c} = \underline{A}^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 156 \\ 229 \\ 284 \\ 384 \\ 670 \end{bmatrix}$$

Minimum hata koşulu:

$$\underline{B}\underline{x} = \underline{c} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156 \\ 229 \\ 284 \\ 384 \\ 670 \end{bmatrix} \rightarrow Cholesky \rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 155.914 \\ 228.914 \\ 284.514 \\ 384.600 \\ 669.486 \end{bmatrix} \text{ metre}$$

Hata vektörünü ve hataların karelerinin toplamını 2. örnekteki yolla bulalım:

$$\underline{h} = \underline{A}\underline{x} - \underline{b} \rightarrow \quad \underline{h}^T \underline{h} = 1.11429$$

Örnek 6:

Üç kişi aynı teraziyi kullanarak tartılıyorlar. Her biri önce tek tek tartılıyor, 75, 100, 50 kg geliyorlar. Sonra 1. ve 2. kişi beraber tartılıyor, 178 kg geliyorlar. Sonra 1. ve 3. kişi beraber tartılıyor, 122 kg geliyorlar. Sonra 2. ve 3. kişi beraber tartılıyor, 156 kg geliyorlar. Son olarak üçü birden tartılıyor ve 227 kg geliyorlar. Her birinin kütlesi nedir?

Ölçülen değerler:
x_1=75 kg.
x_2=100 kg.
x_3=50 kg.
x_4=178 kg.
x_5=122 kg.
x_6=156 kg.
x_7=227 kg.

Ayrıca, şu ek koşulların da sağlanması gerekir:
$x_4 - x_1 - x_2 = 0$
$x_5 - x_1 - x_3 = 0$
$x_6 - x_2 - x_3 = 0$
$x_7 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$

Denklem sistemi ve çözümü:

$$\underline{A}\underline{x} \approx \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ -1 & -1 & & 1 & & & \\ -1 & & -1 & & 1 & & \\ & -1 & -1 & & & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 75 \\ 100 \\ 50 \\ 178 \\ 122 \\ 156 \\ 227 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{B} = \underline{A}^T \underline{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{c} = \underline{A}^T \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 75 \\ 100 \\ 50 \\ 178 \\ 122 \\ 156 \\ 227 \end{bmatrix}$$

Minimum hata koşulu:

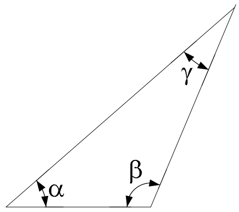
$$\underline{B}\underline{x} = \underline{c} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \rightarrow \begin{bmatrix} 75 \\ 100 \\ 50 \\ 178 \\ 122 \\ 156 \\ 227 \end{bmatrix} \rightarrow Cholesky \rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.3333 \\ 102.3330 \\ 50.3333 \\ 177.3330 \\ 123.3330 \\ 154.3330 \\ 227.000 \end{bmatrix} \text{kg}$$

1. kişi 74 kg, 2. kişi=102 kg, 3. kişi=50 kg.

Hata vektörünü ve hataların karelerinin toplamını 2. örnekteki yolla bulalım:

$$\underline{h} = \underline{A}\underline{x} - \underline{b} \rightarrow \quad \underline{h}^T \underline{h} = 16.0$$

Örnek 7:



Bir üçgenin açıları $\alpha = 41^0$, $\beta = 113^0$, $\gamma = 27^0$ olarak ölçülmüştür. Dengelenmiş açıları bulunuz.

Açılar birbirinden bağımsız değildir. γ açısını diğerleri cinsinden yazarsak

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 27 \rightarrow \alpha + \beta = 153$$

olmalıdır. Bu durumda problemin iki bilinmeyeni vardır: α ve β.

Denklemler ve çözüm:

$$\alpha = 41^0$$
$$\beta = 113^0$$
$$\alpha + \beta = 153^0$$

$$\underline{A}\underline{x} \approx \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 41 \\ 113 \\ 153 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{B} = \underline{A}^T \underline{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{c} = \underline{A}^T \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 194 \\ 266 \end{bmatrix}$$

Minimum hata koşulu:

$$\underline{B}\underline{x} = \underline{c} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 194 \\ 266 \end{bmatrix} \rightarrow Cholesky \rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.6667 \\ 112.667 \end{bmatrix}$$

Dengelenmiş açılar:

$$\alpha = 40.66671^0$$
$$\beta = 112.6667^0$$
$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 180 - 40.6667 - 112.6667 = 26.6666^0$$

Hata vektörünü ve hataların karelerinin toplamını bulalım:

$$\underline{h} = \underline{A}\underline{x} - \underline{b} \rightarrow \underline{h} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40.6667 \\ 112.667 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 41 \\ 113 \\ 153 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.333333 \\ -0.333333 \\ 0.333333 \end{bmatrix}, \quad \underline{h}^T \underline{h} = 0.333333$$

NOT:
Uygulamada genellikle $\underline{A}_{nxm}$ matrisinin satır sayısı çok fazla (n çok büyük), buna karşın kolon sayısı azdır (m küçük).
$\underline{A}^T \underline{A}$ veya karşılığı olan $\underline{B}$ matrisinin elemanlarının bazıları çok büyük, bazıları da çok küçük olabilmektedir (4.örneğe bakınız). Bu tür matrisler tekile yakındır, nümerik zorluk yaratır. Denklem sisteminin çözümünde yuvarlama hataları fazla olur, hatta çözüm bulunamayabilir. Dolayısıyla, en küçük kareler metodunun istikrarsız(instabil) olduğu söylenebilir.

QR çarpanlara ayırma metodu[1]

Yukarıdaki nedenlerle dengeleme hesabında **En küçük kareler metodu** yerine **QR çarpanlara ayırma metodu** tercih edilir. QR çarpanlara ayırma metodu $\underline{A}_{nxm}$ matrisini, $\underline{Q}$ ortogonal matris ve $\underline{R}$ tekil olmayan üst üçgen matris olmak üzere

$$\underline{A} = \underline{Q}\underline{R}$$

[1]1961 yılında, birbirinden bağımsız olarak, İngiliz John G. F. **Francis(1934-)** ve Rus V. N. **Kublanovskaya(1920- t**arafından geliştirildi. 20. yüzyılın en iyi 10 algoritmasından biri seçildi. Bak: http://amath.colorado.edu/resources/archive/topten.pdf

şeklinde çapanlarına ayırır. $\underline{Q}$ ortogonal matrisi **Gram-Schmidt, Householder veya givens** ortogonalleştirme metotlarından biri ile $\underline{A}$ matrisinden hesaplanır. $\underline{Q}$ ortogonal, yani $\underline{Q}^T\underline{Q}=\underline{I}$, olduğundan $\underline{A}\underline{x}\approx\underline{b}$ dengeleme problemi

$$\underline{A}\underline{x}\approx\underline{b}\rightarrow\underline{Q}\underline{R}\underline{x}\approx\underline{b}\rightarrow\underline{Q}^T\underline{Q}\underline{R}\underline{x}=\underline{Q}^T\underline{b}\rightarrow\underline{I}\,\underline{R}\underline{x}=\underline{Q}^T\underline{b}\rightarrow\underline{R}\underline{x}=\underline{Q}^T\underline{b}$$

olur. $\underline{R}$ üst üçgen matrisinin tersi tanımlı olduğundan, $\underline{x}$ bilinmeyenler vektörü geriye doğru hesap ile veya teorik olarak

$$\underline{x}=\underline{R}^{-1}\underline{Q}^T\underline{b}$$

ile hesaplanır.

İşlem sayısı fazla olmasına rağmen, QR metodu istikrarlı(stabil) ve programlanması çok basit bir metottur.

Bu metodun teorik detayları için bak: http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/LinAlg/QRDecomposition.aspx

Bu bölümün programları için bak: Bölüm 20