ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli

Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

m=n

L U = A

Üst üçgen matris

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ . & . & . & \cdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \cdots & . \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Alt üçgen matris *Kare matris*

6

DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMÜ, ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ

- DOOLITTLE
- CROUT
- CHOLESKY

Mayric Hascall
Doolittle(1830-1913)

Prescott Duran
Crout (1907-1984)

André-Louis
Cholesky (1875 – 1918)

6. ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ: DOOLITLE, CROUT VE CHOLESKY

5. bölümde verilen indirgeme yöntemi GAUSS'un orijinal çözümüdür, bazen basit GAUSS yöntemi de denir. Basit GAUSS yöntemi hem katsayılar matrisini hem de karşı taraf vektörünü aynı anda değiştirerek katsayılar matrisi üst üçgen olan eşdeğer bir denklem sistemine dönüştürür. Uygulamada ise, çoğu kez, karşı taraf vektörünün indirgeme sırasında değiştirilmesi uygun olmaz. Katsayılar matrisi belli iken karşı taraf vektörü henüz bilinmiyor veya zaman zaman değişiyor olabilir.

Çarpanlara ayırma yöntemleri $\underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$ denklem sisteminin $\underline{A}$ katsayılar matrisini $\underline{A}=\underline{L}\ \underline{U}$ sağlanacak şekilde, bir $\underline{L}$ (Lower) alt üçgen ve bir $\underline{U}$ (Upper) üst üçgen matrisin çarpımına dönüştürürler. Çarpanlara ayırma işlemi sırasında karşı taraf vektörü $\underline{b}$ nin bilinmesine gerek yoktur. Bu yöntemlere göre $\underline{A}$ belli ise $\underline{L}$ ve $\underline{U}$ üçgen matrisleri $\underline{A}$ nın elemanlarından

$$\underline{L}\,\underline{U}=\underline{A} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ . & . & . & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{L alt üçgen}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots & . \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{U üst üçgen}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{A katsayılar matrisi}} \qquad (6.1)$$

eşitliği sağlanacak şekilde hesaplanırlar. $\underline{L}$ ve $\underline{U}$ belirlendikten sonra $\underline{b}$ de belli olunca çözüm için $\underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$ yerine

$$\underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x}=\underline{b} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ . & . & . & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{L alt üçgen}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots & . \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{U üst üçgen}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_{n1} \end{bmatrix}}^{\text{x bilinmeyenler vektörü}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_{n1} \end{bmatrix}}^{\text{b karşı taraf vektörü}} \qquad (6.2)$$

Eşdeğer denklem sistemi kullanılır. Bunun için 6.2 bağıntısında $\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y}$ dönüşümü yapılır:

$$\underline{L}\underbrace{\underline{U}\,\underline{x}}_{\underline{y}}=\underline{b} \rightarrow \underline{U}\,\underline{x}=\underline{y},\ \ \underline{L}\,\underline{y}=\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ . & . & . & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots & . \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_{n1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_{n1} \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

Bu dönüşüm sonucu katsayılar matrisi üçgen olan aşağıdaki iki denklem sistemi oluşur: $\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b}$ den $\underline{y}$ hesaplanır, $\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y}$ de yerine konur ve $\underline{x}$ hesaplanır.

$$\underline{L}\ \underline{y}=\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ . & . & . & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ y_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Yukarıdan aşağı doğru hesap yapılarak $\underline{y}$ bulunur

$\underline{y}$ burada yerine konur

$$\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y} \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots & . \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ y_{n1} \end{bmatrix} \qquad (6.4)$$

Aşağıdan yukarı doğru hesap yapılarak $\underline{x}$ bulunur

İlk bakışta bir yerine iki denklem sisteminin çözüleceği, işlem sayısının da katlanacağı sanılabilir. Bu doğru değildir. Çarpanlara ayırma yöntemi ile basit GAUSS yöntemi arasında gerçekte işlem sayısı açısından hiçbir fark yoktur. Tek fark, çarpanlara ayırma sırasında b vektörüne gerek olmamasıdır. Çarpanlara ayırma yöntemleri, basit GAUSS indirgeme yönteminin biraz değişik şeklidir, çok az fark ile birbirlerine çok benzerler. Uygulamada tercihan kullanılan DOOLITTLE, CROUT ve CHOLESKY yöntemleri burada ele alınacak, verilmiş bir A matrisinin L ve U üçgen çarpanlarına nasıl ayrılacağı açıklanacaktır.

- **DOOLITTLE**, metodunda L matrisinin bütün diyagonal elemanları **l_{ii}=1** alınır, **satırda pivot eleman aranır, gerekirse, kolonlara yer değiştirilir, $u_{ii} \neq 0$ olması sağlanır**.
- **CROUT** metodunda U matrisinin bütün diyagonal elemanları **u_{ii}=1** alınır, **kolonda pivot eleman aranır, gerekirse, satırlara yer değiştirilir, $l_{ii} \neq 0$ olması sağlanır.**
- **CHOLESKY** metodu sadece simetrik ve pozitif tanımlı matrisler için özel bir yöntemdir, diyagonal elemanlar $l_{ii} = \sqrt{a_{ii}}$, $u_{ii} = \sqrt{a_{ii}}$ alınır ve L=U^T dur, **pivot arama yapılmaz.**

DOOLITTLE[1] LU metodu

A verilmiş olsun, det A ≠ 0 olmak ve l_{ii}=1 alınmak kaydıyla

$$\underline{L}\,\underline{U} = \underline{A} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ . & . & . & \cdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \cdots & . \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{A}}$$

bağıntısı sağlanacak şekilde n adımda hem L hem de U nun tüm elemanları belirlenebilir. Matris çarpım kuralından yararlanarak, her adımda önce U nun bir satırı sonra L nin bir kolonu hesaplanır.

1.Adım:

U nun 1.satırının hesabı: *L nin 1. satırı ÇARPI U nun1., 2.,…,n. kolonları=A nın 1.satırıdır*

$$1 \cdot u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = a_{11}$$
$$1 \cdot u_{12} = a_{12} \rightarrow u_{12} = a_{12}$$
$$1 \cdot u_{13} = a_{13} \rightarrow u_{13} = a_{13}$$
$$\cdots$$
$$1 \cdot u_{1n} = a_{1n} \rightarrow u_{1n} = a_{1n}$$

L nin 1.kolonunun hesabı: *L nin 2., 3.,..,n. satırları ÇARPI U nun 1.kolonu=A nın 1.kolonudur*

$$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \rightarrow l_{21} = a_{21} / u_{11}$$
$$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \rightarrow l_{31} = a_{31} / u_{11}$$
$$\cdots$$
$$l_{n1} \cdot u_{11} = a_{n1} \rightarrow l_{n1} = a_{n1} / u_{11}$$

2.Adım:

U nun 2.satırının hesabı: *L nin 2.satırı ÇARPI U nun 2., 3.,…, n. kolonları=A nın 2.satırıdır*

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} \rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}$$
$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} = a_{23} \rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}$$
$$\cdots$$
$$l_{21} \cdot u_{1n} + 1 \cdot u_{2n} = a_{2n} \rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21} \cdot u_{1n}$$

L nin 2.kolonunun hesabı: *L nin 3.,4.,..,n. satırları ÇARPI U nun 2.kolonu=A nın 2.kolonudur*

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} \rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}) / u_{22}$$
$$l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} = a_{42} \rightarrow l_{42} = (a_{42} - l_{41} \cdot u_{12}) / u_{22}$$
$$\cdots$$
$$l_{n1} \cdot u_{12} + l_{n2} \cdot u_{22} = a_{n2} \rightarrow l_{n2} = (a_{n2} - l_{n1} \cdot u_{12}) / u_{22}$$

3.Adım:

U nun 3.satırının hesabı: *L nin 3.satırı ÇARPI U nun 3.,…, n. kolonları =A nın 3.satırıdır*

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} \rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23}$$
$$\cdots$$
$$l_{31} \cdot u_{1n} + l_{32} \cdot u_{2n} + 1 \cdot u_{3n} = a_{3n} \rightarrow u_{3n} = a_{3n} - l_{31} \cdot u_{1n} - l_{32} \cdot u_{2n}$$

L nin 3.kolonunun hesabı: *L nin 4.,..,n. satırları ÇARPI U nun 3.kolonu=A nın 3.kolonudur*

$$l_{41} \cdot u_{13} + l_{42} \cdot u_{23} + l_{43} \cdot u_{33} = a_{43} \rightarrow l_{43} = (a_{43} - l_{41} \cdot u_{13} - l_{42} \cdot u_{23}) / u_{33}$$
$$\cdots$$
$$l_{n1} \cdot u_{13} + l_{n2} \cdot u_{23} + l_{n3} \cdot u_{33} = a_{n3} \rightarrow l_{n3} = (a_{n3} - l_{n1} \cdot u_{13} - l_{n2} \cdot u_{23}) / u_{33}$$

...

n.Adım:

U nun n.satırının hesabı: *L nin n.satırı ÇARPI U nun n.kolonu=A nın n.satırıdır*

$$l_{n1} \cdot u_{1n} + l_{n2} \cdot u_{2n} + l_{n3} \cdot u_{3n} + \ldots + 1 \cdot u_{nn} = a_{nn} \rightarrow u_{nn} = a_{nn} - l_{n1} \cdot u_{1n} - l_{n2} \cdot u_{2n} - l_{n3} \cdot u_{n3} - \ldots$$

L nin n.kolonunun hesabı:

$$l_{nn} = 1$$

---

[1] Mayric Hascall **Doolittle**(1830-1913), Amerikalı: 1878 de yayınlandı

Genel formüller:

1. adım:

$l_{11}=1 \ , \qquad u_{11}=a_{11},\ u_{12}=a_{12},\ \ldots,\ u_{1n}=a_{1n}$

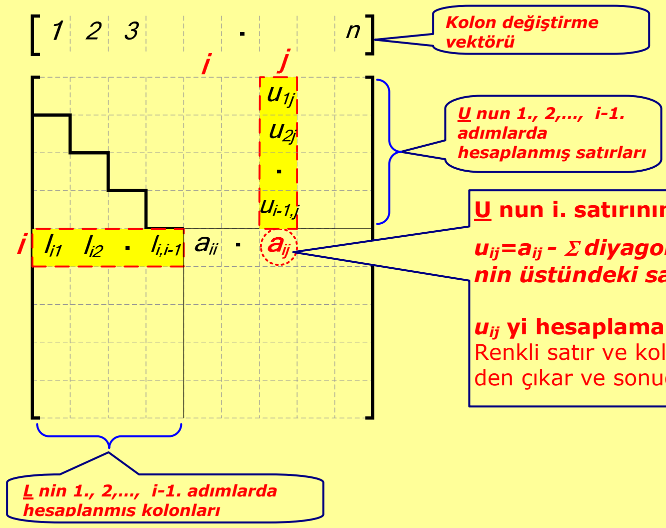
U nun 1. satırı A nın birinci satırı ile aynı

i. adım:

U nun i. satırı: $u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \ , \qquad j=i,i+1,\ldots,n$

L nin i.kolonu: $l_{ii}=1, \qquad l_{ji}=(a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki})/u_{ii} \ , \quad j=i+1,\,i+2,\,\ldots,n, \qquad u_{ii}\neq 0$

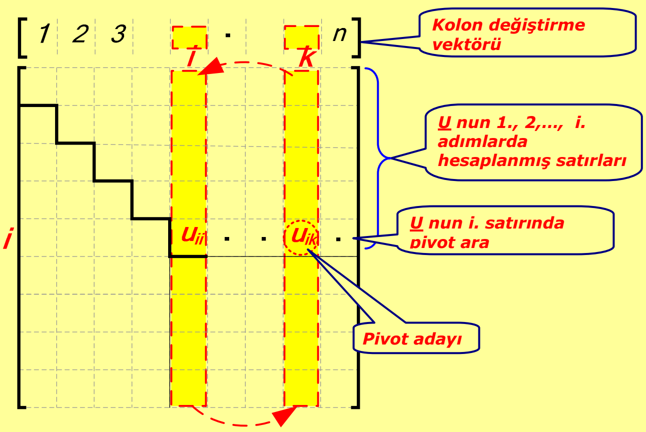
i. adım şematik hesap:



U nun i. satırının hesabı:

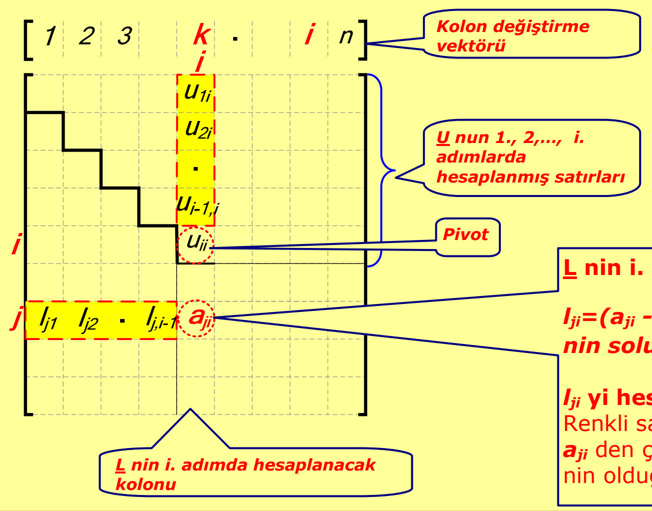
$u_{ij}=a_{ij}$ - Σ diyagonalin solundaki sayılar ÇARPI a_{ij} nin üstündeki sayılar

u_{ij} yi hesaplamak için:
Renkli satır ve kolondaki sayıları birbiri ile çarp, topla, a_{ij} den çıkar ve sonucu a_{ij} nin olduğu yere yaz.



Satırda pivot arama:

$u_{ii} \neq 0$ olmalıdır. u_{ii} nin mutlak değerce çok küçük olması da istenmez. Gerekirse kolonlara yer değiştirilerek u_{ii} nin mutlak değerinin mümkün olan en büyük sayı olması sağlanır. Bunun için; satırda pivot ara, u_{ii}, $u_{i,i+1}$,..., u_{in} elemanlarından mutlak değerce en büyük olanı bul. Bu eleman **k.** kolonda ise ***i.*** kolon ile ***k.*** kolonu değiştir. Kolon değiştirme vektörünün aynı nolu kolonlarını da değiştir. Kolon değiştirme sayısının depolandığı değişkenin, adı p olsun, değerini 1 artır: **p=p+1.**

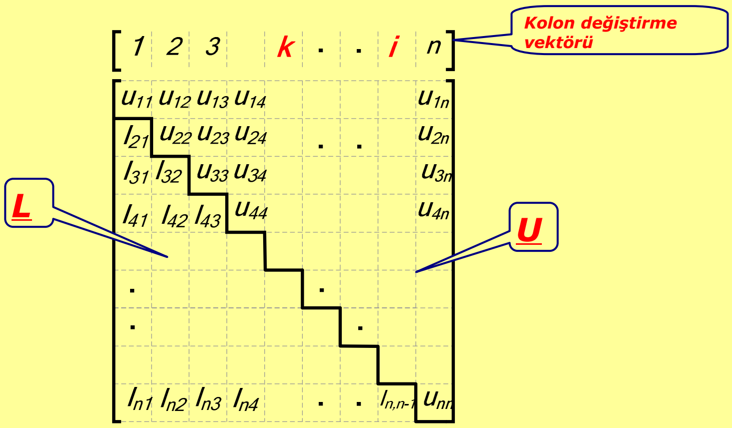


L nin i. kolonunun hesabı:

l_{ji}=(a_{ji} - Σdiyagonalin üstündeki sayılar ÇARPI a_{ji} nin solundaki sayılar) BÖLÜ u_{ii}

l_{ji} yi hesaplamak için:
Renkli satır ve kolondaki sayıları birbiri ile çarp, topla, a_{ji} den çıkar, u_{ii} diyagonal elemanına böl ve sonucu a_{ji} nin olduğu yere yaz.

- L nin diyagonal elemanları, l_{ii}=1, depolanmaz.
- L ve U üçgen matrisleri A nın üzerine depolanır. Diyagonalin altındaki elemanlar L ye, diyagonal ve üstündeki elemanlar U ya aittir.



- Kolon değiştirme vektörü çarpanlara ayırma işlemi sırasında hangi kolonların yerlerinin değiştiği bilgisini içerir. Ayrıca, her kolon değişikliği determinantın işaretini değiştireceğinden, kaç defa kolon değiştirildiği de p gibi bir değişkende depolanır.
- u_{11}, u_{22}, …, u_{nn} elemanları çarpanlara ayırma işlemi sırasında seçilmiş pivot elemanlardır.
- Det A=det L·det U dur. det L=1 ve det U= $(-1)^p \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$ olduğundan Det A= $(-1)^p \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$ dir.
- Çarpanlara ayırma işleminin herhangi bir adımında, örneğin i. adımında, pivot eleman bulunamazsa, yani u_{ii}=0 ise, Det A=0 dır. A tekildir, rankı r=i-1 dir, r satır ve kolonu doğrusal bağımsız geriye kalan d=n-r satır ve kolonu doğrusal bağımlıdır.

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}, \quad \underline{L}=?, \quad \underline{U}=?$$

Matrisi **DOOLITTLE** metodu ile L ve U üçgen çarpanlarına ayrılacaktır. Çarpanlara ayırma işlemine başlamadan önce kolon değiştirme vektörü 1, 2, 3, 4 ile doldurulur ve kolon değiştirme sayısının saklanacağı p değişkeni sıfırlanır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Kolon değiştirme vektörü başlangıç değerleri

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

p=0 (kolon değiştirme sayısı başlangıç değeri)

1.Adım:

$$\begin{array}{c} [\;1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4\;] \\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 6 & 10 \\ 0.5 & -13 & 9 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kolon değişikliği yapılmadı, p=0

Pivot

U nun 1. satırı A nın 1. satırı ile aynı. Satırdaki mutlak değerce en büyük sayı |6| zaten diyagonalde olduğundan kolon değiştirmeğe gerek yoktur.

L nin 1. kolonu: diyagonal altındaki sayılar pivot elemana bölündü

2.Adım:

$$\begin{array}{c} [\;1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4\;] \\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0.5 & 3 & 9 & 3 \\ -1 & -0.5 & 1 & -18 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kolon değişikliği yapılmadı, p=0

Pivot

U nun 2.satırı: Diyagonalin solundaki sayı buradaki sayının üstündeki sayı ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı. Satırdaki mutlak değerce en büyük sayı |-4| zaten diyagonalde olduğundan kolon değiştirmeğe gerek yoktur.

L nin 2.kolonu: Diyagonalin üstündeki sayı buradaki sayının solundaki sayı ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı, sonuç pivot elemana bölündü

3.Adım:

$$\begin{array}{c} [\;1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4\;] \\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0.5 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & -0.5 & 1 & -18 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kolonlar değiştirilecek

Pivot

U nun 3.satırı: Diyagonalin solundaki sayılar buradaki sayının üstündeki sayılar ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı. Satırdaki mutlak değerce en büyük sayı |-5| pivot adayıdır. 3. kolon ile 4.kolona yer değiştirilecek.

L nin 3.kolonu: henüz hesaplanmadı

$$\begin{array}{c} [\;1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 3\;] \\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0.5 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & -0.5 & -18 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. kolon ile 4. kolona yer değiştirildi, p=1

Pivot

Kolon değişikliği sonrası U nun3.satırı

$$\begin{array}{c} [\;1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 3\;] \\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0.5 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & -0.5 & 2.6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pivot

L nin 3.kolonu: Diyagonalin üstündeki sayılar buradaki sayının solundaki sayılar ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı, sonuç pivot elemana bölündü

4.Adım:

$$\begin{array}{c} [\;1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 3\;] \\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0.5 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & -0.5 & 2.6 & -1.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

L

U

U nun 4.satırı: Diyagonalin solundaki sayılar buradaki sayının üstündeki sayılar ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı.

Pivot

Sonuç:

Kolon değiştirme vektörü: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
Kolon değiştirme sayısı: p=1

L ve U matrisleri:

$$\underline{L}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0.5 & 3 & 1 & \\ -1 & -0.5 & 2.6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{U}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ & -4 & 2 & 2 \\ & & -5 & 2 \\ & & & -1.2 \end{bmatrix}$$

Determinant: Det A=$(-1)^{1}\cdot 6\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-1.2)$= 144
Rank A: r=4
Doğrusal bağımsız kolon ve satır sayısı: 4
Doğrusal bağımlı kolon ve satır sayısı(Rank artığı): d=n-r=4-4=0

DOOLITTLE ile denklem sistemi çözümü:

A matrisinin L ve U çarpanları bilindiğinden farklı karşı taraf vektörlü denklem sistemleri doğrudan yukarıdan aşağıya doğru ve aşağıdan yukarıya doğru hesap yapılarak çözülebilir. Aşağıda iki örnek verilmiştir.

Örnek 1:

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}, \qquad \underline{x}=?$$

A katsayılar matrisi yukarıda L ve U çarpanlarına ayrılmıştı: Ancak; kolonlara yer değiştirildiği de unutulmamalıdır. Kolon değişimi bilinmeyenlerin yerini değiştirmek anlamındadır. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ vektörü 3. ve 4.kolonların değiştirildiğini göstermektedir. Bu nedenle denklem sistemi L ve U cinsinden yazılırsa

$$\underline{A}\underline{x}'=\underline{b} \rightarrow \underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x}'=\underline{b} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0.5 & 3 & 1 & \\ -1 & -0.5 & 2.6 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ & -4 & 2 & 2 \\ & & -5 & 2 \\ & & & -1.2 \end{bmatrix}}_{U}\overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{X'}=\overbrace{\begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}}^{b}$$

olur. Burada x′ vektörü hesaplanmak istenen x bilinmeyenler vektörünün 3. ve 4. bilinmeyenlerinin yerleri değiştirilmiş şeklidir. $\underline{y}=\underline{U}\,\underline{x}'$ denirse, $\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b}$ bağıntısında, yukarıdan aşağı doğru hesap ile, $\underline{y}$ bulunur, $\underline{U}\,\underline{x}'=\underline{y}$ bağıntısında da, aşağıdan yukarı doğru hesap ile, x′ bulunur. 3. ve 4. değişkenlerin yerleri değiştirilerek aranan x vektörü oluşturulur. Bu adımlar aşağıda uygulanmıştır:

$$\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0.5 & 3 & 1 & \\ -1 & -0.5 & 2.6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} & y_1=16 \\ & y_2=26-2\cdot 16=-6 \\ & y_3=-19-0.5\cdot 16-3\cdot(-6)=-9 \\ & y_4=-34-(-1)16-(-0.5)(-6)-2.6(-9)=2.4 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ 2.4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\,\underline{x}'=\underline{y}\;\rightarrow\begin{bmatrix}6 & -2 & 4 & 2\\ & -4 & 2 & 2\\ & & -5 & 2\\ & & & -1.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\-6\\-9\\2.4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{array}{l}x_1=(16-2(-2)-4\cdot 1-(-2)\cdot 1)/6=3\\x_2=(-6-2(-2)-2\cdot 1)/(-4)=1\\x_4=(-9-2\cdot(-2))/(-5)=1\\x_3=2.4/(-1.2)=-2\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Örnek 2:

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\;\rightarrow\begin{bmatrix}6 & -2 & 2 & 4\\12 & -8 & 6 & 10\\3 & -13 & 9 & 3\\-6 & 4 & 1 & -18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24.68\\64.20\\56.51\\-33.31\end{bmatrix},\qquad \underline{x}=?$$

$$\underline{A}\underline{x}'=\underline{b}\rightarrow\underline{L}\underline{U}\underline{x}'=\underline{b}\;\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & & \\2 & 1 & & \\0.5 & 3 & 1 & \\-1 & -0.5 & 2.6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2 & 4 & 2\\ & -4 & 2 & 2\\ & & -5 & 2\\ & & & -1.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24.68\\64.20\\56.51\\-33.31\end{bmatrix}$$

$$\underline{L}\underline{y}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & & \\2 & 1 & & \\0.5 & 3 & 1 & \\-1 & -0.5 & 2.6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24.68\\64.20\\56.51\\-33.31\end{bmatrix}\rightarrow\begin{array}{l}y_1=24.68\\y_2=64.20-2\cdot 24.68=14.84\\y_3=56.51-0.5\cdot 24.68-3\cdot 14.84=-0.35\\y_4=-33.31-(-1)\cdot 24.68-(-0.5)\cdot 14.84-2.6(-0.35)=-0.3\end{array}\rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24.68\\14.84\\-0.35\\-0.3\end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\,\underline{x}'=\underline{y}\;\rightarrow\begin{bmatrix}6 & -2 & 4 & 2\\ & -4 & 2 & 2\\ & & -5 & 2\\ & & & -1.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24.68\\14.84\\-0.35\\-0.3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{array}{l}x_1=(24.68-2\cdot 0.25-4\cdot 0.17-(-2)(-3.5))/6=2.75\\x_2=(14.84-2\cdot 0.25-2\cdot 0.17)/(-4)=-3.50\\x_4=(-0.35-2\cdot 0.25)/(-5)=0.17\\x_3=-0.3/(-1.2)=0.25\end{array}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.75\\-3.50\\0.25\\0.17\end{bmatrix}$$

CROUT[1] LU metodu

A verilmiş olsun, det A ≠ 0 olmak ve $u_{ii}=1$ alınmak kaydıyla

$$\underline{L}\,\underline{U}=\underline{A}\rightarrow\begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ . & . & . & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & 1 & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots & . \\ & & & & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

L U A

bağıntısı sağlanacak şekilde n adımda hem L hem de U nun tüm elemanları belirlenebilir. Matris çarpım kuralından yararlanarak, her adımda önce L nin bir kolonu sonra U nun bir satırı hesaplanır.

1.Adım:

L nin 1.kolonunun hesabı:
L nin 1., 2.,…,n.satırları ÇARPI U nun1. kolonu=A nın 1.kolonudur

$$l_{11}\cdot 1=a_{11}\rightarrow l_{11}=a_{11}$$
$$l_{21}\cdot 1=a_{21}\rightarrow l_{21}=a_{21}$$
$$l_{31}\cdot 1=a_{31}\rightarrow l_{31}=a_{31}$$
$$\dots$$
$$l_{n1}\cdot 1=a_{n1}\rightarrow l_{n1}=a_{n1}$$

U nun 1.satırının hesabı:
L nin 1.satırı ÇARPI U nun 2., 3, …, n.kolonu=A nın 1.satırıdır

$$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}\rightarrow u_{12}=a_{12}/l_{11}$$
$$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}\rightarrow u_{13}=a_{13}/l_{11}$$
$$\dots$$
$$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}\rightarrow u_{1n}=a_{1n}/l_{11}$$

2.Adım:

L nin 2.kolonunun hesabı:
L nin 2., 3.,…, n. satırları ÇARPI U nun 2. kolonu=A nın 2.kolonudur

$$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}\rightarrow l_{22}=a_{22}-l_{21}\cdot u_{12}$$
$$l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot 1=a_{32}\rightarrow l_{32}=a_{32}-l_{31}\cdot u_{12}$$
$$\dots$$
$$l_{n1}\cdot u_{12}+l_{n2}\cdot 1=a_{n2}\rightarrow l_{n2}=a_{n2}-l_{n1}\cdot u_{12}$$

U nun 2.satırının hesabı:
L nin 2.satırı ÇARPI U nun 3., 4., …, n.kolonu=A nın 2.satırıdır

$$l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}\rightarrow u_{23}=(a_{23}-l_{21}\cdot u_{13})/l_{22}$$
$$l_{21}\cdot u_{14}+l_{22}\cdot u_{24}=a_{24}\rightarrow u_{24}=(a_{24}-l_{21}\cdot u_{14})/l_{22}$$
$$\dots$$
$$l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}\rightarrow u_{2n}=(a_{2n}-l_{21}\cdot u_{1n})/l_{22}$$

3.Adım:

L nin 3.kolonunun hesabı:
L nin 3, 4., …, n satırlar ÇARPI U nun 3.kolonu =A nın 3.kolonudur

$$l_{31}\cdot u_{13}+l_{32}\cdot u_{23}+l_{33}\cdot 1=a_{33}\rightarrow l_{33}=a_{33}-l_{31}\cdot u_{13}-l_{32}\cdot u_{23}$$
$$\dots$$
$$l_{n1}\cdot u_{13}+l_{n2}\cdot u_{23}+u_{n3}\cdot 1=a_{3n}\rightarrow l_{n3}=a_{n3}-l_{n1}\cdot u_{13}-l_{n2}\cdot u_{23}$$

U nun 3.satırının hesabı:
L nin 3.satırı ÇARPI U nun 4., …, n. kolonu=A nın 3.satırıdır

$$l_{31}\cdot u_{14}+l_{32}\cdot u_{24}+l_{33}\cdot u_{34}=a_{34}\rightarrow u_{34}=(a_{34}-l_{31}\cdot u_{14}-l_{32}\cdot u_{24})/l_{33}$$
$$\dots$$
$$l_{31}\cdot u_{1n}+l_{32}\cdot u_{2n}+l_{33}\cdot u_{3n}=a_{3n}\rightarrow u_{3n}=(a_{3n}-l_{31}\cdot u_{1n}-l_{32}\cdot u_{2n})/l_{33}$$

…

n.Adım:

L nin n.kolonunun hesabı:
L nin n.satırı ÇARPI U nun n.kolonu=A nın n.satırıdır:

$$l_{n1}\cdot u_{1n}+l_{n2}\cdot u_{2n}+l_{n3}\cdot u_{n3}+\dots+l_{nn}\cdot 1=a_{nn}\rightarrow l_{nn}=a_{nn}-l_{n1}\cdot u_{1n}-l_{n2}\cdot u_{2n}-l_{n3}\cdot u_{3n}-\dots$$

U nun n.satırının hesabı:

$$u_{nn}=1$$

[1] Prescott Duran **Crout** (1907-1984), Amerikalı: 1941 de yayınlandı

Genel formüller:

1. adım:

$u_{11}=1$, $l_{11}=a_{11},\ l_{21}=a_{21},\ \dots,\ l_{n1}=a_{n1}$

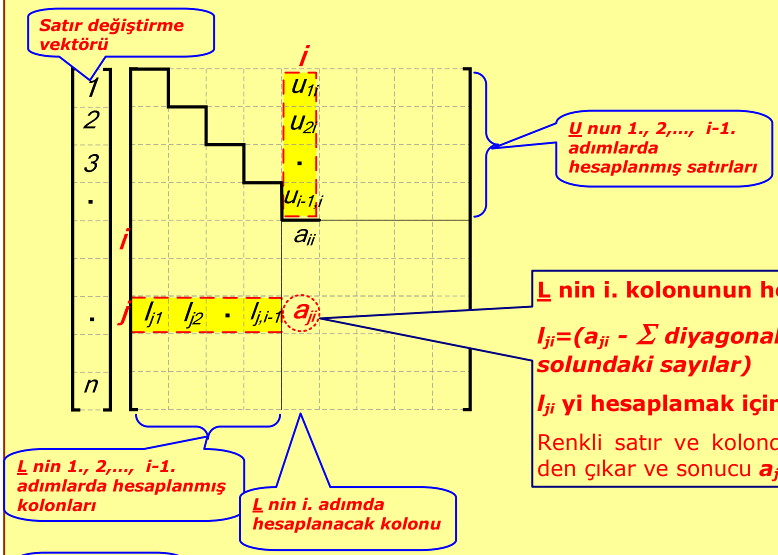
L ***nin 1. kolonu A nın birinci kolonu ile avnı***

i. adım:

L nin i.kolonu: $l_{ii}=1,\quad l_{ji}=a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\ ,\qquad j=i,i+1,\dots,n$

U nun i.satırı: $u_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj})/l_{ii}\ ,\quad j=i+1,\ i+2,\ \dots,n,\qquad l_{ii}\neq 0$

i. adım şematik hesap:

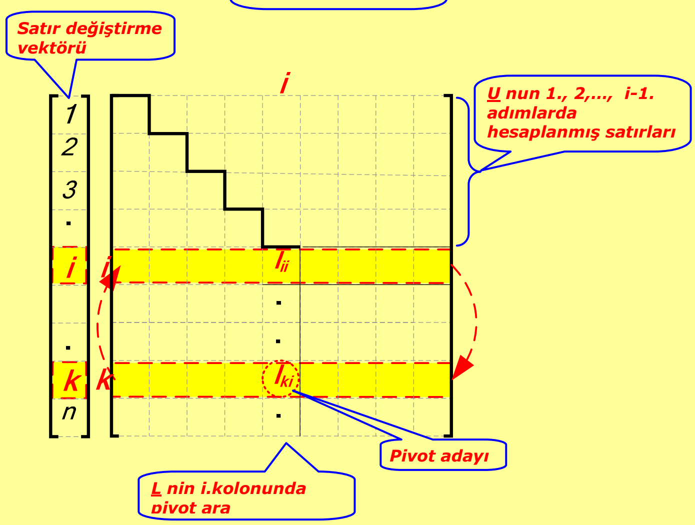


L nin i. kolonunun hesabı:

l_{ji}=(a_{ji} - Σ diyagonalin üstündeki sayılar ÇARPI a_{ji} nin solundaki sayılar)

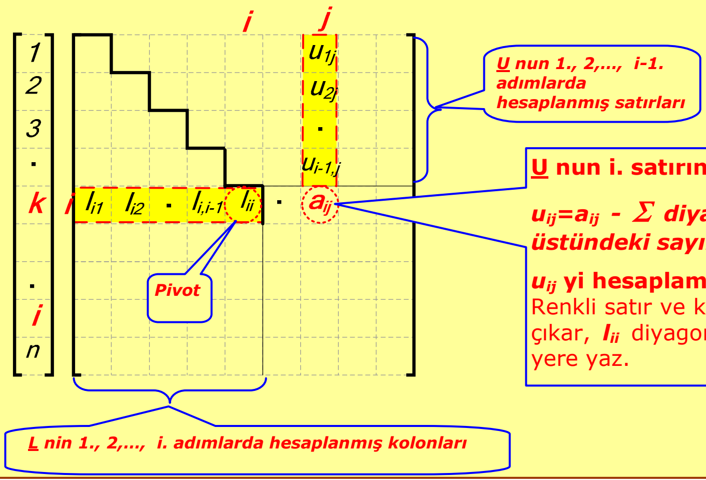
l_{ji} yi hesaplamak için:

Renkli satır ve kolondaki sayıları birbiri ile çarp, topla, a_{ji} den çıkar ve sonucu a_{ji} nin olduğu yere yaz.



Kolonda pivot arama:

$l_{ii}\neq 0$ olmalıdır. l_{ii} nin mutlak değerce çok küçük olması da istenmez. Gerekirse satırlara yer değiştirilir l_{ii} nin mutlak değerinin mümkün olan en büyük sayı olması sağlanır. Bunun için; kolonda pivot ara, l_{ii}, $l_{i,i+1}$,..., l_{in} elemanlarından mutlak değerce en büyük olanı bul. Bu eleman k. satırda ise i. satır ile k. satırı değiştir. Satır değiştirme vektörünün aynı nolu satırlarını da değiştir. Satır değiştirme sayısının depolandığı değişkenin, adı p olsun, değerini 1 artır: **p=p+1.**



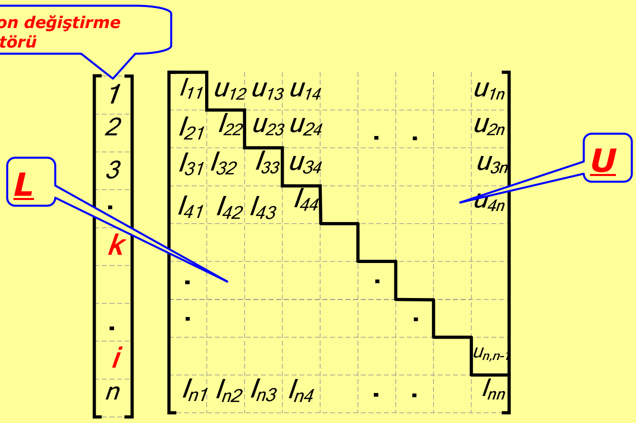
U nun i. satırının hesabı:

u_{ij}=a_{ij} - Σ diyagonalin solundaki sayılar ÇARPI a_{ij} nin üstündeki sayılar BÖLÜ l_{ii}

u_{ij} yi hesaplamak için:

Renkli satır ve kolondaki sayıları birbiri ile çarp, topla, a_{ij} den çıkar, l_{ii} diyagonal elemanına böl ve sonucu a_{ij} nin olduğu yere yaz.

- U nun diyagonal elemanları, u_{ii}=1, depolanmaz.
- L ve U üçgen matrisleri A nın üzerine depolanır. Diyagonal ve altındaki elemanlar L ye, diyagonalin üstündeki elemanlar U ya aittir.



- Satır değiştirme vektörü çarpanlara ayırma işlemi sırasında hangi satırların yerlerinin değiştiği bilgisini içerir. Ayrıca, her satır değişikliği determinantın işaretini değiştireceğinden, kaç defa satır değiştirildiği de p gibi bir değişkende depolanır.
- l_{11}, l_{22}, …, l_{nn} elemanları çarpanlara ayırma işlemi sırasında seçilmiş pivot elemanlardır.
- Det A=det L · det U dir. det L= $(-1)^{p} \cdot l_{11} \cdot l_{22} \cdot \ldots \cdot l_{nn}$ ve det U=1, olduğundan Det A= $(-1)^{p} \cdot l_{11} \cdot l_{22} \cdot \ldots \cdot l_{nn}$ dir.
- Çarpanlara ayırma işleminin herhangi bir adımında, örneğin i. adımında, pivot eleman bulunamazsa, yani l_{ii}=0 ise, Det A=0 dır. A tekildir, rankı r=i-1 dir, r satır ve kolonu doğrusal bağımsız geriye kalan d=n-r satır ve kolonu doğrusal bağımlıdır.

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}=\underline{L}\underline{U} \rightarrow \underline{L}=?,\ \underline{U}=?$$

Matrisi CROUT metodu ile L ve U üçgen çarpanlarına ayrılacaktır. Çarpanlara ayırma işlemine başlamadan önce satır değiştirme vektörü 1, 2, 3, 4 ile doldurulur ve satır değiştirme sayısının saklanacağı p değişkeni sıfırlanır.

Satır değiştirme vektörü başlangıç değerleri

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \underline{A}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

p=0 (satır değiştirme sayısı başlangıç değeri)

1.Adım:

***L* nin 1. kolonu: *A* nın 1. kolonu ile aynı. Pivot adayı 2. satırda. 1.ve 2. satırlar değiştirilecek**

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}6 & -2 & 2 & 4\\ 12 & -8 & 6 & 10\\ 3 & -13 & 9 & 3\\ -6 & 4 & 1 & -18\end{bmatrix}$$

Satırlar değiştirilecek

1. kolonda pivot ara

Pivot adayı

Pivot

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -8 & 6 & 10\\ 6 & -2 & 2 & 4\\ 3 & -13 & 9 & 3\\ -6 & 4 & 1 & -18\end{bmatrix}$$

Satır değiştirildikten sonra, p=1

Pivot

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ 6 & -2 & 2 & 4\\ 3 & -13 & 9 & 3\\ -6 & 4 & 1 & -18\end{bmatrix}$$

***U* nun 1. satırı: Diyagonalin sağındaki sayılar pivot elemana bölündü**

2.Adım:

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ 6 & 2.000002 & 2 & 4\\ 3 & -10.999999 & 9 & 3\\ -6 & -0.000002 & 1 & -18\end{bmatrix}$$

Satırlar değiştirilecek

Pivot adayı

***L* nin 2.kolonu: Diyagonalin üstündeki sayı buradaki sayının solundaki sayı ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı. Pivot adayı 3. satırdadır, 2. ve 3.satırlar değiştirilecek**

Pivot

$$\begin{bmatrix}2\\3\\1\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ 3 & -10.999999 & 9 & 3\\ 6 & 2.000002 & 2 & 4\\ -6 & -0.000002 & 1 & -18\end{bmatrix}$$

Satır değiştirildikten sonra, p=2

Pivot

$$\begin{bmatrix}2\\3\\1\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ 3 & -10.999999 & -0.181818 & -0.045455\\ 6 & 2.000002 & 2 & 4\\ -6 & -0.000002 & 1 & -18\end{bmatrix}$$

***U* nun 2.satırı: Diyagonalin solundaki sayı buradaki sayının üstündeki sayı ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı ve pivot elemana bölündü**

3.Adım:

$$\begin{bmatrix}2\\3\\1\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ 3 & -10.999999 & -0.181818 & -0.045455\\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 4\\ -6 & -0.000002 & 4 & -18\end{bmatrix}$$

***L* nin 3.kolonu: Diyagonalin üstündeki sayılar buradaki sayının solundaki sayılar ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı. Pivot eleman 4.satırda, 3.ve 4.satırlar değiştirilecek**

Pivot adayı

$$\begin{bmatrix}2\\3\\4\\1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ 3 & -10.999999 & -0.181818 & -0.045455\\ -6 & -0.000002 & 4 & -18\\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 4\end{bmatrix}$$

Satır değiştirildikten sonra, p=3

Pivot

$$\begin{bmatrix}2\\3\\4\\1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ 3 & -10.999999 & -0.681818 & -0.045455\\ -6 & -0.000002 & 4 & -3.25\\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 4\end{bmatrix}$$

Pivot

***U* nun 3.satırı: Diyagonalin solundaki sayılar buradaki sayının üstündeki sayılar ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı ve pivot elemana bölündü**

4.Adım:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333 \\ 3 & -10.999999 & -0.681818 & -0.045455 \\ -6 & -0.000002 & 4 & -3.25 \\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 0.272733 \end{bmatrix}$$

U

L nin 4.kolonu: Diyagonalin solundaki sayılar buradaki sayının üstündeki sayılar ile çarpıldı, buradaki sayıdan çıkartıldı.

L

Sonuç:

Satır değiştirme vektörü: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, **Satır değiştirme sayısı: p=3**

L ve U matrisleri:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 12 & & & \\ 3 & -10.999999 & & \\ -6 & -0.000002 & 4 & \\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 0.272733 \end{bmatrix}, \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333 \\ & 1 & -0.681818 & -0.0454555 \\ & & 1 & -3.25 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Determinant: Det A=(-1)$^{3}\cdot$12$\cdot$(-10.999999)$\cdot$4$\cdot$0.272733= 144.003001
Rank A: r=4
Doğrusal bağımsız kolon ve satır sayısı: 4
Doğrusal bağımlı kolon ve satır sayısı(rank artığı): d=n-r=4-4=0

CROUT ile denklem sistemi çözümü:

A matrisinin L ve U çarpanları bilindiğinden katsayılar matrisi A olan farklı karşı taraf vektörlü denklem sistemleri doğrudan yukarıdan aşağı ve aşağıdan yukarı hesap yapılarak çözülebilir. Aşağıda iki örnek verilmiştir.

Örnek 1:

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = ?$$

A katsayılar matrisi yukarıda L ve U çarpanlarına ayrılmıştı: Ancak; satırlara yer değiştirildiği de unutulmamalı, çözüme başlamadan önce sağ taraf vektörünün satırları değiştirilmelidir. Satır değiştirme vektörü= $[2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 1]^T$ olduğundan, sağ taraf vektörü $\underline{b} = [16 \;\; 26 \;\; -19 \;\; -34]^T$ yerine $\underline{b}' = [26 \;\; -19 \;\; -34 \;\; 16]^T$ alınmalıdır. Bu nedenle denklem sistemi L ve U cinsinden yazılırsa

x **b′**

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b}' \Rightarrow \underline{L}\underline{U}\underline{x} = \underline{b}' \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & & & \\ 3 & -10.999999 & & \\ -6 & -0.000002 & 4 & \\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 0.272733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333 \\ & 1 & -0.681818 & -0.0454555 \\ & & 1 & -3.25 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -19 \\ -34 \\ 16 \end{bmatrix}$$

L **U**

olur. $\underline{y}=\underline{U}\,\underline{x}$ denirse, $\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b}'$ bağıntısından, yukarıdan aşağı doğru hesap ile, $\underline{y}$ bulunur, $\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y}$ den de, aşağıdan yukarı doğru hesap ile, $\underline{x}$ bulunur. Bu adımlar aşağıda uygulanmıştır.

$$\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}12 & & & \\ 3 & -10.999999 & & \\ -6 & -0.000002 & 4 & \\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 0.272733\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26\\ -19\\ -34\\ 16\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 26/12 = 2.166667\\
y_2 &= (-19-3\cdot 2.166667)/(-10.999999) = 2.318182\\
y_3 &= (-34-(-6)\cdot 2.166667-(-0.000002)\cdot 2.318182)/4 = -5.249998\\
y_4 &= (16-6\cdot 2.166667-2.000002\cdot 2.318182-0.363637\cdot(-5.249998))/0.272733 = 0.999963
\end{aligned}
\rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.166667\\ 2.318182\\ -5.249998\\ 0.999963\end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ & 1 & -0.681818 & -0.0454555\\ & & 1 & -3.25\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.166667\\ 2.318182\\ -5.249998\\ 0.999963\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2.166667-0.833333\cdot 0.999963-0.5\cdot(-2.000118)-(-0.666667)\cdot 0.999919 = 3.000037\\
x_2 &= 2.318182-(-0.0454555)\cdot 0.999963-(-0.681818)\cdot(-2.000118) = 0.999919\\
x_3 &= -5.249998-(-3.25)\cdot 0.999963 = -2.000118\\
x_4 &= 0.999963
\end{aligned}
\rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.000037\\ 0.999919\\ -2.000118\\ 0.999963\end{bmatrix}$$

Örnek 2:

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}6 & -2 & 2 & 4\\ 12 & -8 & 6 & 10\\ 3 & -13 & 9 & 3\\ -6 & 4 & 1 & -18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24.68\\ 64.20\\ 56.51\\ -33.31\end{bmatrix},\qquad \underline{x}=?$$

Satır değiştirme vektörü= $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 1\end{bmatrix}^T$ olduğundan, sağ taraf vektörü $\underline{b}=\begin{bmatrix}24.68 & 64.20 & 56.51 & -31.31\end{bmatrix}^T$ yerine $\underline{b}'=\begin{bmatrix}64.20 & 56.51 & -33.31 & 24.68\end{bmatrix}^T$ alınmalıdır. Bu nedenle denklem sistemi $\underline{L}$ ve $\underline{U}$ cinsinden yazılırsa

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}'\rightarrow\underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x}=\underline{b}'\rightarrow\begin{bmatrix}12 & & & \\ 3 & -10.999999 & & \\ -6 & -0.000002 & 4 & \\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 0.272733\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ & 1 & -0.681818 & -0.0454555\\ & & 1 & -3.25\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64.20\\ 56.51\\ -33.31\\ 24.68\end{bmatrix}$$

$$\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}12 & & & \\ 3 & -10.999999 & & \\ -6 & -0.000002 & 4 & \\ 6 & 2.000002 & 0.363637 & 0.272733\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64.20\\ 56.51\\ -33.31\\ 24.68\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 64.20/12 = 5.35\\
y_2 &= (56.51-3\cdot 5.35)/(-10.999999) = -3.678182\\
y_3 &= (-33.31-(-6)\cdot 5.35-(-0.000002)(-3.678182)/4 = -0.302498\\
y_4 &= (24.68-6\cdot 5.35-2.000002\cdot(-3.678182)-0.363637(-0.302498)/0.272733 = 0.170023
\end{aligned}
\rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.35\\ -3.678182\\ -0.302498\\ 0.170023\end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -0.666667 & 0.5 & 0.833333\\ & 1 & -0.681818 & -0.0454555\\ & & 1 & -3.25\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.35\\-3.678182\\-0.302498\\0.170023\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$x_1=5.35-0.833333\cdot0.170023-0.5\cdot0.250077-(-0.666667)(-3.499937=2.749983$$
$$x_2=-3.678182-(-0.0454555)\cdot0.170023-(-0.681818)\cdot0.250077=-3.499937$$
$$x_3=-0.302498-(-3.25)\cdot0.170023=0.250077$$
$$x_4=0.170023$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.749983\\-3.499937\\0.250077\\0.170023\end{bmatrix}$$

CHOLESKY[1] UU^T metodu

CHOLESKY metodu sadece ***simetrik ve pozitif tanımlı*** matrisler için özel bir yöntemdir. Basit, nümerik açıdan stabil, bellek gereksinimi düşük ve programlanması kolaydır. Pivot aramak, satır veya kolon değiştirmek gerekmez.

Simetrik pozitif tanımlı matris nedir? Mekanik tanım

Matematik tanım:

Simetriklik koşulu $\underline{A}=\underline{A}^T$ dir. Elemanlarının en az biri sıfırdan farklı olan, bunun dışında tamamen keyfi bir $\underline{x}\neq\underline{0}$ kolon vektörü olsun.

$P=\underline{x}^T\,\underline{A}\,\underline{x}$

çarpımı sabit bir sayı olur. Eğer

P>0 ise $\underline{A}$ pozitif tanımlıdır (positive definit)
P<0 ise $\underline{A}$ negatif tanımlıdır (negative definit)
P≥0 ise $\underline{A}$ yarı pozitif tanımlıdır (positive semidefinit)
P≤0 ise $\underline{A}$ yarı negatif tanımlıdır (negative semidefinit)

denir. Herhangi bir matrisin pozitif tanımlı olup olmadığını genelde matrisin görünümünden anlamak basit değildir. Çoğu kez matrisin mekanik anlamı yorumlanarak karar verilebilir. Örneğin, sonlu elemanlar metodunun denge denklemlerinin katsayılar matrisinin ve en küçük kareler metodunun katsayılar matrisinin daima pozitif tanımlı olduğu bilinmektedir.

Örnekler:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ p=\underline{x}^T\,\underline{A}\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1^2+x_2^2$$

olduğundan, $x_1\neq0$ veya $x_2\neq0$ olduğu sürece p>0 dır, dolayısıyla $\underline{A}$ pozitif tanımlıdır.

$$\underline{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ p=\underline{x}^T\,\underline{B}\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1x_2+x_1x_2$$

dır. $x_1\leq0$ ve $x_2\geq0$ için p≤0 olacağından $\underline{B}$ pozitif tanımlı değildir.

Mekanik tanım:

$P=(½)\,\underline{x}^T\,\underline{A}\,\underline{x}$

bağıntısı mekanikte depolanmış şekil değiştirme enerjisidir. Şekil değiştirme enerjisi daima pozitif olduğundan p>0 dır. Örneklemek gerekirse, sonlu elemanlar metodunda $\underline{x}$ sistemin global düğüm yer değiştirme vektörü (deplasman vektörü), $\underline{A}$ sistemin global rijitlik matrisidir. $\underline{A}$ daima simetrik, yani $\underline{A}=\underline{A}^T$ dir. P sistemde depolanmış şekil değiştirme enerjisi(iç kuvvetlerin işi) anlamındadır ve daima pozitiftir. Dolayısıyla $\underline{A}$ matrisi de daima pozitif tanımlıdır. Bunun pratik anlamı şudur. $\underline{A}$ nın diyagonal elemanları daima pozitiftir ve CHOLESKY metodu ile üçgen çarpanlara ayırma işlemi sırasında daima pozitif kalırlar. Diyagonal elemanlardan biri negatif veya sıfır olursa sistem ya labildir ya da rijitlik matrisi hatalı kurulmuştur, çözüm bulunamaz anlamına gelir.

[1] André-Louis **Cholesky** (1875 – 1918), Polonya asıllı Fransız: Çalışmasını 1905-1913 civarında hazırlandığı sanılmaktadır. 1. Dünya savaşında öldü. Çalışması ölümünden sonra, 1924 de yayınlandı.

CHOLESKY metodunda A=L U üçgen çarpanlarının diyagonal elemanlar $l_{ii}=\sqrt{a_{ii}}$, $u_{ii}=\sqrt{a_{ii}}$ alınır. Simetriden dolayı L=U^T veya U=L^T dur. Simetrik ve pozitif tanımlı A matrisi

$\underline{A}=\underline{U}^T\underline{U}$

sağlanacak şekilde üçgen çarpanlarına ayrılır[1]. n adımda U nun tüm elemanları belirlenebilir. Matris çarpım kuralından yararlanarak, her adımda U nun bir satırı hesaplanır.

$$\underline{U}^T\ \underline{U}=\underline{A}\quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} u_{11} & & & & \\ u_{12} & u_{22} & & & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & & \\ . & . & . & \cdots & \\ u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \cdots & . \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\underline{U}^T$ $\underline{U}$ $\underline{A}$

1. adım

$$u_{11}u_{11}=a_{11}\rightarrow u_{11}=\sqrt{a_{11}}$$
$$u_{11}u_{12}=a_{12}\rightarrow u_{12}=a_{12}/u_{11}$$
$$u_{11}u_{13}=a_{13}\rightarrow u_{13}=a_{13}/u_{11}$$
$$\ldots$$
$$u_{11}u_{1n}=a_{1n}\rightarrow u_{1n}=a_{1n}/u_{11}$$

U nun 1.satırının hesabı:
$\underline{U}^T$ nin 1..satırı ÇARPI U nun 1.,2. ,…, n.kolonları =A nın 1.satırıdır

2. adım

$$u_{12}u_{12}+u_{22}u_{22}=a_{22}\rightarrow u_{22}=\sqrt{a_{22}-u_{12}u_{12}}$$
$$u_{12}u_{13}+u_{22}u_{23}=a_{23}\rightarrow u_{23}=(a_{23}-u_{12}u_{13})/u_{22}$$
$$\ldots$$
$$u_{12}u_{1n}+u_{22}u_{2n}=a_{2n}\rightarrow u_{2n}=(a_{2n}-u_{12}u_{1n})/u_{22}$$

U nun 2.satırının hesabı:
$\underline{U}^T$ nin 2..satırı ÇARPI U nun 2., 3. ,…, n.kolonları =A nın 2.satırıdır

3. adım

$$u_{13}u_{13}+u_{23}u_{23}+u_{33}u_{33}=a_{33}\rightarrow u_{33}=\sqrt{a_{33}-u_{13}u_{13}-u_{23}u_{23}}$$
$$\ldots$$
$$u_{13}u_{1n}+u_{23}u_{2n}+u_{33}u_{3n}=a_{3n}\rightarrow u_{3n}=(a_{3n}-u_{13}u_{1n}-u_{23}u_{2n})/u_{33}$$

U nun 3.satırının hesabı:
$\underline{U}^T$ nin 3.satırı ÇARPI U nun 3. ,…, n.kolonları =A nın 3.satırıdır

…

U nun n.satırının hesabı:
$\underline{U}^T$ nin n.satırı ÇARPI U nun n.kolonu =A nın n.satırıdır

n. adım

$$u_{1n}u_{1n}+u_{2n}u_{2n}+u_{3n}u_{3n}+\ldots+u_{nn}u_{nn}=a_{nn}\rightarrow u_{nn}=\sqrt{a_{nn}-u_{1n}u_{1n}-u_{2n}u_{2n}-u_{3n}u_{3n}-\ldots}$$

[1] Kaynaklarda A=U^TU, A=U U^T, A=L^TL, A=L L^T şeklin de de gösterilir, hepsi de aynı anlamdadır.

Genel formüller:

1.adım:

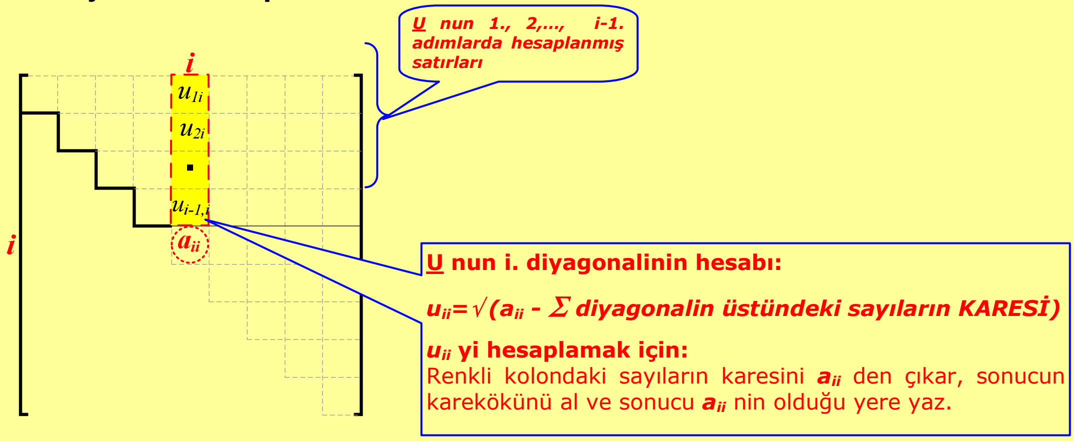
$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}\ , \qquad u_{12} = a_{12} / u_{11},\ u_{13} = a_{13} / u_{11}, \ldots, u_{1n} = a_{1n} / u_{11}, \qquad (a_{11}>0)$$

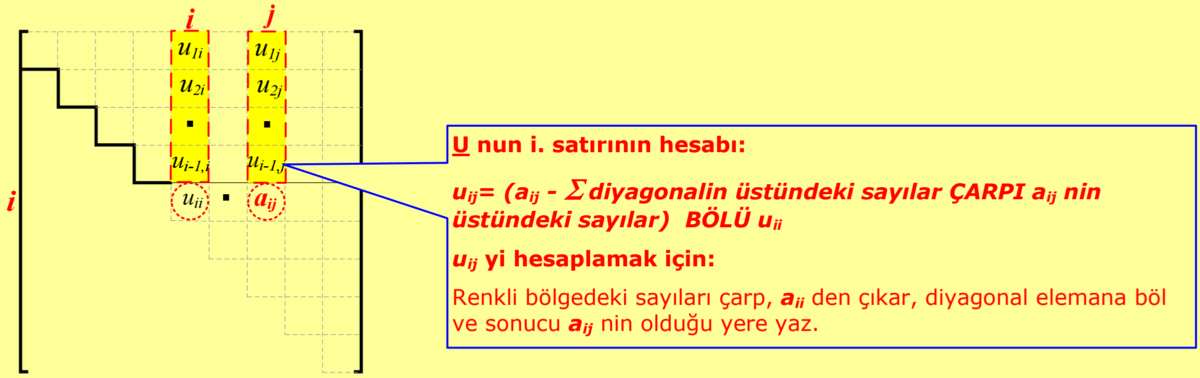
i.adım:

Diyagonal eleman: $u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ik} u_{ik}}$, (kök içindeki ifade>0 olmalı)

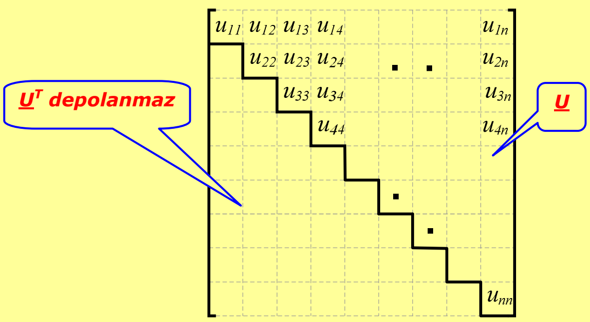
Diyagonalin sağındaki elemanlar: $u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ik} u_{kj}) / u_{ii}$, $j = i+1, i+2, \ldots, n$

i. adım şematik hesap:





- A nın sadece diyagonali ve üstündeki sayıları depolanır.
- U üçgen matrisi A nın üzerine depolanır.



- Çarpanlara ayırma işleminin herhangi bir adımında, örneğin i. adımında $a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ik} u_{ik} \le 0$ ise, karekök alınamaz, işleme devam edilemez. Bu durum, A nın pozitif tanımlı olmadığı anlamındadır.

- Det A=det $U^T \cdot$ det U dur.
- det A= $u_{11}^{2} \cdot u_{22}^{2} \cdot \ldots \cdot u_{nn}^{2}$ olur.

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}=\underline{U}^T\underline{U} \rightarrow \underline{U}=? \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ & 26 & -7 & -11 \\ & & 9 & 7 \\ & & & 65 \end{bmatrix}$$

***A* nın sadece diyagonali ve üstündeki sayılar ile çalışılacak**

Diyagonal altındaki sayılar kullanılmayacağı için yazılmadı

Simetrik matrisi CHOLESKY metodu ile $\underline{U}^T$ ve $\underline{U}$ üçgen çarpanlarına ayrılacaktır. A nın pozitif tanımlı olduğunun bilindiği varsayılmaktadır.

1.Adım:

***U_{11} in hesabı:** a_{11} in karekökü alınıp buraya yazıldı*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & 26 & -7 & -11 \\ & & 9 & 7 \\ & & & 65 \end{bmatrix}$$

***U_{1j} nin hesabı:** Buradaki a_{ij} sayıları u_{11} e bölündü*

2.Adım:

***U_{22} nin hesabı:** diyagonalin üstündeki sayıların kareleri buradaki a_{22} den çıkartıldı, karekökü alındı ve buraya yazıldı*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & 5 & -1 & -3 \\ & & 9 & 7 \\ & & & 65 \end{bmatrix}$$

***U_{2j} nin hesabı:** diyagonalin üstündeki sayı a_{2j} nin üstündeki sayı ile çarpıldı, a_{2j} den çıkartıldı, u_{22} ye bölündü ve sonuç buraya yazıldı*

3.Adım:

***U_{33} ün hesabı:** diyagonalin üstündeki sayıların kareleri buradaki a_{33} den çıkartıldı, karekökü alındı ve buraya yazıldı*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & 5 & -1 & -3 \\ & & 2 & 6 \\ & & & 65 \end{bmatrix}$$

***U_{2j} nin hesabı:** diyagonalin üstündeki sayılar a_{3j} nin üstündeki sayılar ile çarpıldı, a_{3j} den çıkartıldı, u_{33} e bölündü ve sonuç buraya yazıldı*

4.Adım:

***U_{44} ün hesabı:** diyagonalin üstündeki sayıların kareleri buradaki a_{44} den çıkartıldı, karekökü alındı ve buraya yazıldı*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & 5 & -1 & -3 \\ & & 2 & 6 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

Sonuç:

$$\underline{A}=\underline{U}^T\underline{U}, \qquad \underline{U}^T=\begin{bmatrix} 3 & & & \\ 1 & 5 & & \\ -2 & -1 & 2 & \\ 4 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{U}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & 5 & -1 & -3 \\ & & 2 & 6 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{A}$ Pozitif tanımlıdır: Çünkü u_{ii} diyagonal elemanları hesaplanırken karekökü alınacak sayılar pozitif kalmıştır.

Determinant: Det $\underline{A}$=Det $\underline{U}^T\cdot$det $\underline{U}$=$3^{2}\cdot 5^{2}\cdot 2^{2}\cdot 2^2$= 3600

CHOLESKY ile denklem sistemi çözümü:

$\underline{A}$ matrisinin $\underline{U}^T$ ve $\underline{U}$ çarpanları bilindiğinden katsayılar matrisi $\underline{A}$ olan farklı karşı taraf vektörlü denklem sistemleri doğrudan yukarıdan aşağı ve aşağıdan yukarı hesap yapılarak çözülebilir. Aşağıda bir örnek verilmiştir.

Örnek:

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\,,\qquad \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 72 \\ 34 \\ 22 \\ 326 \end{bmatrix},\qquad \underline{x}=?$$

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\rightarrow\ \underline{U}^T\underline{U}\,\underline{x}=\underline{b}\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & & & \\ 1 & 5 & & \\ -2 & -1 & 2 & \\ 4 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{\underline{U}^T}\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & 5 & -1 & -3 \\ & & 2 & 6 \\ & & & 2 \end{bmatrix}}_{\underline{U}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}}_{\underline{y}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 72 \\ 34 \\ 22 \\ 326 \end{bmatrix}}_{\underline{b}},\qquad \underline{x}=?$$

$$\underline{U}^T\underline{y}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix} 3 & & & \\ 1 & 5 & & \\ -2 & -1 & 2 & \\ 4 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 72 \\ 34 \\ 22 \\ 326 \end{bmatrix}\rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 72/3=24 \\ y_2 &= (34-1\cdot 24)/5=2 \\ y_3 &= (22-(-2)\cdot 24-(-1)\cdot 2)/2=36 \\ y_4 &= (326-4\cdot 24-(-3)\cdot 2-6\cdot 36)/2=10 \end{aligned}\ \rightarrow \underline{y}=\begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 36 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\underline{x}=\underline{y}\rightarrow\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & 5 & -1 & -3 \\ & & 2 & 6 \\ & & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 36 \\ 10 \end{bmatrix}\rightarrow \begin{aligned} x_1 &= (24-4\cdot 5-(-2)\cdot 3-1\cdot 4)/3=2 \\ x_2 &= (2-(-3)\cdot 5-(-1)\cdot 3)/5=4 \\ x_3 &= (36-6\cdot 5)/2=3 \\ x_4 &= 10/2=5 \end{aligned}\ \rightarrow x=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Determinant hesabı

Bir $\underline{A}_{nxn}$ matrisinin determinantının tanımı, klasik hesap metotlar(**Sarrus**, **Chio**, **Laplace**) ve determinant özelliklerine bölüm 2 de yer verilmişti. Ayrıca, bölüm 6 da verilen $\underline{A}$ = $\underline{L}$ $\underline{U}$ çarpanlara ayırma metodlarında (**Doolittle**, **Crout**, **Cholesky**) det $\underline{A}$ nın

Doolittle metodunda: det $\underline{A}$= $(-1)^p.u_{11}\cdot u_{22}\cdot \ldots \cdot u_{nn}$
Crout metodunda: det $\underline{A}$= $(-1)^p\cdot l_{11}\cdot l_{22}\cdot \ldots \cdot l_{nn}$ (6.5)
Choleky metodunda det $\underline{A}$= $u_{11}^{2}\cdot u_{22}^{2}\cdot \ldots \cdot u_{nn}^{2}$

ile hesaplanacağı gösterilmişti. Burada p satır veya kolon değiştirme sayısıdır.

Determinantın değeri çözümün var olup olmadığına işaret eder. Det $\underline{A}\neq 0$ ise çözüm vardır, det $\underline{A}$=0 çözüm yoktur veya birden çok çözüm vardır (bak: bölüm 3, sayfa 45).

Determinant matrise ait ilginç bir sayıdır. Hem çok önemlidir hem de hesaplamaktan özenle kaçınırız. Genellikle denklem sistemini çözerken sadece kontrol amacıyla kullanırız. Bu kontrol 6.5 ifadelerindeki l_{ii} veya u_{ii} diyagonal elemanlarından herhangi birinin sıfır olup olmadığı kontrol edilerek yapılır. Herhangi biri sıfır ise determinant sıfırdır.

Determinant hesaplanacaksa nümerik sorun çıkabileceği bilinmelidir. Denklem sistemi çok büyük ise 6.5 deki diyagonal elemanların birbiri ile çarpımı sayı taşmasına(sayının bilgisayar birim belleğine sığmaması) neden olabilir! Basit bir örnek verelim: **Crout** metodunda denklem sayısının n=100, p=2, $\underline{L}$ nin tüm diyagonal elemanların birbirine eşit ve 5 olduğunu varsayalım. 6.5 den:

$$\det \underline{A}=(-1)^{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots \cdot 5=5^{100}=7888609052210118054117285652827862296732064351090230047702789306640625$$

gibi çok büyük bir sayı olur(yuvarlanmış det $\underline{A}=7.88860905\cdot 10^{69}$). Uygulamada karşılaşılan büyük denklem sistemlerinde n=100000, n=100000000 olabildiğine göre, 6.5 deki ifadelerden determinantın hesaplanmasının sayı taşmasına neden olacağı (programın çıkmaza gireceği, beklide bilgisayarın kilitleneceği) açıktır.

Determinantın hesaplanması zorunlu olan bir durumda, det $\underline{A}$ yı doğrudan 6.5 deki ifadelerden değil

Det $\underline{A} = (-1)^{p}\cdot s\cdot 2^{t}$

bağıntısına göre sadece s ve t sayılarını hesaplamak sayı taşmasını önler. Burada s gerçek sayı, t tamsayı değişkenidir. s ve t değerlerini hesaplayan basit bir BASIC programı parçası verilmiştir.

REM Determinant için s ve t yi belirle (**Wilkinson**[1])

```
        s=1
        t = 0
        FOR i = 1 TO n
          s = s * a(i, i)
1930      t = t + 4
          IF ABS(s) >= 1 THEN s = s *0.0625 : GOTO 1930
1950      t = t - 4
          IF ABS(s) <0.0625 THEN s = s * 16 : GOTO 1950
        NEXT i
```

Basit **Gauss**, **Doolittle, Crout** metotlarında alt veya üst üçgen matrisin diyagonal elemanları $\underline{A}$ matrisinin diyagonalinde depolanmıştır. **Cholesky** metodunda da durum aynıdır, ancak **Cholesky** metodunda bu satır s = s * a(i, i)^2 olarak değiştirilmelidir.

Uyarı: s ve t değerleri yerine konularak programda det $\underline{A} = (-1)^{p}\cdot s\cdot 2^{t}$ değeri hesaplanmamalıdır. Aksi halde gene sayı taşması olacaktır. s ve t programda belirlendikten sonra, det $\underline{A}=(-)^{p}\cdot s\cdot 2^{t}$ değeri program dışında, Mathematica veya MATLAB ile ya da özel bir program ile, hesaplanabilir.

----
[1] James Hardy **Wilkinson** (1919 – 1986), İngiliz

U^TDU veya L^TDL çarpanlara ayırma yöntemi

U^TDU (veya L^TDL) yöntemi ***simetrik*** matrisler için ve Cholesky metodunun biraz farklı şeklidir. Matrisin pozitif tanımlı olması gerekmez. Simetrik $\underline{A}$ matrisi

$\underline{A}=\underline{U}^T\underline{D}\ \underline{U}$

olacak şekilde diyagonal elemanları 1 olan üst üçgen $\underline{U}$ ve $\underline{D}$ diyonal matrisine dönüştürülür. $\underline{U}$ ve $\underline{D}$ aşağıdaki bağıntı sağlanacak şekilde belirlenir.

$$\underline{U}^T\underline{D}\underline{U}=\underline{A}\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ u_{12} & 1 & & & \\ u_{13} & u_{23} & 1 & & \\ . & . & . & \cdots & \\ u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{U}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & & \\ & & d_{33} & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & d_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & 1 & \cdots & u_{3n} \\ & & & \cdots & . \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{A}}$$

U^TDU yöntemi bazı problemlerin çözümünde daha uygun olmaktadır. Yöntemin detayları burada verilmeyecektir.