ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli

Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

n=m

Alt üçgen matris

Yukarıdan aşağı doğru hesap

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\ . & . & . & . & \cdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= b_1 / l_{11} \\ x_2 &= (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22} \\ x_3 &= (b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2)/l_{33} \\ &\cdots \\ x_n &= (b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - l_{n3}x_3 - l_{n4}x_4 - \ldots. - l_{n(n-1)}x_{n-1})/l_{nn} \end{aligned}$$

4

DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMÜ, DİREKT METOTLAR

Katsayılar matrisi üçgen sistemler

4. KATSAYILAR MATRİSİ ÜÇGEN OLAN DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Katsayılar matrisi alt veya üst üçgen olan denklem sistemi ile uygulamada karşılaşılmaz. Ancak, çarpanlara ayırma yöntemlerinde ortaya çıkar. Bu yöntemlerin anlaşılabilmesi açısından üçgen katsayılı sistem çözümü iyi kavranmalıdır.

Aşağıdaki üçgen matrislerde diyagonal elemanların sıfırdan farklı olduğu varsayılmaktadır (determinant≠0 anlamında).

Alt üçgen katsayılı sistem:

$$
\begin{array}{lllllll}
l_{11}x_1 & & & & & & = b_1 \\
l_{21}x_1 & + l_{22}x_2 & & & & & = b_2 \\
l_{31}x_1 & + l_{32}x_2 & + l_{33}x_3 & & & & = b_3 \\
. & . & . & . & \dots & & . \\
l_{n1}x_1 & + l_{n2}x_2 & + l_{n3}x_3 & + l_{n4}x_4 & \dots & + l_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
$$

1. Adım: x_1 i hesapla: $x_1=b_1/l_{11}$

2. Adım: x_1 i yerine koy, x_2 yi hesapla

3. Adım: x_1 ve x_2 yi yerine koy x_3 ü hesapla

n. Adım: x_1, x_2, x_3, …, x_{n-1} i yerine koy x_n i hesapla

Hesap yönü

Denklem sistemi matris notasyonunda $\underline{L}\ \underline{x}=\underline{b}$

$$
\begin{bmatrix}
l_{11} & & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\
. & . & . & . & \dots & \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Hesap yönü

1. Adım: $x_1 = b_1 / l_{11}$

2. Adım: $x_2 = (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22}$

3. Adım: $x_3 = (b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2)/l_{33}$

…

n. Adım: $x_n = (b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - l_{n3}x_3 - l_{n4}x_4 - \dots - l_{n(n-1)}x_{n-1})/l_{nn}$

Şeklini alır. 1. denklemde 1, ikinci denklemde 2, 3. denklemde 3, …, n. denklemde n bilinmeyen vardır. Hesap 1. denklemden n. denkleme doğru yapılır: 1. denklemden x_1 hesaplanır. 2. denklemde x_1 yerine konur ve x_2 hesaplanır. 3. denklemde x_1, x_2 yerine konur ve x_3 hesaplanır. n. denklemde x_1, x_2, x_3, …, x_{n-1} yerine konur ve x_n hesaplanır. Görüldüğü gibi çözüm çok basittir. **Hesap yönü yukarıdan aşağıya** doğrudur. Şematik hesap:

$$
\begin{bmatrix}
l_{11} & & & & & \\
. & . & & & & \\
. & . & . & & & \\
. & . & . & . & & \\
l_{i1} & l_{i2} & . & l_{i(i-1)} & l_{ii} & \\
. & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_{i-1} \\ x_i \\ . \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_i \\ . \end{bmatrix}
$$

1. Adım: $x_1 = b_1/l_{11}$

x_i bilinmeyenini hesaplamak için: *$\underline{L}$ nin i diyagonalinin solundaki sayılar $\underline{x}$ in i. satırının üstündeki sayılar ile çarpılır, b_i den çıkartılır, bulunan değer $\underline{L}$ nin diyagonal elemanı l_{ii} ye bölünür.*

i. Adım: $x_i = (b_i - l_{i1}x_1 - l_{i2}x_2 - \dots - l_{i(i-1)}x_{i-1})/l_{ii}$

Örnek:

Hesaplarda noktadan sonra 3 hane yürütülmüştür, 3. hane yuvarlatılmıştır.

$$
\begin{bmatrix}
6 & & & \\
-1 & 3 & & \\
2 & -4 & 7 & \\
-3 & 5 & 2 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

Hesap yönü

1. Adım: $x_1 = 3/6 = 0.500$

2. Adım: $x_2 = (-7-(-1)\cdot 0.500)/3 = -2.167$

3. Adım: $x_3 = (4-2\cdot 0.500-(-4)\cdot(-2.167))/7 = -0.810$

4. Adım: $x_4 = (5-(-3)\cdot 0.500-5\cdot(-2.167)-2\cdot(-0.810))/4 = 4.739$

$$
\underline{x} = \begin{bmatrix} 0.500 \\ -2.167 \\ -0.810 \\ 4.739 \end{bmatrix}
$$

Gözlem:

- Diyagonal elemanlar $l_{ii} \neq 0$ dır.
- Katsayılar matrisinin determinantı $\det \underline{L} = l_{11}\cdot l_{22}\cdot \ldots \cdot l_{nn} = 6\cdot 3\cdot 7\cdot 4 = 504 \neq 0$ dır.
- $\underline{L}$ düzenli(regüler) bir matristir, satır ve kolonları doğrusal bağımlı değildir, rank=n=4 tür.
- Tek çözüm vardır ve bulunmuştur.

Bu koşullardan biri sağlanmasaydı çözüm bulanamayacaktı!

Üst üçgen katsayılı sistem:

$$\begin{array}{ccccccc}
u_{11}x_1 & +u_{12}x_2 & +u_{13}x_3 & \dots & +u_{1(n-1)}x_{n-1} & +u_{1n}x_n & =b_1 \\
 & u_{22}x_2 & +u_{23}x_3 & \dots & +u_{2(n-1)}x_{n-1} & +u_{2n}x_n & =b_2 \\
 & & & \dots & . & . & . \\
 & & & & u_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +u_{(n-1)n}x_n & =b_{n-1} \\
 & & & & & u_{nn}x_n & =b_n
\end{array}$$

n. Adım: $x_2, x_3, \dots x_n$ i yerine koy x_1 i hesapla

n-1. Adım: $x_3, x_4, \dots x_n$ i yerine koy x_2 yi hesapla

2. Adım: x_n i yerine koy, x_{n-1} i hesapla

1. Adım: x_n i hesapla: $x_n=b_n/u_{nn}$

Hesap yönü

Matris notasyonunda U x=b

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1(n-1)} & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2(n-1)} & u_{2n} \\ & & . & \dots & . & . \\ & & & & u_{(n-1)(n-1)} & u_{(n-1)n} \\ & & & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Hesap yönü

n. Adım: $x_1=(b_1-u_{12}x_2-u_{13}x_3-\dots-u_{1(n-1)}x_{n-1}-u_{1n}x_n)/u_{11}$

n-1. Adım: $x_2=(b_2-u_{23}x_3-\dots-u_{2(n-1)}x_{n-1}-u_{2n}x_n)/u_{22}$

$\dots$

2. Adım: $x_{n-1}=(b_{n-1}-u_{(n-1)n}x_n)/u_{(n-1)(n-1)}$

1. Adım: $x_n=b_n/u_{nn}$

şeklini alır. n. denklemde 1, n-1. denklemde 2, …, 2. denklemde n-1 ve 1. denklemde n bilinmeyen vardır. Hesap n. denklemden 1. denkleme doğru yapılır: n. denklemden x_n hesaplanır. n-1. denklemde x_n yerine konur ve x_{n-1} hesaplanır. 2. denklemde x_3, , x_4,…, x_n yerine konur ve x_2 hesaplanır. 1. denklemde x_2, x_3, …, x_n yerine konur ve x_1 hesaplanır. Görüldüğü gibi çözüm çok basittir. **Hesap yönü aşağıdan yukarı** doğrudur. Şematik hesap:

$$\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . \\ & u_{ii} & u_{i(i+1)} & u_{i(i+2)} & . & u_{in} \\ & . & . & . & . & . \\ & & & . & . & . \\ & & & & . & . \\ & & & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . \\ x_i \\ x_{i+1} \\ x_{i+2} \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ b_i \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

i. Adım: $x_i=(b_i-u_{i(i+1)}x_{i+1}-u_{i(i+2)}x_{i+2}-\dots-u_{in}x_n)/u_{ii}$

x_i bilinmeyenini hesaplamak için: *U nun i diyagonalinin sağındaki sayılar x in i. satırının altındaki sayılar ile çarpılır, b_i den çıkartılır, bulunan değer U nun diyagonal elemanı u_{ii} ye bölünür.*

1. Adım: $x_n=b_n/u_{nn}$

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 & -3 \\ & 3 & -4 & 5 \\ & & 7 & 2 \\ & & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hesap yönü

4. Adım: $x_1=(3-(-1)(-4.131-2\cdot 0.214-(-3)\cdot 1.250)/6=2.191$

3. Adım: $x_2=(-7-(-4)\cdot 0.214-5\cdot 1.250)/3=-4.131$

2. Adım: $x_3=(4-2\cdot 1.250)/7=0.214$

1. Adım: $x_4=5/4=1.250$

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} 2.191 \\ -4.131 \\ 0.214 \\ 1.250 \end{bmatrix}$$

Gözlem:

- Diyagonal elemanlar $u_{ii}\neq 0$ dır.
- Katsayılar matrisinin determinantı det $\underline{U}=u_{11}\cdot u_{22}\cdot\ldots\cdot u_{nn}=6\cdot 3\cdot 7\cdot 4=504\neq 0$ dır.
- U düzenli(regüler) bir matristir, satır ve kolonları doğrusal bağımlı değildir, rank=n=4 tür.
- Tek çözüm vardır ve bulunmuştur.

Bu koşullardan biri sağlanmasaydı çözüm bulanamayacaktı!