ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli

Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

Klasik notasyon *Matris notasyonu* *Matris notasyonu*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

3

ÇOK BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMİ TÜRLERİ

Çözümün varlığı, yokluğu, çokluğu ve çözüm metotları

3. ÇOK BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMİ TÜRLERİ

Karmaşık ve analitik çözümü mümkün olmayan diferansiyel denklemler sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi yöntemler ile doğrusal denklem sistemlerine dönüştürülürler. Hemen her bilim dalında problemlerin tahminen %75 i en az bir bilinmeyenli bir doğrusal denkleme, genellikle de çok bilinmeyenli doğrusal denklem sistemine indirgenir. Klasik ve matris nosyonunda yazılmış doğrusal denklem sistemlerine örnekler:

Bir bilinmeyenli bir denklem:

Klasik: $a_{11}x_1=b_1$ matris: $[a_{11}][x_1]=[b_1]$ → $\underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$

İki bilinmeyenli iki denklemli sistem:

Klasik: $$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2\end{aligned}$$ matris: $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$ → $\underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$

m bilinmeyenli n denklemli sistem:

Klasik: $$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m&=b_2\\ &.\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m&=b_n\end{aligned}$$

Matris: $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ . & . & \ldots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ .\\ x_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$$ → $\underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$

$\underline{A}$ ve $\underline{b}$ bilinir $\underline{x}$ hesaplanır. a_{ij} ve b_i sabit sayılar, x_i bilinmeyendir. $\underline{A}$ ya katsayılar matrisi, $\underline{x}$ e bilinmeyenler vektörü ve $\underline{b}$ ye karşı taraf vektörü denir. Denklemler sabit sayıları ve birinci dereceden bilinmeyenleri içerdiği için bu tür denklem sistemlerine **doğrusal denklem sistemleri** adı verilir, çünkü $x_1 \cdot x_2$, x_1^2, Sin(x_2), Log (x_1), e^{x_1}, 1/(x_1+x_2) gibi veya benzeri terimler içermezler.

Denklem sistemi türleri:

1. Denklem sayısının bilinmeyen sayısına eşit olduğu sistem: n=m

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ . & . & \ldots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir: n=m. Uygulamada çoğunlukla karşılaşılan denklem sistemi türüdür. Katsayılar matrisi $\underline{A}$ tam dolu, seyrek dolu, simetrik, bant, simetrik ve bant, üçlü köşegenmatris olabilir.

det $\underline{A}$≠0 ise tek çözüm vardır, det $\underline{A}$ = $\underline{0}$ durumunda çözüm yoktur veya sonsuz çözüm vardır.

Örnek: $$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 & 1\\ -3 & 8 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 9 & 2\\ -1 & 3 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11.2\\ -6.6\\ -0.3\\ -12.8\end{bmatrix}$$

2. Denklem sayısının bilinmeyen sayısından çok olduğu sistem: n>m

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ . & . & \ldots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ .\\ x_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$$

Denklem sayısının bilinmeyen sayısından çok olması durumudur: n>m. Genellikle ölçüme ve deneye dayalı problemlerde ortaya çıkar. Ölçme ve deney yoluyla belirlenen veri hatalarını en aza indirgemek için bilinmeyen sayısından daha çok denklem oluşturulur. Çözüm yaklaşıktır ve minimum hata olacak şekilde bulunmaya çalışılır.

$\underline{A}$ katsayılar matrisi genelde çok seyrek doludur. Bu tür denklem sistemini çözebilmek için $\underline{A}$ nın kolonları doğrusal bağımsız olmalı, yani rank $\underline{A}$=m olmalıdır.

Örnek: $$\begin{bmatrix} 3.1 & -6.6\\ -2.9 & 4.2\\ 2.7 & 5.8\\ 1.8 & 2.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.58\\ 2.01\\ -4.43\\ 3.39\end{bmatrix}$$

3.Denklem sayısının bilinmeyen sayısından az olduğu sistem: n<m

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$$

Denklem sayısının bilinmeyen sayısından az olması durumudur: n<m. Elektronik devre analizi, coğrafi bilgi sistemi, istatistik, optimizasyon ve mekanik gibi alanların bazı problemlerinde bu tür sistemler ile karşılaşılır.

$\underline{A}$ katsayılar matrisi genelde çok seyrek doludur. Bu tür denklem sistemini çözebilmek için $\underline{A}$ nın satırları doğrusal bağımsız olmalı, yani rank $\underline{A}$=n olmalıdır. Tek değil, sonsuz çözüm vardır.

Örnek:
$$\begin{bmatrix}4 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 6 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-22\\ 41\end{bmatrix}$$

4. Birden çok karşı taraflı sistem:

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}\rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s}\\ . & . & \dots & .\\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{ms}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s}\\ . & . & \dots & .\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns}\end{bmatrix}$$

Aynı katsayılı s tane denklem sisteminin tek bir denklem sisteminde yazılmış şeklidir.

Karşı tarafta s tane vektör vardır. Her karşı taraf vektörü için bir çözüm vektörü gerektiğinden $\underline{x}$ matrisinin de s tane vektörü vardır.

Çözüm s tane denklem sisteminin çözümü ile eşdeğerdir. Çözümün varlığı yukarıda açıklanan n=m, n>m veya n<m durumlarından biri gibidir.

Örnek:
$$\begin{bmatrix}6 & -3 & -3 & 1\\ -3 & 9 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 9 & 2\\ -2 & -1 & -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\\ x_{41} & x_{42} & x_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-22 & 3 & 1.6\\ 42 & -9 & 3.9\\ 16 & -12 & 8.3\\ 9 & 5 & 4.1\end{bmatrix}$$

5. Karşı tarafı sıfır olan sistem(homojen denklem sistemi):

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{0}\rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

Karşı tarafı sıfır olan sisteme homojen denklem sistemi denir. n=m veya n≠m olabilir. $\underline{x}=\underline{0}$ için bu bağıntının sağlandığı açıktır. Ancak burada $\underline{x}\neq\underline{0}$ çözümü önemli olur.

$\underline{x}\neq\underline{0}$ çözümünün olabilmesi için:

1. ya det $\underline{A}=\underline{0}$ olmalı, veya
2. $\underline{A}$ nın satırları veya kolonları doğrusal bağımlı olmalı.

Her durumda denklemi sağlayan birden çok $\underline{x}$ vardır.

Örnek:
$$\begin{bmatrix}4 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 6 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

6. Karşı tarafı bilinmeyen vektörünün sabit bir katı olan sistem(özdeğer problemi):

$$\underline{A}\underline{x}=\lambda\underline{x}\rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\underline{x}-\lambda\,\underline{I}\,\underline{x}=0\rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & . & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

$$(\underline{A}-\lambda\,\underline{I})\underline{x}=0\rightarrow\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & . & \\ & & & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

Soldaki bağıntıların hepsi de aynı bağıntıdır, fakat farklı şekillerde yazılmışlardır.

nxn boyutlu denklem sisteminin karşı tarafı bilinmeyen vektörünün sabit bir katıdır. Bu tür denklem sistemi ile dinamik, deprem, stabilite problemlerinde karşılaşılır ve özdeğer problemi adı verilir. Denklemi sağlayan bir λ sabiti ve buna ait $\underline{x}$ vektörü aranır. λ Sabitine özdeğer, $\underline{x}$ vektörüne de λ ya ait özvektör denir.

Homojen bir denklem sistemi olduğundan $\underline{x}\neq 0$ çözümleri ancak ve ancak det ($\underline{A}$-λ$\underline{I}$) =0 için vardır.

Çözümü zorca olan bu problem titreşim yapan cisimlerin periyot, frekans ve modlarının hesabına özdeştir.

Tek çözüm var, çözüm yok, sonsuz çözüm var ne demektir? Bir bilinmeyenli bir denklem için açıklamaya çalışalım:

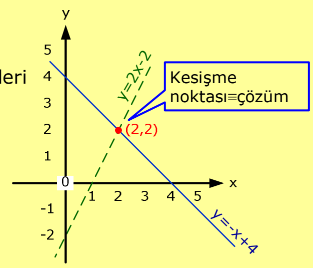
ax=b denkleminde a ve b sabit x bilinmeyendir. a≠0 durumunda çözüm x=b/a dır, **Çözüm vardır ve tektir.** a=0 ve b≠0 durumunda 0x=b ifadesi matematik kurallara ters düşer, çünkü, b≠0 olduğu bilinmektedir. Ayrıca bu ifadeden x=b/0 yazılamaz! Demek ki denklem uyumsuzdur, **çözüm yoktur.** a=0 ve b=0 durumunda 0x=0 bağıntısını sağlayan sonsuz x vardır, **sonsuz çözüm vardır.**

Tek çözüm var, çözüm yok, sonsuz çözüm var ne demektir? İki bilinmeyenli denklem sistemleri için açıklamaya çalışalım:

1. denklem sistemi:

2x - y=2 veya y=2x - 2
x + y=4 y=-x + 4

İki farklı doğrunun denklemidir. Bu doğruları x-y koordinat sisteminde çizersek x=2 ve y=2 noktasında kesiştiklerini görürüz. O halde bu nokta her iki doğru üzerindedir, x=2 ve y=2 değerleri her iki denklemi de sağlar, başka kesişen nokta yoktur. **Çözüm vardır ve tektir.**



Tek çözüm var

Aynı denklem sistemini matris notasyonunda yazar ve katsayılar matrisinin determinantını hesaplarsak

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \det \underline{A}=2\cdot 1-(-1)\cdot 1=3$$

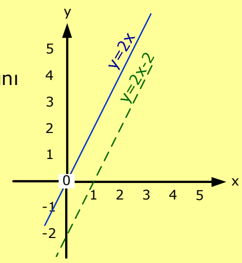
Det $\underline{A} \neq 0$ olduğunu görürüz.

Sonuç: determinantı sıfırdan faklı denklem sisteminin çözümü vardır ve tektir.

2. denklem sistemi:

2x - y=2 veya y=2x - 2
x - ½y=0 y=2x

İki farklı doğrunun denklemidir. Bu doğruları x-y koordinat sisteminde çizersek birbirine paralel olduklarını görürüz, kesişmezler. O halde her iki doğru üzerinde olan hiçbir ortak nokta yoktur. Her iki denklemi de sağlayan x ve y değer çifti bulunamaz. **Çözüm yoktur.**



Çözüm yok

Aynı denklem sistemini matris notasyonunda yazar ve katsayılar matrisinin determinantını hesaplarsak

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \det \underline{A}=2\cdot(-0.5)-(-1)\cdot 1=0$$

Det $\underline{A}$ = 0 olduğunu görürüz. 1. satırı -1/2 ile çarparak 2. satır ile toplarsak

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{A}$ nın ikinci satırı sıfır olur, yani $\underline{A}$ nın satırları doğrusal bağımlıdır, rank<2 dir. $\underline{b}$ nin ikinci satırı sıfır değildir. İkinci denklemi açık yazarsak 0·x+0·y=-1 yani 0=1 dir. Bu ise matematik kurallara ters düşer. Demek ki denklemler uyumsuzdur.

Sonuç: Katsayılar matrisinin bir satırı sadece sıfır elemanlar içeriyor fakat aynı satırın karşı tarafı sıfırdan farklı ise:
1. determinant sıfırdır. 2. satırlar doğrusal bağımlıdır. 3. denklemler uyumsuzdur. 4. denklem sisteminin çözümü yoktur.

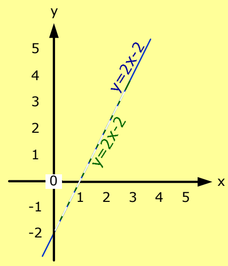
3. denklem sistemi:

2x - y=2
x - ½y=1

birbirinden farklı gibi görünen bu iki denklemi

y=2x-2
y=2x-2

şeklinde yazarsak, gerçekte birbirinin aynı iki doğru olduğunu görürüz. Bu doğruları x-y koordinat sisteminde çizersek üst üste düşerler. Her iki doğru üzerinde sonsuz ortak nokta vardır. O halde her iki doğru üzerindeki her nokta her iki denklemi de sağlarlar. Bu nedenle **sonsuz çözüm vardır.**



Sonsuz çözüm var

Aynı denklem sistemini matris notasyonunda yazar ve katsayılar matrisinin determinantını hesaplarsak

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \det \underline{A}=2\cdot(-0.5)-(-1)\cdot 1=0$$

Det $\underline{A}$ = 0 olduğunu görürüz. 1. satırı -1/2 ile çarparak 2. satır ile toplarsak

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{A}$ nın ve $\underline{b}$ nin ikinci satırı sıfır olur, yani $\underline{A}$ nın satırları doğrusal bağımlıdır, rank<2 dir. İkinci denklemi açık yazarsak 0·x+0·y=0 yani 0=0 dır. Bu ise matematik kurallara ters düşmez. Demek ki denklemler uyumludur. y değişkenine istediğimiz herhangi değer verebilir, x i buna bağlı hesaplayabiliriz: y=c gibi bir sabit olsun, x=[2-(-1).c]/2=1+0.5c olur. Çözüm vektörü

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+0.5c \\ c \end{bmatrix}$$ dır ve denklem sistemini her c değeri için sağlar. Sonsuz c değeri olabileceği için sonsuz çözüm vardır.

Sonuç: Katsayılar matrisinin bir satırı sadece sıfır elemanlar içeriyor ve aynı satırın karşı tarafı da sıfır ise:
1. determinant sıfırdır. 2. satırlar doğrusal bağımlıdır. 3. denklemler uyumludur. 4. denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

Tek çözüm var, çözüm yok, sonsuz çözüm var ne demektir? Üç bilinmeyenli denklem sistemi için açıklamaya çalışalım:

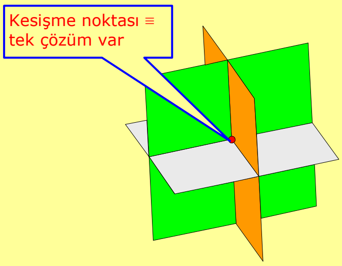
Denklem sistemi:

$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$
$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_1$
$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3$

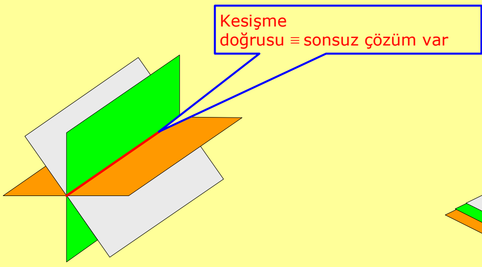
3 adet düzlem denklemi

Matris notasyonunda $\underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}$, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

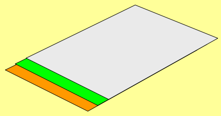
denklem sisteminin her bir denklemi bir düzlemin denklemidir. x, y, z uzay eksen takımında; üç düzlem bir noktada kesişirse tek çözüm vardır. Bir doğru boyunca kesişirlerse veya üst üste düşerlerse sonsuz çözüm vardır. Kesişmezler veya birbirine pararlel iseler çözüm yoktur.



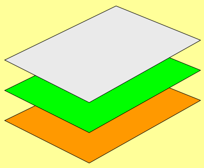
Düzlemler bir noktada kesişiyor: Tek çözüm var



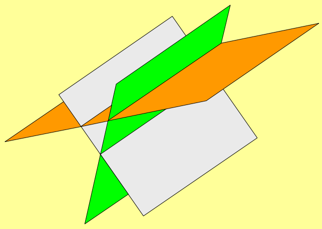
Düzlemler bir doğru boyunca kesişiyor: Sonsuz çözüm var



Düzlemler üst üste düşüyor: Sonsuz çözüm var



Düzlemler birbirine paralel: Çözüm yok



Düzlemler kesişmiyor: Çözüm yok

Genelleştirme: Tek çözüm var, çözüm yok, sonsuz çözüm var ne demektir? n denklem ve m bilinmeyenli

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m &= b_2 \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}$$

Denklem sistemi x_1, x_2, …, x_m eksenli uzayda tanımlıdır. Çizim yoluyla çözümü gösteremeyiz. 2x2 ve 3x3 denklem sistemleri için yukarıda verdiğimiz ilkeleri genelleştirebiliriz: Aranan çözüm, m eksenli uzayda koordinatları x_1, x_2, …, x_m olan bir noktadır. Bu nokta bulunabilir, bulunamayabilir veya sonsuz tane bulunabilir. O halde nxm denklem sisteminin

- **Tek çözümü olabilir.**
- **Çözümü olmayabilir.**
- **Sonsuz çözümü olabilir.**

Denklem sistemine bakarak çözüm vardır, yoktur ya da sonsuz çözüm vardır demek mümkün değildir. Yukarıdaki irdelemelerden anlaşıldığı gibi, çözüm katsayılar matrisinin determinantının değerine, satır veya kolonların doğrusal bağımlı olup olmadığına, ranka ve denklemlerin uyumlu olup olmadığına bağlıdır.

Büyük bir denklem sisteminin determinantı nasıl hesaplanacak? Satır veya kolonların doğrusal bağımlı olup olmadığı nasıl belirlenecek? Denklemlerin uyumlu veya uyumsuz olduğu nasıl anlaşılacak? Rank nasıl hesaplanacak?

Zor gibi görülen bu soruların cevabı aslında çok basittir. Denklem sistemi çözülürken bu soruların tümünün cevabı da kendiliğinden ortaya çıkar. Bölüm 4 de denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri incelenirken bu sorular sayısal örneklerle cevaplanacaktır.

Doğrusal denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri

Katsayılar matrisi kare olan, n denklem ve n bilinmeyenli

$$\underline{A}\ \underline{x}=\underline{b} \tag{3.1}$$

denklem sistemininde $\underline{A}$ ve $\underline{b}$ nin elemanlarının sabit sayılardan oluştuğu, det $\underline{A} \neq 0$ ve $\underline{b} \neq \underline{0}$ olduğu varsayılmaktadır. Denklem sistemini sağlayan $\underline{x}$ vektörünün hesaplanması amaçlanmaktadır. Bilindiği gibi, sıralanan koşullar nedeniyle, çözüm vardır ve tektir.

Bilinen ilk sistematik çözüm metodu **Cramer** kuralıdır[1]. Determinant hesabına dayalı bu çözüm metodu, diğer çözüm metotlarına kıyasla, çok fazla işlem(100 bilinmeyenli denklem sistemi için yaklaşık 70 milyon işlem!) gerektirdiğinden günümüzde kullanılmamaktadır. Cramer kuralının sadece tarihsel değeri vardır.

Günümüzde 3.1 doğrusal denklem sistemi **direkt** veya **iterasyon** yöntemlerinden biri ile çözülür:

Direkt yöntemler:

Belli sayıda çözüm adımı ve işlem sayısı olan çözüm yöntemleridir. Gerekli adım sayısı ve dört işlem sayısı çözüm öncesi bellidir. **GAUSS** indirgeme metodu, **GAUSS-JORDAN** tekniği, LU veya LDU **çarpanlara ayırma** yöntemleri, **CHOLESKY** metodu ve diğer benzerleri bu gruba girer.

İterasyon yöntemleri:

Gerekli adım ve dört işlem sayısı çözüm öncesi bilinemez. Hatta çözümün bulunacağının garantisi de her zaman yoktur. Çözüme bir başlangıç çözümü tahmin edilerek başlanır, bir sonraki adımda hesaplanan çözüm gerçek çözüme daha yakındır. Birbirini izleyen iki çözüm arasındaki fark yeter derecede küçük oluncaya kadar hesap tekrarlanır. **JACOBI**, **GAUSS-SEIDEL** metodu, **CG** (Conjugate Gradient method) metodu, **SOR**(Successive Overrelaxation Method) metodu ve diğer benzerleri bu gruba girer.

Çok sayıda direkt ve iterasyon yöntemi vardır. 1953 yılında yapılan bir sayıma göre 450 den çok çözüm yöntemi vardı. Temelleri asırlar önce atılmış olmakla birlikte, asıl gelişmeler 1960-1970 lı yıllarda olmuştur. Bugün sayısını bilmek mümkün değildir. En genel yöntem **GAUSS** indirgeme metodudur. Diğerleri bu yöntemin özel durumlar için az ya da çok değiştirilmiş şeklidir. Yukarıda adı geçen yöntemler en çok kullanılanlardır.

Tüm çözüm yöntemlerinin üç temel dayanağı vardır:

- ***Denklem sisteminin bir denkleminin sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılması çözümü değişmez.***
- ***Denklem sisteminin iki satırının yerleri değiştirilirse çözüm değişmez.***
- ***Denklem sisteminin iki kolonunun yerleri değiştirilirse çözüm değişmez, ancak değişkenlerin sırası değişir.***
- ***Denklem sisteminin bir denklemi sıfırdan farklı sabit bir sayı ile çarpılır ve başka bir satır ile toplanırsa(veya çıkarılırsa) çözüm değişmez.***

Direkt çözüm metotları bu ilkelerden yararlanarak 3.1 denklem sisteminin katsayılar matrisini

- ***Bir üst üçgen matrise, veya***
- ***Bir alt ve bir üst üçgen matrisin çarpımına veya***
- ***Bir alt üçgen bir diyagonal ve bir üst üçgen matrisin çarpımına***

dönüştürürler. Bu nedenle, yukarıda adı geçen yöntemlere, **indirgeme** veya **çarpanlara ayırma** yöntemi adı da verilir. Katsayılar matrisi üçgenleştirilmiş sistemin çözümü gerçek sistemin çözümünü verir.

---

[1] İlk sistematik denklem çözümünü İsviçreli **Cramer**(1704-1752), 1750 yılında yayınladı.