ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü
E-Posta: ogu.ahmet.topcu@gmail.com
Web: http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu

Bilgisayar Destekli

Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

$$\det \underline{A} = \det \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{\text{Matris}} = \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}^{\text{Determinant}}$$

$$\underline{C}_{n \times s} = \underline{A}_{n \times m} \; \underline{B}_{m \times s}$$

2

DETERMİNAT VE MATRİSLERLE DÖRT İŞLEM

2. DETERMİNANT VE MATRİSLERLE DÖRT İŞLEM

Kare matrisin determinantı

Matris çok sayıda sayıyı barındıran bir tablodur, kendi sayısal değeri yoktur. Fakat her kare matrise ait **determinant**[1] denilen; pozitif, negatif veya sıfır olabilen bir sayı vardır. Determinantını bildiğimiz matris hakkında önemli bazı yorumlar yapabilir, karar verebiliriz. Determinant kelimesi; belirleyen, tanımlayan, vurgulayan, egemen, karar veren anlamındadır. Bazı Türkçe kaynaklar matrisin determinantını "matrisin belirteni" olarak tercüme etmektedirler.

İki bilinmeyenli doğrusal denklem sisteminin klasik cebir ve matris notasyonunda

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \tag{2.1}$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz. Örnek:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 9x_2 &= 30 \\ x_1 + 3x_2 &= 9 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

2.1 denklem sistemini çözmeye, denklem sistemini sağlayan x_1 ve x_2 bilinmeyenlerini hesaplamaya, çalışalım. Bu amaca yönelik çok sayıda yöntem vardır. Orta öğretimden bu yana kullandığımız değişken yok etme yöntemini kullanalım.

2.1 in birinci denklemini a_{22} ile, ikinci denklemini $-a_{12}$ ile çarpar ve her iki denklemi toplarsak x_2 bilinmeyeni yok olur, x_1 i hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}\cancel{a_{12}x_2} &= a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}\cancel{a_{22}x_2} &= -a_{12}b_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

2.1 in birinci denklemini $-a_{21}$ ile, ikinci denklemini a_{11} ile çarpar ve her iki denklemi toplarsak x_1 bilinmeyeni yok olur, x_2 yi hesaplayabiliriz:

Eşit

$$\begin{aligned} -\cancel{a_{21}a_{11}x_1} - a_{21}a_{12}x_2 &= -a_{21}b_1 \\ \cancel{a_{11}a_{21}x_1} + a_{11}a_{22}x_2 &= a_{11}b_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -a_{21}a_{12}x_2 + a_{11}a_{22}x_2 = -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Bu bağıntıları kullanarak yukarıdaki sayısal örneğin bilinmeyenlerini hesaplayalım:

$$x_1 = \frac{3\cdot 30 - 9\cdot 9}{4\cdot 3 - 9\cdot 1} = \frac{9}{3} = 3\ , \quad x_2 = \frac{4\cdot 9 - 1\cdot 30}{4\cdot 3 - 9\cdot 1} = \frac{6}{3} = 2$$

x_1 ve x_2 değişkenlerinin hesabında kullanılan yukarıdaki bağıntılar incelenirse paydada aynı sayı, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, vardır. Bu sabit sayı sadece $\underline{A}$ katsayılar matrisinin terimlerinden oluşmaktadır. Sayısal örnek için bu sayı $4\cdot 3-9\cdot 1=3$ tür.

n bilinmeyenli bir denklem sisteminin çözümünde de benzer durum vardır: x_1, x_2, … , $x_{\underline{n}}$ bilinmeyenlerinin hesabında paydaya daima aynı sabit bir sayı bölen olarak gelmektedir. İşte bu sayıya katsayılar matrisinin determinantı denilmektedir. Determinant ile n bilinmeyenli denklem sisteminin sistematik çözümünü ilk kez **Cramer**[1] vermiştir, Cramer kuralı olarak bilinir.

Yukarıda, 2.1 de verilen 2x2 boyutlu $\underline{A}$ matrisinin determinantı $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ diyagonal elemanların çarpımının farkıdır. Matris matematiğinde 2x2 matrisin determinantı

Determinat gösterimi

$$\det\underline{A} = |\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.2}$$

şeklinde gösterilir.

[1] "Determinat" kavramı matematikte "matris" kavramından çok daha önce, MÖ 300-200 civarında Çin'de denklem sistemi çözümünde kullanılmıştır. Japon Shinsuke Kova **Seki**'nin 1683 yılı çalışmalarında ve Alman **Leibniz**'in L' **Hospital**'e 1693 yılında yazdığı bir mektupta rastlanmaktadır. Determinantı denklem sistemi çözümünde sistematik olarak ilk kez İsviçreli **Cramer** 1750 yılında kullandı. "Determinant" kelimesinin isim babası Fransız **Cauchy** dir(1812).

Determinant çok önemli bir sayıdır, çünkü ait olduğu katsayılar matrisi ve denklem sistemi hakkında yorum yapabilmemize olanak sağlar. Yukarıdaki bağıntılardan da anlaşıldığı gibi, katsayılar matrisi $\underline{A}_{nxn}$ olan bir denklen sisteminin x_1, x_2, … , x_n bilinmeyenlerinin hesaplanabilmesi için det $\underline{A}\neq 0$ olmalıdır. Det $\underline{A}=0$ durumunda, sıfıra bölüm yapılamayacağı için, denklem sisteminin çözümü yoktur.

Büyük boyutlu matrislerin determinantının hesabı 2.2 deki kadar basit değildir. Matris büyüdükçe dört işlem sayısı hızla artar. Küçük boyutlu matrislerin determinantı **SARRUS** kuralı, **CHIO** metodu ve **LAPLACE** açılımı ile ve elle hesaplanabilir. Büyük matrislerin determinantı GAUSS, CHOLESKY gibi metotlar ile ve bilgisayarda hesaplanır.

SARRUS kuralı[1]: Sadece 3x3 boyutlu matrisler için geçerlidir. Determinantı hesaplanacak 3x3 matrisin ilk iki kolonu determinant işaretinin sağ tarafına yazılır. Ana ve yan diyagonaller şekilde görüldüğü gibi kesik ve sürekli çizgiler ile birleştirilir. Her sürekli çizgi üstündeki elemanlar birbirleri ile çarpılıp toplanır. Her kesik çizgi üzerinde olan elemanlar birbirleri ile çarpılır, önceki toplamdan çıkarılır.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \rightarrow \det \underline{A} = \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \;\; - \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array} \rightarrow \det\underline{A} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (2.3)$$

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \det\ \underline{A} = \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \;\; - \\ \hline 2 & -1 & 3 & 2 & -1\\ 3 & 2 & -2 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3\end{array} \rightarrow \det\underline{A} = 2\cdot 2\cdot 1+(-1)\cdot(-2)\cdot 4+3\cdot 3\cdot 3 -3\cdot 2\cdot 4-2\cdot(-2)\cdot 3-(-1)\cdot 3\cdot 1=30$$

CHIO[2] metodu: nxn boyutlu matrisin determinant formülü

$$\underline{A}_{nxn}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \Rightarrow \det\underline{A}=\frac{1}{a_{11}^{n-2}}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{2n}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{31} & a_{3n}\end{vmatrix}\\ . & . & \dots & .\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{n1} & a_{n2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{n1} & a_{n3}\end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{n1} & a_{nn}\end{vmatrix}\end{Vmatrix} \qquad (2.4)$$

ile verilir. Dikkatli incelenirse, 2x2 boyutlu n-1 adet alt determinant içerir ve düzenli bir yapısı vardır. Örnekler:

$$\det\underline{A}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2^{3-2}}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} 2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & -13\\ 10 & -10\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(7\cdot(-10)-(-13\cdot 10))=30$$

$$\det\ \underline{B}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 5\\ 4 & 0 & -2 & 1\\ 6 & 1 & 0 & -8\end{vmatrix}=\frac{1}{(-2)^{4-2}}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} -2 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} -2 & 0\\ 6 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1\\ 6 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3\\ 6 & -8\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -6 & 1 & -13\\ 0 & 0 & -14\\ -2 & -6 & -2\end{vmatrix}$$

$$\det\underline{B}=\frac{1}{4}\frac{1}{(-6)^{3-2}}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} -6 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & -13\\ 0 & -14\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} -6 & 1\\ -2 & -6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & -13\\ -2 & -2\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\frac{1}{-24}\begin{vmatrix} 0 & 84\\ 38 & -14\end{vmatrix}=\frac{1}{-24}(0-38\cdot 84)=133$$

---

[1] Pierre Frédéric **SARRUS** (1798-1861), Fransız.
[2] F. **CHIO** (?-?) tarafından 1853 yılında yayınlandı.

a_{11}=0 durumunda **CHIO** doğrudan uygulanamaz. 1. satır ile bir başka satır, $a_{11}\neq$=0 olacak şekilde, değiştirilir. Her satır değişikliği determinantın işaretini değiştirdiğinden sonuç $(-1)^p$ ile çarpılmalıdır. Burada p satır değiştirme sayısıdır.

LAPLACE[1] açılımı: Bu yönteme göre determinantın açılımı bir satıra veya bir kolona göre yapılabilir.

i. satıra göre açılım:

$$\det\underline{A}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\left|\underline{A}_{ij}\right|, \qquad (i\ \text{sabit}),$$

j. kolona göre açılım:

$$\det\underline{A}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\left|\underline{A}_{ij}\right|, \qquad (j\ \text{sabit}) \tag{2.5}$$

Buradaki $|\underline{A}_{ij}|$ terimi, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve kolonun silinmesi ile oluşan (n-1)x(n-1) boyutlu alt matrisin determinantıdır. Kaynaklarda $|\underline{A}_{ij}|$ terimine a_{ij} nin minörü, $(-1)^{i+j}|\underline{A}_{ij}|$ terimine a_{ij} nin işaretli minörü ≡ kofaktörü da denilmektedir.

1. satıra göre açılım örneği:

$$\det\underline{A}=\begin{vmatrix}4&-2&3\\-1&5&0\\6&4&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot4\cdot\begin{vmatrix}5&0\\4&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\6&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot3\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\6&4\end{vmatrix}=4(0-0)-(-2)(0-0)+3(-4-30)=-102$$

3. kolona göre açılım örneği:

$$\det\underline{A}=\begin{vmatrix}4&-2&3\\-1&5&0\\6&4&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot3\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\6&4\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot0\cdot\cancel{\begin{vmatrix}4&-2\\6&4\end{vmatrix}}+(-1)^{3+3}\cdot0\cdot\cancel{\begin{vmatrix}4&-2\\-1&5\end{vmatrix}}=3(-4-30)-0\cdot\cancel{(16+12)}+0\cdot\cancel{(20-2)}=-102$$

Örneklerden görülebileceği gibi, çok sıfırlı satır veya kolona göre açılım işlemleri azaltır. Üstü çizili terimleri yazmaya gerek yoktu! SARRUS, CHIO ve LAPLACE yöntemleri küçük matrislerin determinantlarının el hesabında kullanılabilir, sadece tarihsel değeri vardır. Programlamaya hiç uygun değildirler. Bilgisayarda determinant hesabı için GAUSS ve benzeri alternatif yöntemler kullanılır.

Determinant özellikleri

1. Matrisin i. satırı ile i. kolonu değiştirilirse determinantın değeri değişmez, dolayısıyla det$\underline{A}$=det $\underline{A}^T$ geçerlidir.

2. Matrisin iki satırının veya iki kolonunun yerleri değiştirilirse determinant işaret değiştirir: Hesap sırasında, örneğin 2.4 e göre CHIO metodunda a_{11}=0 ise 1. satır ile başka bir satıra yer değiştirilir. Hesaplanan determinat -1 ile çarpılır.

3. Matrisin bir satırının veya kolonunun tüm elemanları sıfır ise determinant sıfırdır.

4. Diyagonal ve üçgen matrislerin determinantı diyagonal elemanların çarpımına eşittir.

Örnekler:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}3&&\\&9&\\&&20\end{bmatrix}\quad \underline{I}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\quad \underline{C}=\begin{bmatrix}3&-7&0&8\\&5&1&2\\&&4&-2\\&&&-5\end{bmatrix}\quad \underline{D}=\begin{bmatrix}2&&\\-2&14&\\-2&8&6\end{bmatrix}\quad \underline{E}=\begin{bmatrix}6&70&-98\\&0&76\\&&9\end{bmatrix}$$

Det $\underline{A}$=3·9·20=540, det $\underline{I}$=1·1·1=1, det $\underline{C}$=3·5·4· (-5)=-300, det $\underline{D}$=2·14·6=168, det $\underline{E}$=6·0·9=0

Gözlem: Diyagonal ve üçgen matrislerin diyagonal elemanlarından biri sıfır ise determinant sıfırdır.

5. Diyagonal elemanları kare alt matris olan bölünmüş diyagonal matrisin determinantı alt matrislerin determinantlarının çarpımına eşittir.

[1]Pierre Simon **Laplace**(1749-1827), Fransız: 1772 de yayınlandı.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\underline{a}_{11} & & & \\ & \underline{a}_{22} & & \\ & & . & \\ & & & \underline{a}_{nn}\end{bmatrix},\ \det\underline{A}=\det\begin{bmatrix}\det\underline{a}_{11} & & & \\ & \det\underline{a}_{22} & & \\ & & . & \\ & & & \det\underline{a}_{nn}\end{bmatrix}=\det\underline{a}_{11}\det\underline{a}_{22}...\det\underline{a}_{nn}$$

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix} & & \\ & [6] & \\ & & \begin{bmatrix}4 & 9\\ 1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix},\ \det\underline{A}=\det\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix} & & \\ & |6| & \\ & & \begin{vmatrix}4 & 9\\ 1 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}|6|\begin{vmatrix}4 & 9\\ 1 & 1\end{vmatrix}=30\cdot 6\cdot(-5)=-900$$

6. Matrisin i. satırı j. satırına eşitse veya i. Kolonu j. Kolonuna eşitse determinant sıfırdır.
7. Matrisin i. satırı j. satırın sabit bir c katı ise matrisin satırları doğrusal(lineer) bağımlıdır denir. Satır veya kolonları doğrusal bağımlı matrisin determinantı sıfırdır. Dolayısıyla; determinantı sıfır olan matrisin satır veya kolonları doğrusal bağımlıdır.
8. Matrisin bir satırının veya kolonunun sabit bir c sayısı ile çarpılarak başka bir satır veya kolona eklenmesine satır veya kolonların doğrusal birleştirilmesi denir. Satır veya kolonları doğrusal birleştirilen matrisin determinantı değiştirmez.
9. Simetrik ve pozitif tanımlı matrisin determinantı sıfırdan faklıdır.
10. Kesin diyagonal ağırlıklı matrisin determinantı sıfırdan farklıdır (bak:bölüm 1, sayfa 16).

Örnek:

$$\underline{B}=\begin{bmatrix}-7 & 3 & -3\\ -2 & 8 & -3\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}|-7|>|3|+|-3|\\ |8|>|-2|+|-3|\\ |5|>|1|+|3|\end{cases}$$ olduğundan $\underline{B}$ kesin diyagonal ağırlıklıdır, det $\underline{B}$=-280≠0 dır.

Kofaktör matrisi ve adjoint matris

$\underline{A}$ kare matrisinin her a_{ij} elemanına ait işaretli minörünün=$\tilde{\underline{A}}$ = $(-1)^{i+j}$ $|\underline{A}_{ij}|$, o elemanın olduğu satır ve kolona yazılması ile oluşan matrise kofaktör matrisi; kofaktör matrisinin transpozuna da adjoint(ek) matris denir. Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ -1 & 5 & 0\\ 6 & 4 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \text{Kofaktör matrisi } \underline{K}=\begin{bmatrix}\tilde{\underline{A}}_{11} & \tilde{\underline{A}}_{12} & \tilde{\underline{A}}_{13}\\ \tilde{\underline{A}}_{21} & \tilde{\underline{A}}_{22} & \tilde{\underline{A}}_{23}\\ \tilde{\underline{A}}_{31} & \tilde{\underline{A}}_{32} & \tilde{\underline{A}}_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 6 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 5\\ 6 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 3\\ 6 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -2\\ 6 & 4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$adj\,\underline{A}=\underline{K}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & -34\\ 12 & -18 & -28\\ -15 & -3 & 18\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0 & 12 & -15\\ 0 & -18 & -3\\ -34 & -28 & 18\end{bmatrix}$$

Düzenli matris - düzensiz matris tanımı

Determinantı sıfır olan matrise **düzensiz**, sıfırdan farklı olan matrise **düzenli matris** denir. Başka isimler de verilir. **Düzensiz matris:** tekil matris, singüler matris. **Düzenli matris:** tekil olmayan, regüler, singüler olmayan matris. Özetle:

- Det $\underline{A}$≠0 ise tekil olmayan veya düzenli veya regüler matris denir.
- Det $\underline{A}$=0 ise tekil veya düzensiz veya singüler matris denir.
-

Doğrusal bağımlılık ve rank tanımı

Bir $\underline{A}_{nxm}$ matrisinin kolonlarını m tane kolon vektörü ile gösterelim:

$$\underline{A}_{nxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \cdots & \underline{a}_{1m} \end{bmatrix}, \quad \text{Örnek}: \ \underline{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

En az biri sıfırdan farklı olan, bunun dışında tamamen keyfi olan c_1, c_2, …, c_m sabit sayıları ile kolon vektörleri çarpılıp toplandığında bir sıfır vektör elde edilirse matrisin kolonları doğrusal bağımlıdır denir:

$$c_1\underline{a}_{11}+c_2\underline{a}_{12}+ \ldots + c_m\underline{a}_{1m}=\underline{0} \tag{2.7}$$

Bu bağıntı sadece ve sadece $c_1=0$, $c_2=0$, …, $c_m=0$ için sağlanıyorsa kolonlar doğrusal bağımsızdır. Yukarıda verilen $\underline{A}_{2x3}$ matrisinin birinci kolonu 1, ikinci kolonu 2 ve son kolonu -1 ile çarpılıp toplanırsa

$$1\cdot\underline{a}_{11}+2\cdot\underline{a}_{12}-1\cdot\underline{a}_{13}=1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\underline{0}$$

sıfır vektör bulunur. O halde matrisin kolonları doğrusal bağımlıdır. Bunun önemli bazı anlamı vardır:

- Vektörlerden biri diğerlerine bağımlı olarak hesaplanabilir. Yukarıdaki ifadeden $\underline{a}_{13}$

$$1\cdot\underline{a}_{11}+2\cdot\underline{a}_{12}-1\cdot\underline{a}_{13}=\underline{0}\rightarrow\underline{a}_{13}=\underline{a}_{11}+2\underline{a}_{12}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

- Kolonları doğrusal bağımlı olan matrisin determinantı sıfırdır. 2.7 ifadesi aslında

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\.\\0\end{bmatrix}\rightarrow\underline{A}\underline{c}=\underline{0}$$

Doğrusal denklem sistemi ile aynı anlamdadır. Bu denklem sistemi $\underline{c}=\underline{0}$ için sağlanır. Ancak $\underline{c}\neq\underline{0}$ ve det $\underline{A}$=0 durumunda da sağlanır. O halde ya det $\underline{A}$=0 ya da $\underline{c}=\underline{0}$ olmak zorundadır.

Matrisin tüm kolonları doğrusal bağımlı olabilir veya tümü bağımsız olabilir ya da bazıları bağımsız bazıları da diğerlerine bağımlı olabilir. m vektörün r tanesi bağımsız ise

$0 \le r \le m$

dir ve r ye matrisin rankı denir. d=m-r matrisin doğrusal bağımlı kolon sayısıdır ve rank artığı denir.

Doğrusal bağımlılık, rank ve rank artığı tanımı matrisin kolon vektörleri için yukarıda verildi. Aynı tanımlar matrisin satır vektörleri için de geçerlidir. O halde nxm boyutlu bir matrisin hem satır hem de kolon rankı vardır. Ancak, satır rankı ve kolon rankı birbirine eşittir. Rank n ve m den küçük olanına eşit veya daha küçüktür.

Verilen bilgiler ışığında r rankını şöyle de tanımlayabiliriz: nxm matrisinin rxr boyutlu öyle bir alt matrisi vardır ki bu alt matrisin determinantı sıfırdan farklıdır. Uygulamada karşılaşılan denklem sistemlerinde katsayılar matrisi genelde kare matris, n=m dir. Denklem sisteminin çözümü ancak ve ancak r=n=m ise mümkündür. Bunun anlamı, hem satır hem de kolon vektörlerinin doğrusal bağımsız olması gerektiğidir. Çünkü aksi halde katsayılar matrisinin determinantı sıfırdır, yani düzensiz bir matristir.

Daha nadir de olsa n<m (az denklem çok bilinmeyen) veya n>m (çok denklem az bilinmeyen) olan denklem sistemleri ile de karşılaşılır. n<m durumunda, normal olarak, satırlar doğrusal bağımsız, kolonlar bağımlıdır: r=n, d=m-n. n>m durumunda, normal olarak, kolonlar doğrusal bağımsız, satırlar bağımlıdır: r=m, d=n-m dir.

Bir matrisin kolon veya satırlarının doğrusal bağımlı olup olmadığını, bağımlıysa hangilerinin olduğu, yanı r rankının belirlenmesi önemlidir. Ancak, burada verilen bilgiler doğrusal bağımlılığın ve rankın belirlenmesinde, çok basit matris yapıları hariç, yetersiz kalır.

Örnekler:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 3\end{bmatrix},\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{bmatrix},\quad \underline{C}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

Matrislerinden $\underline{A}$ için r=3 tür, çünkü bu matrisin kolonlarını veya satırların $c_1=c_2=c_3=0$ ile çarparsanız $\underline{0}$ bulursunuz, başka hiçbir $c_i \neq 0$ için bu çarpım $\underline{0}$ olmaz, o halde det $\underline{A} \neq 0$ dır. $\underline{B}$ matrisinde r=2 dir, çünkü bu matrisin kolonlarını veya satırlarını $c_1=c_2=c_3=0$ ile çarparsanız, veya $c_1=0$, $c_2 \neq 0$, $c_3=0$ çarparsanız $\underline{0}$ bulursunuz, o halde det $\underline{B}=0$ dır.

$\underline{C}$ matrisinin rankının belirlenmesi ise diğerleri kadar kolay görünmüyor, dolayısıyla det $\underline{C}$ hakkında hemen bir yorum yapmak mümkün değildir. Daha sonra, 4. 5. ve 6. bölümlerde, ele alınacak olan denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerinde rankın genel olarak nasıl belirleneceği tekrar ele açıklanacaktır.

Matrislerle dört işlem

Aritmetikte a ve b sayılarının toplanması çıkarılması, çarpılması veya bölünmesi sonucu üçüncü bir c sayısı hesaplanır. Matris notasyonunda da benzer dört işlemler yapılarak $\underline{a}$ ve $\underline{b}$ matrislerinden $\underline{c}$ matrisi hesaplanır. Aşağıdaki tabloda aritmetik dört işlem ve matris notasyonundaki karşılıkları özetlenmiştir.

Dört işlem:	Aritmetik karşılığı	Matris karşılığı
Toplama	c=a+b	$\underline{c}=\underline{a}+\underline{b}$
çıkarma	c=a-b	$\underline{c}=\underline{a}-\underline{b}$
Çarpma	c=a b	$\underline{c}=\underline{a}\ \underline{b}$
Bölme	c=a/b	**Yok !**
	c=a:b	**Yok !**
	c=a(1/b)	**Yok !**
	$c=a\ b^{-1}$	$\underline{c}=\underline{a}\ \underline{b}^{-1}$

Bilindiği gibi, b^{-1} sayısı b sayısının tersidir. Benzer şekilde $\underline{a}^{-1}$ matrisi $\underline{a}$ matrisinin tersidir. Dikkat edilirse, matrislerde bölme işlemi sadece matrisin tersi ile tanımlanmaktadır.

Toplama ve çıkarma:

İki matrisin toplanabilmesi veya çıkarılabilmesi için boyutlarının aynı olması gerekir. $\underline{A}_{nxm}$ ve $\underline{B}_{nxm}$ matrislerinin toplanması veya çıkarılması sonucu oluşan aynı boyutlu $\underline{C}_{nxm}$ matrisinin

$$\underline{C}_{nxm}=\underline{A}_{nxm}\pm\underline{B}_{nxm} \qquad (2.8)$$

Eşit boyutlu

elemanları A ve B nin karşılıklı elemanlarının toplanması veya çıkarılması ile bulunur: $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$.

Örnek:

$$\underline{C}=\begin{bmatrix}3&2\\1&7\\3&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1\\7&2\\6&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\8&9\\9&8\end{bmatrix} \qquad \underline{D}=\begin{bmatrix}3&2\\1&7\\3&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\7&2\\6&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\-6&5\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C} \qquad \underline{A} - \underline{B} = \underline{D}$$

Toplama ve çıkarma özellikleri

$\underline{A} \pm \underline{B} = \pm\underline{B} + \underline{A}$
$\underline{A} \pm (\underline{B} \pm \underline{C}) = (\underline{A} \pm \underline{B}) \pm \underline{C}$
$(\underline{A} \pm \underline{B})^T = \underline{A}^T \pm \underline{B}^T$

Çarpma

İki matrisin çarpılabilmesi için kurallar vardır:

- **A ve B matrislerini çarparak bir C matrisini hesaplayabilmek için A nın kolon sayısı B nin satır sayısına eşit olmalıdır(uygunluk koşulu):**

$$\underline{C}_{nxs}=\underline{A}_{nx\cancel{m}}\ \underline{B}_{\cancel{m}xs} \qquad (2.9)$$

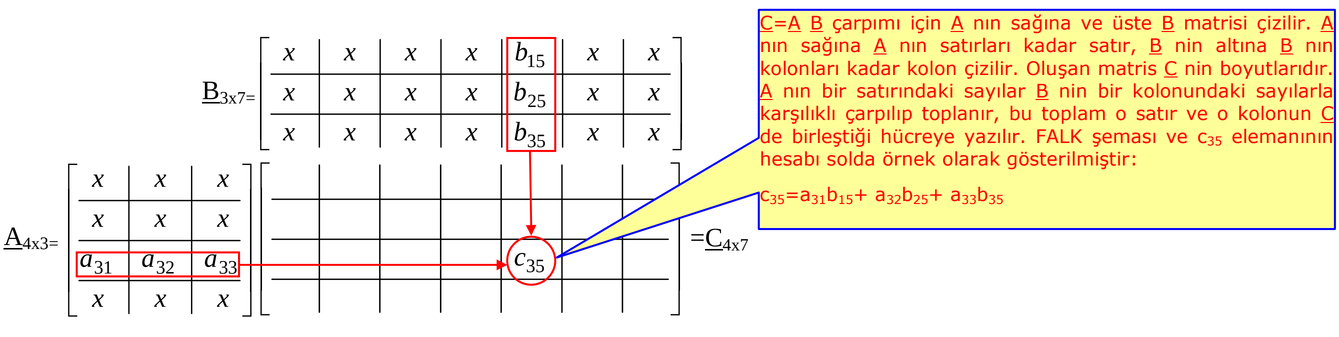
Eşit olmalı

- Çarpılan matrislerin eşit boyutları atılır, kalan boyutlar C nin boyutudur: C nin satır sayısı A nın satır sayısına, C nin kolon sayısı B nin kolon sayısına eşittir.

- C nin i. satır ve j. kolonundaki c_{ij} elemanı A nın i. satırındaki elemanların B nin j. Kolonundaki elemanlar ile karşılıklı çarpılıp toplanması ile bulunur:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj} \qquad (2.10)$$

El hesaplarında, çarpımı anlaşılır kılmak ve kolaylaştırmak için, **FALK**[1] şeması kullanılır:



Örnek:

$$\underline{A}_{3x2}=\begin{bmatrix}1&1\\3&1\\2&0\end{bmatrix},\quad \underline{B}_{2x4}=\begin{bmatrix}2&0&0&3\\-1&-1&1&2\end{bmatrix}$$

C=A B nin FALK şeması

$$\begin{array}{cc} & \underline{B}_{2x4}=\begin{bmatrix}2&0&0&3\\-1&-1&1&2\end{bmatrix}\\ \underline{A}_{3x2}=\begin{bmatrix}1&1\\3&1\\2&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&-1&1&5\\5&-1&1&11\\4&0&0&6\end{bmatrix}=\underline{C}_{3x4}\end{array}$$

---

[1] Sigurd FALK (?,?), Alman. 1950 civarında geliştirdi.

Yukarıda verilen kurallar üç veya daha çok matrisin çarpımı için aynen uygulanır, örnek:

$\underline{D}_{nxt} = \underline{A}_{nx\cancel{m}}\ \underline{B}_{\cancel{m}x\cancel{s}}\ \underline{C}_{\cancel{s}xt}$

Eşit olmalı

Eşit olmalı

Uygunluk koşulu:
- A nın kolon sayısı=B nin satır sayısı olmalı
- B nın kolon sayısı=C nin satır sayısı olmalı
- D nin boyutu=A nın satır sayısı x C nin kolon sayısıdır.

$$\underline{A}_{3x4}=\begin{bmatrix}2&4&1&0\\-1&2&3&1\\2&5&-1&2\end{bmatrix}\qquad \underline{B}_{4x2}=\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\4&1\\3&2\end{bmatrix}\qquad \underline{C}_{2x5}=\begin{bmatrix}1&-3&2&4&-1\\2&0&2&1&2\end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_{4x2}=\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\4&1\\3&2\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}1&-3&2&4&-1\\2&0&2&2&2\end{bmatrix}=\underline{C}_{\,2x5}$$

D=A B C nin FALK şeması

$$\underline{A}_{\,3x4}=\begin{bmatrix}2&4&1&0\\-1&2&3&1\\2&5&-1&2\end{bmatrix}\quad \underbrace{\begin{bmatrix}12&-3\\15&7\\11&-1\end{bmatrix}}_{\underline{A}_{\,3x4}\underline{B}_{4x2}}\quad \begin{bmatrix}6&-36&18&45&-18\\29&-45&44&67&-1\\9&-33&20&43&-13\end{bmatrix}=\underline{D}_{\,3x5}$$

Not: Burada önce A B hesaplanmış, bulunan yeni matris C ile sağdan çarpılarak D bulunmuştur. Önce B C hesaplanarak bulunan yeni matris soldan A ile çarpılarak aynı D bulunabilirdi. Ancak bu durumun daha çok işlem gerektireceği açıktır.

Matris çarpımının özellikleri

1. $\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C} = (\underline{A}\ \underline{B})\ \underline{C} = \underline{A}\ (\underline{B}\ \underline{C})$
2. $\underline{A}\ (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}\ \underline{B} + \underline{A}\ \underline{C}$

3. $(\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C} \ldots \underline{M}\ \underline{N})^T = \underline{N}^T \underline{M}^T \ldots \underline{C}^T \underline{B}^T \underline{A}^T$

4.

$$\underbrace{\underline{A}+\underline{A}+\ldots+\underline{A}}_{\text{k defa}} = k\,\underline{A} = \begin{bmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\ldots&ka_{1m}\\ka_{21}&ka_{22}&\ldots&ka_{2m}\\.&.&\ldots&.\\ka_{n1}&ka_{n2}&\ldots&ka_{nm}\end{bmatrix}$$

Matrisin k defa toplanması matrisin elemanlarının k tam sayı sabiti ile çarpımıdır.
Genelleştirme: Matrisi bir sabit(gerçek veya tam sayı) ile çarpmak için tüm elemanları o sabit ile çarpılır.

5. $\underbrace{\underline{A}\ \underline{A} \ldots \underline{A}}_{\text{k defa}} = \underline{A}^k$

$\underline{A}^k$ ifadesi, A kare matrisinin kendisiyle k defa çarpımı anlamındadır(k pozitif tamsayı):
$\underline{A}^0=\underline{I}$, $\underline{A}^2 = \underline{A}\ \underline{A}$, $\underline{A}^3 = \underline{A}\ \underline{A}\ \underline{A}$, …

6. $\underline{A}\ \underline{B} \neq \underline{B}\ \underline{A}$

Çarpımda matrislerin yeri değiştirilemez. Aritmetikte ab=ba dır, fakat matrislerde, çok özel durumlar hariç, matrisin çarpımdaki yeri **kesinlikle** değiştirilemez. Değiştirilirse, uygunluk koşulu sağlanmayabilir, sağlansa bile sonuç farklı olur.

Örnekler:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\3&1&2\end{bmatrix}\ \underline{B}=\begin{bmatrix}1&4\\-2&0\\1&3\end{bmatrix}\ \underline{C}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&3\end{bmatrix}\ \underline{D}=\begin{bmatrix}2&0\\-1&5\end{bmatrix}\ \underline{E}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&5\end{bmatrix}\ \underline{F}=\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$\underline{AB}=\begin{bmatrix}4&8\\3&18\end{bmatrix}\qquad \underline{BA}=\begin{bmatrix}14&3&8\\-4&2&0\\11&2&6\end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi, $\underline{A}\ \underline{B} \neq \underline{B}\ \underline{A}$ dır. Sonuç matrislerin hem boyutları hem de elemanları farklıdır!

$$\underline{CD}=\begin{bmatrix}4&-10\\-7&15\end{bmatrix}\qquad \underline{DC}=\begin{bmatrix}2&-4\\-11&17\end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi, boyutlar aynı olsa bile, $\underline{C}\ \underline{D} \neq \underline{D}\ \underline{C}$ dır!

$$\underline{CE}=\begin{bmatrix}4 & -11\\ -7 & 17\end{bmatrix} \quad \underline{EC}=\begin{bmatrix}4 & -7\\ -11 & 17\end{bmatrix} \quad \underline{AF}=\begin{bmatrix}-5\\ 1\end{bmatrix} \quad \underline{FA}=?$$

A F tanımlı, F A tanımsız!

Matrisler simetrik olsa dahi C E ≠ E C dır!

7. aynı boyutlu iki köşegen matrisin çarpımda yerleri değiştirilebilir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix} \quad \underline{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & b_{nn}\end{bmatrix} \quad \underline{AB}=\underline{BA}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn}b_{nn}\end{bmatrix}$$

8. Birim matris ile çarpım

$$\underline{I}_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} \quad \underline{I}_2=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix} \quad \underline{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 6\\ -2 & 7 & 4\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \underline{B}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$\underline{I}_1\ \underline{A}=\underline{A}\ \underline{I}_1=\underline{A}$
$\underline{I}_1\ \underline{B}=\ \underline{B}$
$\underline{B}\ \underline{I}_1=$ **tanımsız!**
$\underline{B}\ \underline{I}_2=\underline{B}$
$\underline{I}_2\ \underline{B}=$ **tanımsız!**

9. İki üçgen matrisin çarpımı

İki alt üçgenin çarpımı bir alt üçgendir.

İki üst üçgenin çarpımı bir üst üçgendir.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -1\\ 4 & 6 & -4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 2 & -1\\ -8 & 5 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Bir alt ve bir üst üçgenin çarpımı dolu bir matristir.

Bir üst ve bir alt üçgenin çarpımı dolu bir matristir.

10. İki vektörün çarpımı

$$\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ -1 & -2 & -3\\ -2 & -4 & -6\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -2\end{bmatrix}=-6$$

Kolon vektörü ile satır vektörünün çarpımı bir matristir.

Satır vektörü ile kolon vektörünün çarpımı bir sayıdır.

Genelleştirme:

$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}, \quad \underline{y}=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \dots & y_n\end{bmatrix}$ için

$$\underline{x}^T\ \underline{x}=\begin{bmatrix}x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n\\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n\\ . & . & . & .\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n\end{bmatrix}, \quad \underline{y}^T\ \underline{y}=\begin{bmatrix}y_1y_1 & y_1y_2 & \dots & y_1y_n\\ y_2y_1 & y_2y_2 & \dots & y_2y_n\\ . & . & . & .\\ y_ny_1 & y_ny_2 & \dots & y_ny_n\end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^T\ \underline{y}=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n\\ . & . & . & .\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n\end{bmatrix}, \quad \underline{y}^T\ \underline{x}=\begin{bmatrix}y_1x_1 & y_1x_2 & \dots & y_1x_n\\ y_2x_1 & y_2x_2 & \dots & y_2x_n\\ . & . & . & .\\ y_nx_1 & y_nx_2 & \dots & y_nx_n\end{bmatrix}$$

$\underline{x}\,\underline{x}$ tanımsız!

$\underline{y}\,\underline{y}$ tanımsız!

$\underline{x}\,\underline{y}$ tanımsız!

$\underline{y}\,\underline{x}$ tanımsız!

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix},\ \underline{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \rightarrow \quad \begin{aligned} &\underline{x}^T\,\underline{x}=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \\ &\underline{y}^T\,\underline{y}=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 \\ &\underline{x}^T\,\underline{y}=\underline{y}^T\,\underline{x}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \end{aligned}$$

$\underline{x}\,\underline{x}$ tanımsız!
$\underline{y}\,\underline{y}$ tanımsız!
$\underline{x}\,\underline{y}$ tanımsız!
$\underline{y}\,\underline{x}$ tanımsız!

11. Köşegen matrisin bir matris ile çarpımı

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ldots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} & \ldots & d_{11}a_{1m} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} & \ldots & d_{22}a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ d_{nn}a_{n1} & d_{nn}a_{n2} & \ldots & d_{nn}a_{nm} \end{bmatrix}$$

Çok az çarpım gerektirir, sıfır sayıları ile çarpım yapılmaz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ldots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{22}a_{12} & \ldots & d_{nn}a_{1m} \\ d_{11}a_{21} & d_{22}a_{22} & \ldots & d_{nn}a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ d_{11}a_{n1} & d_{22}a_{n2} & \ldots & d_{nn}a_{nm} \end{bmatrix}$$

12. İki simetrik matrisin çarpımı **simetrik değildir.**

$$\underline{A}=\underline{A}^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Simetrik

$$\underline{B}=\underline{B}^T=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB}=\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 10 & 23 \end{bmatrix}$$

Simetrik değil!

13. Matrisin izi: $\underline{A}_{nxn}$ kare matrisinin köşegen elemanlarının toplamına matrisin izi denir, iz $\underline{A}$ ile gösterilir: iz $\underline{A}=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$. $\underline{A}_{nxm}\,\underline{B}_{mxn} \neq \underline{B}_{mxn}\,\underline{A}_{nxm}$ olmasına rağmen her iki çarpımın izi aynıdır:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \underline{AB}=\begin{bmatrix} -8 & 15 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} \quad \underline{BA}=\begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ -7 & 19 & 13 \\ 8 & -5 & -13 \end{bmatrix}$$

iz $\underline{A}\,\underline{B}$=-8+14=6, iz $\underline{B}\,\underline{A}$ =0+19-13=6

14. $\underline{A}\,\underline{B} \neq \underline{B}\,\underline{A}$ olmasına rağmen, aşağıdaki bağıntı geçerlidir ($\underline{A}$ ve $\underline{B}$ kare matris):

det ($\underline{A}\,\underline{B}$)=det ($\underline{B}\,\underline{A}$)=det $\underline{A}$ det $\underline{B}$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{B}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{AB}=\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \quad \underline{BA}=\begin{bmatrix} -8 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

det ($\underline{A}\,\underline{B}$)=-8·7-1·9=-65, det $\underline{B}\,\underline{A}$=-8·7-1·9=-65, det $\underline{A}$=2·3-1·1=5, det $\underline{B}$=-3·3-2·2=-13

det ($\underline{A}\,\underline{B}$)= det ($\underline{B}\,\underline{A}$) = det $\underline{A}$ det $\underline{B}$=-5·13=-65

15. det (A ± B) ≠ det A ± det B dir. Bir üstteki matrislerden:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad \underline{A}+\underline{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}$$

det (A+B)=-1·6-1·1=-7 ≠ det A + det B=2·3-(-1)(-1)+(-3)·3-2·2=-8

16. Sıfırdan farklı A ≠ 0 ve B ≠ 0 gibi iki matrisin çarpımı sıfır matris olabilir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 3 & -5\end{bmatrix}\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$ matrisleri için $$\underline{AB}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\underline{0}$$ dır.

Fakat, ne A nede B sıfırdır?

A B=0
A B=A C

A (B+C)=0
A (B-C)=A (D+E)

Bu özellik nedeniyle soldaki ifadelerde A matrisi, özel durumlar dışında, **kısaltılamaz.**

Özel durumlar: det A≠0 ise veya A matrisinin kolonları doğrusal bağımsız ise kısaltma yapılabilir. Ters matris hesabı sonrası bu konuya dönülecektir.

17. i. satırı j. satırı ile değiştirilmiş birim matris bir A matrisi ile soldan çarpılırsa A nın i. satırı ile j. satırı yer değiştirir, sağdan çarpılırsa i. Kolonu ile j. Kolonu yer değiştirir.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2. satırı ile 3. satırı değiştirilmiş birim matrisin soldan çarpıldığı matrisin de aynı nolu satırları yer değiştirmiş.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

2. satırı ile 3. satırı değiştirilmiş birim matrisin sağdan çarpıldığı matrisin de aynı nolu kolonları yer değiştirmiş.

18. Bölünmüş matrislerin çarpımı

Büyük matrislerin çarpımı için matrisler bölünmek zorunda kalınabilir. A ve B matrisleri çarpılarak C=A B hesaplanacaksa, A ve B düşey ve yatay doğrularla alt matrislere bölünür:

- A nın satırdaki alt matris sayısı B nin kolondaki alt matris sayısına eşit olmalı (uygunluk koşulu).
- A nın alt matrisleri ile B nin alt matrisleri uygunluk koşulunu sağlamalı.

$$\underline{A}=\left[\begin{array}{c|cc|cc}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{13}\\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & \underline{a}_{23}\end{bmatrix}$$

a11 a12 a13 a21 a22 a23

$$\underline{B}=\left[\begin{array}{cc|cc}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\\ \hline b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\underline{b}_{11} & \underline{b}_{12}\\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22}\\ \underline{b}_{31} & \underline{b}_{32}\end{bmatrix}$$

Matrisler amaca uygun ve çarpım uygunluk koşulunu sağlayacak şekilde alt matrislere bölünür.

$$\text{B}=\begin{bmatrix}\underline{b}_{11} & \underline{b}_{12}\\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22}\\ \underline{b}_{31} & \underline{b}_{32}\end{bmatrix}$$

$$\text{A}=\begin{bmatrix}\underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{13}\\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & \underline{a}_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{c}_{11} & \underline{c}_{12}\\ \underline{c}_{21} & \underline{c}_{22}\end{bmatrix}=\underline{A}\,\underline{B}=\underline{C}$$

Bolünmüş matrislerin alt matrisleri çarpılarak sonuç matrisin alt matrisleri hesaplanır

$\underline{c}_{11}=\underline{a}_{11}\underline{b}_{11}+\underline{a}_{12}\underline{b}_{21}+\underline{a}_{13}\underline{b}_{31}$
$\underline{c}_{12}=\underline{a}_{11}\underline{b}_{12}+\underline{a}_{12}\underline{b}_{22}+\underline{a}_{13}\underline{b}_{32}$
$\underline{c}_{21}=\underline{a}_{21}\underline{b}_{11}+\underline{a}_{22}\underline{b}_{21}+\underline{a}_{23}\underline{b}_{31}$
$\underline{c}_{22}=\underline{a}_{21}\underline{b}_{12}+\underline{a}_{22}\underline{b}_{22}+\underline{a}_{23}\underline{b}_{32}$

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ -5 & 2 & 4\\ -2 & -6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{a}_{11} & \underline{a}_{12}\\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22}\end{bmatrix} \qquad \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{b}_{11}\\ \underline{b}_{21}\end{bmatrix}$$

$$\underline{B}=\begin{bmatrix}\underline{b}_{11}\\ \underline{b}_{21}\end{bmatrix} \qquad \underline{A}=\begin{bmatrix}\underline{a}_{11} & \underline{a}_{12}\\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{c}_{11}\\ \underline{c}_{21}\end{bmatrix}=\underline{A}\,\underline{B}=\underline{C}$$

$\underline{c}_{11}=\underline{a}_{11}\underline{b}_{11}+\underline{a}_{12}\underline{b}_{21}$
$\underline{c}_{21}=\underline{a}_{21}\underline{b}_{11}+\underline{a}_{22}\underline{b}_{21}$

Alt matrislerin çarpımı:

$$\underline{a}_{11}\underline{b}_{11}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -11 & -2\end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{12}\underline{b}_{21}=\begin{bmatrix}-1\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 8 & 4\end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{11}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -11 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 8 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{21}\underline{b}_{11}=\begin{bmatrix}-2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -28\end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{22}\underline{b}_{21}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_{21}=\begin{bmatrix}16 & -28\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & -25\end{bmatrix}$$

$$\underline{C}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -3 & 2\\ 22 & -25\end{bmatrix}$$

19. Diyagonal elemanları alt matris olan iki matrisin çarpılmasıyla bulunan yeni matrisin de diyagonal elemanları alt matris olur.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\underline{a}_{11} & \underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{a}_{22} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{a}_{33}\end{bmatrix},\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}\underline{b}_{11} & \underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{b}_{22} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{b}_{33}\end{bmatrix},\quad \underline{AB}=\begin{bmatrix}\underline{a}_{11}\underline{b}_{11} & \underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{a}_{22}\underline{b}_{22} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{a}_{33}\underline{b}_{33}\end{bmatrix}$$

Örnek:

$$\underline{A}=\left[\begin{array}{cc|ccc|cc}1 & 2 & & \underline{0} & & \underline{0} & \\ 2 & -4 & & & & & \\ \hline & & 1 & 2 & -1 & & \\ \underline{0} & & -1 & 1 & 2 & \underline{0} & \\ & & -1 & 2 & 3 & & \\ \hline & & & & & 2 & 3\\ \underline{0} & & & \underline{0} & & 4 & 2\\ & & & & & 3 & 3\end{array}\right],\quad \underline{B}=\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1 & 3 & & \underline{0} & & \underline{0}\\ -1 & -2 & & & & \\ \hline & & 3 & -1 & -1 & \\ \underline{0} & & 1 & 1 & 2 & \underline{0}\\ & & 2 & -2 & -3 & \\ \hline & & & & & 2\\ \underline{0} & & & \underline{0} & & 1\end{array}\right],\quad \underline{AB}=\left[\begin{array}{cc|ccc|c}-1 & -1 & & \underline{0} & & \underline{0}\\ 6 & 14 & & & & \\ \hline & & 3 & 3 & 6 & \\ \underline{0} & & 2 & -2 & -3 & \underline{0}\\ & & 5 & -3 & -4 & \\ \hline & & & & & 7\\ \underline{0} & & & \underline{0} & & 10\\ & & & & & 9\end{array}\right]$$

Ters matris

Ters matris kavramı aritmetikteki bölme işleminin karşılığıdır. Ancak, matris işlemlerinde **hiçbir zaman** bölme işleminden bahsedilmez. Aritmetikte bir a≠0 gerçek sayısının tersi $a\frac{1}{a}=aa^{-1}=1$ ile tanımlanır. $aa^{-1}=1$ ifadesinin matris işlemlerinde karşılığı

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1}=\underline{I} \qquad (2.11)$$

şeklindedir. Burada $\underline{A}^{-1}$ matrisi $\underline{A}$ matrisinin tersi, $\underline{I}$ birim matristir. Matris kendine ait ters matrisi ile çarpıldığında birim matris bulunur. Bilindiği gibi bir sayının tersinin olması için o sayı sıfırdan farklı olmalıdır. Benzer şekilde, bir matrisin tersinin olması için o matrisin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır. Bu nedenle ters matris sadece determinantı sıfırdan farklı (düzenli) kare matrisler için tanımlıdır.

Verilmiş bir $\underline{A}_{nxn}$ matrisinin tersinin hesabı için farklı yöntemler vardır. Burada 2x2 boyutlu matris için basit bir formül ve ve nxn matris için adjoint(ek) matris yöntemi açıklanacaktır. Bu yöntemin sadece teorik önemi vardır, bilgisayar programları için hiç uygun değildir(uygulamada kullanılan yöntemler için bak: Bölüm 8).

2x2 boyutlu matrisin tersi için formül:

1. A nın ana diyagonal elemanlarının yerini değiştir.
2. Tali diyagonalin işaretlerini değiştir.
3. Det A yı hesapla
4. Her elemanı det A ya böl.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \underline{A}^{-1}=\frac{1}{\det\ \underline{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \qquad \det\ \underline{A}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0 \tag{2.12}$$

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \underline{A}^{-1}=\frac{1}{2\cdot(-7)-4(-3)}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.5 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Adjoint matris yöntemi: Bu yönteme göre $\underline{A}_{nxn}$ matrisinin tersi

$$\underline{A}^{-1}=\frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det \underline{A}}, \qquad \det \underline{A}\neq 0 \tag{2.13}$$

formülü ile hesaplanır. Kofaktör ve Adjoint matrisin tanımı sayfa 19 da verilmişti.

Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{A}^{-1}=?$$

SARRUS kuralına göre, det $\underline{A}$= 1·0·1+1·1·(-1)+1·2·(-3)-(-3)·0·(-1)-1·1·1-1·2·1=-10, det $\underline{A}\neq 0$ olduğundan matrisin tersi vardır.

Kofaktörler matrisi

$$\underline{K}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -7 & -2 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad Adj\ \underline{A}=\underline{K}^T=\begin{bmatrix} -2 & -7 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Ters matris $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & -7 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & -0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ -0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$

$\underline{A}\ \underline{A}^{-1}=\underline{A}^{-1}\underline{A}=\underline{I}$ olduğu kontrol edilebilir.

Ters matrisin özellikleri

1. $\underline{A}\ \underline{A}^{-1}=\underline{A}^{-1}\underline{A}=\underline{I}$
2. $(\underline{A}^{-1})^{-1}=\underline{A}$
3. $(\underline{A}^{T})^{-1}=(\underline{A}^{-1})^{T}$ (Not: $(\underline{A}^{-1})^{T}$ ifadesi bazen basitçe $\underline{A}^{-T}$ şeklinde de yazılır)
4. $\underline{A}=\underline{A}^T$ ise $(\underline{A}^{-1})^T=\underline{A}^{-1}$ dir.
5. $(\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C} \ldots \underline{M}\ \underline{N})^{-1}=\underline{N}^{-1}\underline{M}^{-1} \ldots \underline{C}^{-1}\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
6. $(\text{k}\underline{A})^{-1}=\frac{1}{\text{k}}\underline{A}^{-1}$ (k≠0 olmak üzere herhangi bir sabit sayı)
7. $\det \underline{A}^{-1}=\frac{1}{\det \underline{A}}$

8. 2x2 matris için formül:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \underline{A}^{-1}=\frac{1}{\det \underline{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \qquad \det \underline{A}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0 \text{ olmalı!}$$

9. Köşegen matrisin tersi:

$$\underline{D}_{nxn} = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{D}^{-1}_{nxn} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & & & \\ & \frac{1}{d_{22}} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

$d_{ii} \neq 0$ olmalı.

10. Köşegen elemanları kare alt matris olan köşegen matrisin tersi alt matrislerin tersi alınarak aynı köşegene yazılmasıyla hesaplanır:

$$\underline{A}_{nxn} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & & & \\ & \underline{a}_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & \underline{a}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{A}^{-1}_{nxn} = \begin{bmatrix} \underline{a}^{-1}_{11} & & & \\ & \underline{a}^{-1}_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & \underline{a}^{-1}_{nn} \end{bmatrix}$$

det $\underline{a}_{ii} \neq 0$ olmalı.

Örnek:

$\underline{a}_{11}$ $\underline{a}_{22}$

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} -2 & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & -3 & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 2 & 1 & & \\ \hline & & & & 4 & 3 \\ & & & & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\underline{a}_{33}$

$$\underline{a}^{-1}_{11} = [-0.5]$$

$$\underline{a}^{-1}_{22} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & -0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ -0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{-1}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} -0.5 & & & & & \\ \hline & 02 & 0.7 & -0.1 & & \\ & 0.2 & 0.2 & 0.4 & & \\ & -0.2 & 0.3 & 0.1 & & \\ \hline & & & & 1 & -3 \\ & & & & -1 & 4 \end{array}\right]$$

11. Alt üçgen matrisin tersi gene bir alt üçgen, üst üçgen matrisin tersi gene bir üst üçgendir. Örnek:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} -3 & & & \\ -1 & 4 & & \\ 2 & -2 & 6 & \\ 1 & -1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{L}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.333 & & & \\ -0.083 & 0.25 & & \\ 0.083 & 0.083 & 0.167 & \\ -0.021 & -0.021 & -0.104 & 0.125 \end{bmatrix}$$

Noktadan sonra sadece üç hane verilmiş, üçüncü hane yuvarlatılmıştır.

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 1 \\ & 4 & -2 & -1 \\ & & 6 & 5 \\ & & & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.333 & -0.083 & 0.083 & -0.021 \\ & 0.25 & 0.083 & -0.021 \\ & & 0.167 & -0.104 \\ & & & 0.125 \end{bmatrix}$$

12. Bant matrislerin tersi tamamen doludur. Örnek:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & & \\ & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 3 & \\ & & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ & & & & 2 & 0 & 3 & 3 \\ & & & & & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 217 & 172 & -611 & -127 & -176 & 102 & -362 & 455 \\ -432 & 296 & -136 & -25 & 0 & 37 & -25 & 37 \\ 484 & 76 & 561 & 332 & 529 & -233 & 38 & -292 \\ -134 & 48 & -86 & -229 & -353 & 168 & 300 & -126 \\ 54 & 13 & 68 & 28 & 176 & 46 & 264 & -307 \\ 109 & 26 & 135 & 57 & 353 & 92 & -473 & 386 \\ -115 & -68 & -182 & 20 & -412 & 264 & 138 & 87 \\ 78 & 59 & 137 & -39 & 294 & -294 & 20 & 118 \end{bmatrix}$$

13. Kısaltma: matris bağıntılarında kısaltma işlemi belli koşullar sağlanmadıkça yapılamaz!

- det $\underline{A} \neq 0$ ise, her iki taraf $\underline{A}^{-1}$ ile soldan çarpılır ve $\underline{A}^{-1}\,\underline{A} = \underline{I}$ olduğu hatırlanırsa, aşağıdaki ifadelerde $\underline{A}$ matrisi kısaltılabilir:

$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{0} \;\rightarrow\; \underline{A}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}^{-1}\,\underline{0} \;\rightarrow\; \underline{B} = \underline{0}$

$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{C} \;\rightarrow\; \underline{A}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{C} \;\rightarrow\; \underline{B} = \underline{C}$

$\underline{A}\,(\underline{B}+\underline{C}) = \underline{0} \;\rightarrow\; \underline{A}^{-1}\underline{A}\,(\underline{B}+\underline{C}) = \underline{A}^{-1}\underline{0} \;\rightarrow\; \underline{B}+\underline{C} = \underline{0}$

$\underline{A}\,(\underline{B}-\underline{C}) = \underline{A}\,(\underline{D}+\underline{E}) \;\rightarrow\; \underline{A}^{-1}\,\underline{A}\,(\underline{B}-\underline{C}) = \underline{A}^{-1}\underline{A}\,(\underline{D}+\underline{E}) \;\rightarrow\; \underline{B}-\underline{C} = \underline{D}+\underline{E}$

- $\underline{A}_{nxm}$ dikdörtgen matrisinin kolonları doğrusal bağımsız ise, yani rank=m ise, $\underline{F}=\underline{A}^T_{nxm}\,\underline{A}_{nxm}$ matrisi mxm boyutlu düzenli bir matris olur, yani $\underline{F}^{-1}=(\underline{A}^T_{nxm}\,\underline{A}_{nxm})^{-1}$ tanımlıdır, det $\underline{F}\neq 0$ dır. Bu nedenle aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\underline{A}_{nxm}\,\underline{B}_{mxs}=\underline{0} \;\rightarrow\; \underbrace{(\underline{A}_{nxm})^T\,\underline{A}_{nxm}}_{\text{F matrisi, det F} \neq 0,\ \text{F}^{-1}\text{ var. Dolayısıyla bu matris kısaltılabilir.}}\underline{B}_{mxs}=\underbrace{(\underline{A}_{nxm})^T\,\underline{0}}_{\text{Sıfır matris}} \;\rightarrow\; \underline{B}_{mxs}=\underline{0}$$

$$\underline{A}_{nxm}(\underline{B}_{mxs}-\underline{C}_{mxs})=(\underline{D}_{nxs}+\underline{E}_{nxs})\rightarrow\overbrace{(\underline{A}_{nxm})^T\underline{A}_{nxm}}^{\text{F matrisi, det F} \neq 0,\ \text{F}^{-1}\text{ var. Dolayısıyla bu matris kısaltılabilir.}}(\underline{B}_{mxs}-\underline{C}_{mxs})=(\underline{A}_{nxm})^T(\underline{D}_{nxs}+\underline{E}_{nxs})\rightarrow\underline{B}_{mxs}-\underline{C}_{mxs}=\overbrace{(\underline{A}_{nxm})^T(\underline{D}_{nxs}+\underline{E}_{nxs})}^{\text{Sonuç mxs boyutlu bir matris olur}}$$

- det $\underline{A}$ =0 durumunda $\underline{A}\,\underline{B}=\underline{A}\,\underline{C}$ ifadesinde A kısaltılamaz:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & -3 & 2\end{bmatrix},\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -6 & 5 & -9\\ -3 & 6 & -5\end{bmatrix},\quad \underline{C}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 6\\ 2 & -3 & 7\\ 4 & -1 & 9\end{bmatrix} \text{ matrisleri için } \underline{A}\underline{B}=\underline{A}\underline{C}=\begin{bmatrix}7 & 6 & 10\\ 3 & 5 & 7\\ 17 & 17 & 27\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Burada $\underline{A}$ kısaltılarak $\underline{B}=\underline{C}$ dir denilemez, neden? Çünkü açıkça görüldüğü gibi $\underline{B}\neq\underline{C}$ dir. det $\underline{A}=\underline{0}$ dır, yani $\underline{A}^{-1}$ yoktur. $\underline{A}$ yı kısaltmamız sıfıra bölme yaptığımız anlamına gelir.

- $\underline{A}\,\underline{B}=\underline{C}\,\underline{A}$ ifadesinde, det $\underline{A}\neq 0$ olsa dahi, $\underline{A}$ kısaltılamaz, çünkü:

  $\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{B}=\underline{A}^{-1}\,\underline{C}\,\underline{A} \rightarrow \underline{B}=\underline{A}^{-1}\,\underline{C}\,\underline{A}$ veya $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{A}^{-1}=\underline{C}\,\underline{A}^{-1} \rightarrow \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{A}^{-1}=\underline{C}$ dir

- $\underline{A}\,\underline{B}=\underline{C}\,\underline{A}\,\underline{D}$ ifadesinde, det $\underline{A}\neq 0$ olsa dahi, $\underline{A}$ kısaltılamaz, çünkü:

  $\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{B}=\underline{A}^{-1}\underline{C}\,\underline{A}\,\underline{D} \rightarrow \underline{B}=\underline{A}^{-1}\underline{C}\,\underline{A}\,\underline{D}$ dir

- $\underline{A}$ kare matris ve $\underline{r}$, $\underline{s}$ kolon matrisleri olsun:

$$a=\frac{\underline{r}^T\,\underline{r}}{\underline{r}^T\,\underline{A}\underline{r}}$$

Burada $\underline{r}$ vektörlerinden hiç biri kısaltılamaz! a sabit bir sayıdır.

$$a=\frac{\underline{r}^T\,\underline{A}\underline{s}}{\underline{s}^T\,\underline{A}\underline{s}}$$

Burada ne $\underline{s}$ ne de $\underline{A}\,\underline{s}$ kısaltılabilir! a sabit bir sayıdır.

$$\underline{a}=\frac{\underline{r}\,\underline{r}^T}{\underline{r}^T\,\underline{r}}$$

Burada $\underline{r}$ vektörlerinden hiç biri kısaltılamaz! $\underline{a}$ bir matristir.

- Matris eşitliğinde, yukarıda açıklanan koşullar sağlanmadıkça, keyfi kısaltma yapılamayacağı gibi eşitliğin solu ve sağı keyfi bir matris ile de çarpılamaz. Aksi halde eşitlik bozulur. Eşitliğin her iki tarafı sadece ve sadece çarpıldıktan sonra, gerekirse, kısaltılabilen bir matris ile çarpılabilir. Örneğin, determinantı sıfırdan farklı herhangi bir matris ile veya kolonları doğrusal bağımsız bir matris ile çarpılabilir.

Ortogonal matris

1) $\underline{A}_{nxn}$ kare matrisi kendi transpozu ile soldan veya sağdan çarpıldığında birim matris oluşuyorsa $\underline{A}_{nxn}$ ortogonaldır denir:
$\underline{A}^T_{nxn}\underline{A}_{nxn}=\underline{A}_{nxn}\underline{A}^T_{nxn}=\underline{I}$. Ters matris tanımı $\underline{A}\underline{A}^{-1}=\underline{A}^{-1}\underline{A}=\underline{I}$ ile karşılaştırılırsa $\underline{A}$ ortogonal[1] matrisinin transpozunun aynı zamanda $\underline{A}$ nın tersi olduğu anlaşılır: $\underline{A}^{-1}=\underline{A}^T_{nxn}$. Örnek :

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}Cos\alpha & Sin\alpha & 0\\ -Sin\alpha & Cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow \underline{A}^T\underline{A}=\begin{bmatrix}Cos\alpha & -Sin\alpha & 0\\ Sin\alpha & Cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Cos\alpha & Sin\alpha & 0\\ -Sin\alpha & Cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\rightarrow \underline{A}^T=\underline{A}^{-1}=\begin{bmatrix}Cos\alpha & -Sin\alpha & 0\\ Sin\alpha & Cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2) $\underline{A}_{nxm}$ dikdörtgen matrisi kendi transpozu ile soldan çarpıldığında birim matris oluşuyorsa $\underline{A}_{nxm}$ ortogonaldır denir: $\underline{A}^T_{nxm}\underline{A}_{nxm}=\underline{I}$. Örnek:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}Cos\alpha & 0\\ Sin\alpha & 0\\ 0 & Cos\alpha\\ 0 & Sin\alpha\end{bmatrix}\rightarrow \underline{A}^T\underline{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\underline{I},\quad \underline{A}\underline{A}^T=\begin{bmatrix}Cos\alpha & 0\\ Sin\alpha & 0\\ 0 & Cos\alpha\\ 0 & Sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Cos\alpha & Sin\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & Cos\alpha & Sin\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Cos^2\alpha & Sin\alpha Cos\alpha & 0 & 0\\ Sin\alpha Cos\alpha & Sin^2\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & Cos^2\alpha & Sin\alpha Cos\alpha\\ 0 & 0 & Sin\alpha Cos\alpha & Sin^2\alpha\end{bmatrix}\neq \underline{I}$$

Dikkat: $\underline{A}_{nxm}$ dikdörtgen ortogonal matrisinin tersi tanımlı olmadığı gibi $\underline{A}^T_{nxm}\underline{A}_{nxm}\neq\underline{A}_{nxm}\underline{A}^T_{nxm}$ **dir.**

Matrislerin analitik türev ve integrali

Nümerik analizde, nadiren de olsa, analitik türev ve integral almak gerekir. Özet bilgiler aşağıda verilmiştir.

Analitik türev

Elemanları bir x değişkeninin fonksiyonu olan matrisin x e göre türevi her elemanın türevi alınarak bulunur:

$$\underline{A}=[a_1\quad a_2\quad \dots\quad a_n]\rightarrow\frac{d\underline{A}}{dx}=\frac{d}{dx}[a_1\quad a_2\quad \dots\quad a_n]=\begin{bmatrix}\dfrac{da_1}{dx} & \dfrac{da_2}{dx} & \dots & \dfrac{da_n}{dx}\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ .\\ a_n\end{bmatrix}\rightarrow\frac{d\underline{A}}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ .\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{da_1}{dx}\\ \dfrac{da_2}{dx}\\ .\\ \dfrac{da_n}{dx}\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix}\rightarrow\frac{d\underline{A}}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{da_{11}}{dx} & \dfrac{da_{12}}{dx} & \dots & \dfrac{da_{1m}}{dx}\\ \dfrac{da_{21}}{dx} & \dfrac{da_{22}}{dx} & \dots & \dfrac{da_{2m}}{dx}\\ . & . & \dots & .\\ \dfrac{da_{n1}}{dx} & \dfrac{da_{n2}}{dx} & \dots & \dfrac{da_{nm}}{dx}\end{bmatrix}$$

[1] Bazı kaynaklar "ortogonal" yerine "ortonormal" olarak adlandırmaktadır, standart bir kavram yoktur.

Örnek: Aşağıdaki $\underline{A}$ matrisinde a ve b sabit gerçek sayılar, x değişkendir. $\underline{A}$ nın x e göre 1. ve 2. türevi?

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & Sin^2(x) & 2ax^3 \\ bLog(x) & 5x & e^{2x} \end{bmatrix} \to \frac{d\underline{A}}{dx}=\begin{bmatrix} 0 & Sin(2x) & 6ax^2 \\ \frac{b}{x} & 5 & 2e^{2x} \end{bmatrix}, \quad \frac{d^2\underline{A}}{dx^2}=\begin{bmatrix} 0 & 2Cos(2x) & 12ax \\ -\frac{b}{x^2} & 0 & 4e^{2x} \end{bmatrix}$$

Örnek: Aşağıdaki $\underline{A}$ matrisinde a ve b sabit sayılar, x ve y değişkendir. $\underline{A}$ nın x e ve y ye göre 1. türevi?

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & ySin^2(x) & 2ayx^3 \\ by^2Log(x) & 5xy & ye^{2x} \end{bmatrix} \to \frac{\partial\underline{A}}{dx}=\begin{bmatrix} 0 & y\,Sin(2x) & 6ayx^2 \\ \frac{by}{x} & 5y & 2ye^{2x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\underline{A}}{dy}=\begin{bmatrix} 0 & Sin^2(x) & 6ax^2 \\ 2byLog(x) & 5x & e^{2x} \end{bmatrix}$$

c bir sabit, $\underline{A}$ ve $\underline{B}$ matrislerinin terimleri x in fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\frac{d}{dx}(c\underline{A})=c\frac{d\underline{A}}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\underline{A}+\underline{B})=\frac{d\underline{A}}{dx}+\frac{d\underline{B}}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\underline{A}\underline{B})=\frac{d\underline{A}}{dx}\underline{B}+\frac{d\underline{B}}{dx}\underline{A}$$

Türev vektörü:

x_1, x_2, …, x_n bilinmeyenlerinden oluşan kolon vektörü $\underline{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ olsun. $\underline{x}$ vektörünün $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ kısmi türev operatörlerinin vektörüne türev vektörü veya türev operatörü veya diferansiyel operatör denir:

$$\frac{\partial}{\partial\underline{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Türev operatörü

Vektörün vektöre göre türevi

a) $\underline{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ kolon vektörü ve elamanları x_1,…, x_n bilinmeyenlerinin fonksiyonu olan $\underline{y}=[y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]^T$ kolon vektörü verilmiş olsun. $\underline{y}$ vektörünün $\underline{x}$ vektörüne göre türevini almak isteyelim:

1) $$\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\underline{y}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}$$ türevi yoktur, çünkü bu iki vektörün matris çarpımı tanımsızdır!

2) $$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{y}^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \dots & y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \cdot\\ y_m\end{bmatrix}$$

Bu matrise Jacobian denir ve genellikle $\underline{J}$ ile gösterilir.

Diferansiyel operatör matrisi

Örnek:

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_1\end{bmatrix},\quad \underline{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1x_2^2\\ x_1Sin(x_2)\\ e^{x_1}+x_2\\ 5\end{bmatrix},$$ $\underline{y}$ nin $\underline{x}$ vektörüne göre türevi?

1) $$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{y}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3x_1x_2^2\\ x_1Sin(x_2)\\ e^{x_1}+x_2\\ 5\end{bmatrix}$$ tanımsız!

Jacobian

2) $$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{y}^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3x_1x_2^2 & x_1Sin(x_2) & e^{2x_1}+x_2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_2^2 & Sin(x_2) & 2e^{2x_1} & 0\\ 6x_1x_2 & x_1Cos(x_2) & 1 & 0\end{bmatrix}$$

b) $\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}^T$ kolon vektörünün $x_1,\dots, x_n$ bilinmeyenlerine göre türevi:

1) $$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}$$ tanımsızdır!

Jacobian=birim matris

2) $$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_n} & \frac{\partial x_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

c) Birbirinin fonksiyonu olmayan $\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}^T$ ve $\underline{y}=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \dots & y_m\end{bmatrix}^T$ kolon vektörleri verilmiş olsun:

1) $$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{y}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \cdot\\ y_m\end{bmatrix}$$ tanımsızdır!

2) $$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{y}^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\underline{0}$$

Jacobian=sıfır matris. Çünkü $\underline{y}$ nin elemanları $\underline{x}$ in elemanlarından bağımsızdır.

3) Benzer şekilde:

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{y}}$ tanımsız!

$$\frac{\partial \underline{x}^T}{\partial \underline{y}}=\underline{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{y}=\frac{\partial \underline{x}^T}{\partial \underline{x}}\underline{y}+\frac{\partial \underline{y}^T}{\partial \underline{x}}\underline{x}=\underline{y}$$

=$\underline{0}$ (sıfır matris)

=$\underline{I}$ (birim matris)

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{y}^T\underline{x}=\frac{\partial \underline{y}^T}{\partial \underline{x}}\underline{x}+\frac{\partial \underline{x}^T}{\partial \underline{x}}\underline{y}=\underline{y}$$

=$\underline{0}$ (sıfır matris)

=$\underline{I}$ (birim matris)

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{x}=2\underline{x}$$

d) Sıkça karşılaşılabilecek matris türev formülleri aşağıda verilmiştir. $\underline{x}$ ve $\underline{y}$ kolon vektörü, $\underline{A}$ sabit gerçek sayılar içeren bir matristir. $\underline{x}$ ve $\underline{y}$ birbirinden bağımsızdır. Matris çarpımlarının tanımlı olduğu varsayılmıştır:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T=\underline{I}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{y}}\underline{x}^T=\underline{0}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{x}=2\underline{x}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{y}=\underline{y}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{y}}\underline{y}^T\underline{x}=\underline{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{A}\underline{x}=\underline{A}^T\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{A}=\underline{A}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{A}^T=\underline{A}^T$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{A}\underline{x}=\underline{A}\underline{x}+\underline{A}^T\underline{x}\\ &\frac{\partial^2}{\partial \underline{x}^2}\underline{x}^T\underline{A}\underline{x}=\underline{A}+\underline{A}^T\end{aligned}\right\}$$

$\underline{A}\neq \underline{A}^T$, yani $\underline{A}$ simetrik değildir!

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{A}\underline{x}=2\underline{A}\underline{x}\\ &\frac{\partial^2}{\partial \underline{x}^2}\underline{x}^T\underline{A}\underline{x}=2\underline{A}\end{aligned}\right\}$$

$\underline{A}=\underline{A}^T$, yani $\underline{A}$ simetriktir!

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{A}\underline{y}=\underline{A}\underline{y}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{y}^T\underline{A}\underline{x}=\underline{A}^T\underline{y}\qquad \frac{\partial}{\partial \underline{y}}\underline{x}^T\underline{A}\underline{y}=\underline{A}^T\underline{y}$$

Özel uygulama: Sonlu elemanlar metodunda bir sistemin toplam potansiyeli

$$\pi = \frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{A}\underline{x} - \underline{x}^T\underline{b}$$

ile verilir. Burada $\underline{x}$ yer değiştirme kolon vektörü, $\underline{b}$ dış yük kolon vektörü, $\underline{A} = \underline{A}^T$ sistem rijitlik matrisi, π toplam potansiyelidir. $\underline{A}$, $\underline{b}$ sabit sayılardan oluşur ve bilinir, $\underline{x}$ hesaplanmak istenir. Sistemin denge konumunda π minimumdur. π değeri $\underline{x}$ in fonksiyonudur. Sistemin denge konumunda $\frac{\partial \pi}{\partial \underline{x}} = 0$ olmalıdır:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{x}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{A}\underline{x} - \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\underline{x}^T\underline{b} = \frac{1}{2}2\underline{A}\underline{x} - \underline{b} = 0$$

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$$

bulunur. Bu bağıntı sistemin denge koşuludur ve doğrusal bir denklem sistemidir. Denklem sistemi çözülerek $\underline{x}$ bilinmeyen yer değiştirme vektörü hesaplanır.

Analitik integral

Bir matrisin tek veya çok katli integrali, her elemanın integrali alınarak bulunur, örnekler:

$$\underline{A} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \rightarrow \int \underline{A}dx = \int [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]dx = \left[\int a_1 dx \quad \int a_2 dx \quad \dots \quad \int a_n dx\right]$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{bmatrix} \rightarrow \int \underline{A}dx = \int \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int a_1 dx \\ \int a_{21} dx \\ . \\ \int a_n dx \end{bmatrix}, \qquad \iint \underline{A}\, dx\, dy = \iint \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{bmatrix} dx\, dy = \begin{bmatrix} \iint a_1 dxdy \\ \iint a_{21} dxdy \\ . \\ \iint a_n dxdy \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \rightarrow \int \underline{A}dx = \int \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int a_{11}dx & \int a_{12}dx & \dots & \int a_{1m}dx \\ \int a_{21}dx & \int a_{22}dx & \dots & \int a_{2m}dx \\ . & . & \dots & . \\ \int a_{n1}dx & \int a_{n2}dx & \dots & \int a_{nm}dx \end{bmatrix}$$

Özel uygulama: Sonlu elemanlar metodu iç kuvvetlerin işinin hesabında karşılaşılan bir integral:

$$w_i = \int \underline{x}^T \underline{A}\, dx = \frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{A}\underline{x}$$

Burada $\underline{A}$ simetriktir ve sabit terimli, yani $\underline{A}=\underline{A}^T$ dir.

Matris çarpımının integrali

$$\iiint \underline{A}^T\, \underline{B}\underline{A}\, dx\, dy\, dz$$

tipinde integraller ile teoride karşılaşılır. $\underline{A}$ nın elemanları x, y ve z nin fonksiyonu, $\underline{B}$ ise gerçek sayılardan oluşur. $\underline{A}^T\,\underline{B}\underline{A}$ matris çarpımı yapılmadan integral alınamaz. Önce, çarpım yapılarak, $\underline{D} = \underline{A}^T\,\underline{B}\underline{A}$ matrisi, sonra $\iiint \underline{D}\, dx\, dy\, dz$ integrali hesaplanır.

$\underline{D}$ matrisinin elemanları genelde çok karmaşık fonksiyonlar içerir, bu durumda analitik integrasyon yerine nümerik integrasyon metotları kullanılır.