



**ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ**

Mühendislik Mimarlık Fakültesi

İnşaat Mühendisliği Bölümü

E-Posta: [ogu.ahmet.topcu@gmail.com](mailto:ogu.ahmet.topcu@gmail.com)

Web: <http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu>

# Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz

Ders notları 2014

Ahmet TOPÇU

Computers are incredibly fast, accurate and stupid. Human beings are incredibly slow, inaccurate and brilliant. Together they are powerful beyond imagination.  
**Albert Einstein**

**Matrisler-Determinat-Denklem sistemleri-çözüm teknikleri**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

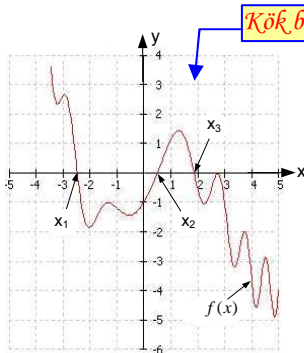
**Özdeğer problemi**

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

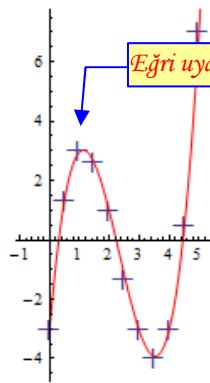
**Belirli integral**

$$I = \int_{xa}^{xb} \int_{ya(x)}^{yb(x)} f(x, y) dy dx$$

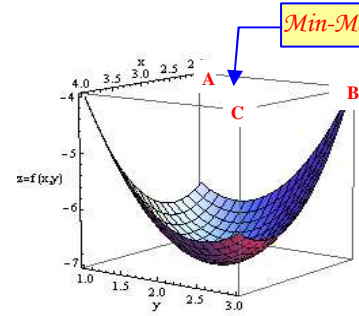
$$I = \int_{xa}^{xb} \int_{ya(x)}^{yb(x)} \int_{za(x,y)}^{zb(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



**Kök bulma**



**Eğri uydurma**



**Min-Max**

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \text{İlhan} \\ \text{Zeynep} \\ \text{Çağla} \\ \text{Şirin} \\ \text{Işık} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} \text{Çağla} \\ \text{Işık} \\ \text{İlhan} \\ \text{Şirin} \\ \text{Zeynep} \end{bmatrix}$$

**Sıralama-Arama**

```
DEFDBL A-N, O-Z
SUB matriscarp (n, m, L, a(), b(), c())
' C(n,L)=A(n,m)*B(m,L) hesaplanır
FOR i = 1 TO n
FOR j = 1 TO L
T = 0
FOR k = 1 TO m
T = T + a(i, k) * b(k, j)
NEXT k
c(i, j) = T
NEXT j
NEXT i
END SUB
```

**50 den fazla program kodu**

# İÇERİK

<b>1. Giriş: Matrisler, tanımlar</b>	<b>5</b>
Nümerik analiz nedir?	
Nümerik metotların dezavantajları	
Tarihçe	
Nümerik analizin temellerini atanlar	
Nümerik analiz yöntemlerinde adı sıkça geçenler	
Sonlu Elemanlar Metodunun ilkleri	
İnşaat mühendisliği yapı statik dersinin bilgisayar öncesi vazgeçilmez nümerik metotları	
Ders notunun kapsamı ve amacı	
Matrisler	
Matris notasyonu	
Matris tipleri	
Dikdörtgen matris	
Kare matris	
Satır matrisi veya satır vektörü	
Kolon matris veya kolon vektörü	
Diyagonal(köşegen) matris	
Alt üçgen matris	
Üst üçgen matris	
Bant matris	
Üçlü köşegen matris	
Seyrek matris	
Sıfır matris ve birim matris	
Bölünmüş matris ve alt matris	
Matris neden bölünür?	
Büyük matris nedir?	
Simetrik matris ve ters simetrik matris	
Simetrik bant matris	
Transpoz matris	
Bazı önemli özellikler	
Bölünmüş matrisin transpozu	
İki matrisin Eşitliği	
Simetrik pozitif tanımlı matris	
Diyagonal ağırlıklı(diagonal dominant) matris	
Matrislerin bilgisayar belleğinde depolanma biçimleri	
<b>2. Determinant ve matrislerle dört işlem</b>	<b>21</b>
Kare matrisin determinanı	
SARRUS kuralı	
CHIO metodu	
LAPLACE açılımı	
Determinant özellikleri	
Kofaktör matrisi ve adjoint matris	
Düzenli matris ve düzensiz matris tanımı	
Doğrusal bağımlılık ve rank tanımı	
Matrislerle dört işlem	
Toplama ve çıkarma	
Toplama ve çıkarma özellikleri	
Çarpma	
Matris çarpımının özellikleri	
Ters matris	
2x2 boyutlu matrisin tersi için formül	
Adjoint matris yöntemi	
Ters matrisin özellikleri	
Ortogonal matris	
Matrislerin analitik türev ve integrali	
<b>3. Çok bilinmeyenli doğrusal denklem sistemi türleri</b>	<b>42</b>
Denklemin bilinmeyen sayısına eşit olduğu sistem	
Denklemin bilinmeyen sayısından çok olduğu sistem	
Denklemin bilinmeyen sayısından az olduğu sistem	
Birden çok karşı taraflı sistem	
Karşı tarafı sıfır olan sistem(homojen denklem sistemi)	
Karşı tarafı bilinmeyen vektörünün sabit bir katı olan sistem(özdeğer problemi)	
Tek çözüm var, çözüm yok, sonsuz çözüm var ne demektir?	
Doğrusal denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri	
Direkt yöntemler	
İterasyon yöntemleri	

<b>4. Katsayılar matrisi üçgen olan denklem sisteminin çözümü</b>	<b>48</b>
Alt üçgen katsayılı sistem	
Üst üçgen katsayılı sistem	
<b>5. Basit GAUSS indirgeme metodu</b>	<b>51</b>
Pivot eleman seçimi ve satır değiştirme	
Nümerik hesaplarda hata kaynakları, hatanın ölçüsü	
Gerçek değerlerin bilinmediği fiziksel problemlerde hata kontrolü	
Yuvarlama hatasının nedeni nedir, nasıl azaltılabilir?	
Vektör ve matris normları, kondisyon sayısı matris kavramı	
Hasta matris(ill-conditioned matrix) ve hasta denklem sistemi	
<b>6. Çarpanlara ayırma yöntemleri: DOOLITTLE, CROUT ve CHOLESKY</b>	<b>64</b>
DOOLITTLE LU metodu	
CROUT LU metodu	
CHOLESKY $UU^T$ metodu	
Simetrik pozitif tanımlı matris nedir? Mekanik tanım	
Determinant hesabı	
$U^T D U$ veya $L^T D L$ çarpanlara ayırma yöntemi	
<b>7. İterasyon yöntemleri: JACOBI, GAUSS-SEIDEL, CG</b>	<b>84</b>
JACOBI metodu	
GAUSS-SEIDEL metodu	
CG (Conjugate Gradient) metodu	
İterasyon yöntemlerinin avantajları	
İterasyon yöntemlerinin dezavantajları	
Hangi çözüm yöntemi daha iyi?	
<b>8. Ters matris hesabı</b>	<b>93</b>
GAUSS-JORDAN tekniği ile ters matris hesabı	
Ters matris ile denklem sistemi çözümü	
<b>9. Dengeleme hesabı</b>	<b>98</b>
En küçük kareler metodu	
QR çarpanlara ayırma metodu	
<b>10. Genel doğrusal denklem sistemleri</b>	<b>107</b>
Homojen denklem sistemi	
Temel çözümlerin belirlenmesi	
Özel uygulama: İzostatik sistemin otomatik seçimi	
İnhomojen denklem sistemi	
Kare katsayılı homojen ve inhomojen denklem sistemi	
<b>11. Programlar: Basit matris işlemleri ve denklem sistemi çözümleri</b>	<b>120</b>
QBASIC deyimleri hakkında öz bilgiler	
Matris metodlarında gerekli işlem sayısı	
Test edilmiş programlar	
<b>12. Programlar: Basit matris işlemleri</b> , program kodları	<b>126</b>
<b>13. Direkt denklem sistemi çözümü</b> , basit GAUSS program kodu	<b>130</b>
<b>14. Direkt denklem sistemi çözümü</b> , CholeskyFull program kodu	<b>134</b>
<b>15. Direkt denklem sistemi çözümü</b> , CholeskyBant1 program kodu	<b>137</b>
<b>16. Direkt denklem sistemi çözümü</b> , CholeskyBant2 program kodu	<b>143</b>
<b>17. Direkt denklem sistemi çözümü</b> , CholeskySkyline program kodu	<b>147</b>
<b>18. Ters matris hesabı</b> , Gauss-Jordan tekniği, GaussJordan program kodu	<b>152</b>
<b>19. Simetrik ters matris hesabı</b> , GaussJorSim program kodu	<b>155</b>
<b>20. Denklem ve bilinmeyen sayısı farklı sistemler</b> , LeastSquares, QR ve BoBx	<b>158</b>
<b>21. İteratif denklem sistemi çözümü</b> , GaussSeidel program kodu	<b>171</b>
<b>22. İteratif denklem sistemi çözümü</b> , CG Conjugate Gradient program kodu	<b>174</b>
<b>23. İteratif denklem sistemi çözümü</b> , PCG Preconditioned Conjugate Gradient program kodu	<b>178</b>
<b>24. İteratif denklem sistemi çözümü</b> , PCGSparse program kodu	<b>182</b>
<b>25. Standart özdeğer problemi</b>	<b>188</b>
Özdeterminant ve özdenklemler	
Özdeğerler matrisi ve özvektörler matrisi	
Normalleştirilmiş özvektör	
Özdeğer ve özvektörlerin bazı önemli özellikleri	
Özdeğer problemi çözüm metodları	
<b>26. Genel Özdeğer Problemi, periyot ve mod hesabı</b>	<b>201</b>
Özdeğer, açısal frekans, periyot ve frekans arasındaki ilişki	
Genel özdeğer probleminin standart özdeğer problemine dönüştürülmesi	
Yapının titreşim modeli, örnekler	
<b>27. Programlar: Özdeğer problemi</b>	<b>219</b>
<b>28. Standart özdeğer ve özvektör hesabı</b> – PowerMises program kodu	<b>221</b>
<b>29. Standart özdeğer ve özvektör hesabı</b> – PowerTers program kodu	<b>224</b>
<b>30. Standart özdeğer ve özvektör hesabı</b> – Jacobi program kodu	<b>228</b>
<b>31. Standart özdeğer ve özvektör hesabı</b> – Eigen01 program kodu	<b>233</b>

<b>32. Standart özdeğer ve özvektör hesabı</b> – Eigen02 program kodu	<b>236</b>
<b>33. Genel özdeğer ve özvektör hesabı</b> – Eigen03 program kodu	<b>240</b>
<b>34. Genel özdeğer ve özvektör hesabı</b> – Eigen04 program kodu	<b>244</b>
<b>35. Genel özdeğer ve özvektör hesabı</b> – Dsearch program kodu	<b>262</b>
<b>36. Doğrusal olmayan fonksiyonların kökleri(sıfır noktaları)</b>	<b>269</b>
Bolzano metodu, program kodu	
Regula-Falsi metodu program kodu	
Dekker-Brent metodu, program kodu	
Newton-Raphson metodu, program kodu	
Bairstow metodu, program kodu	
Müller metodu, program kodu	
Jenkins-Traub metodu, program kodu	
<b>37. Min-Max: Bir fonksiyonun minimum-maksimum değerlerinin belirlenmesi</b>	<b>312</b>
Golden Ratio search metodu ve programı	
Brent metodu ve programı	
Nelder-Mead metodu ve programı	
Steepest Descent metodu ve programı	
<b>38. Belirli integral hesabı</b>	<b>329</b>
Dikdörtgen kuralı	
Dikdörtgen orta nokta kuralı	
Yamuk(trapez) kuralı	
Simpson kuralı	
<b>39. Programlar: Tek, iki, üç katlı Belirli integral hesabı</b>	<b>335</b>
Tek katlı integral örnekleri	
Karşılaştırma, yorum	
İki katlı integral örnekleri, yorum	
Üç katlı integral örnekleri, yorum	
Tek katlı integral, Simpson program kodu	
Tek katlı integral, Romberg program kodu	
Tek katlı integral, GaussLegendre program kodu	
Tek katlı integral, AdapteSimpson program kodu	
Tek katlı integral, RecursiveAdapteSimpson program kodu	
Tek katlı integral, TanhKurali program kodu	
İki katlı integral, Yamuk2	
İki katlı integral, Simpson2	
İki katlı integral, Romberg2	
İki katlı integral, GaussLegendre2	
Üç katlı integral,GaussLegendre3	
<b>40. Sıralama ve arama metotları(Sorting-Searching)</b>	<b>366</b>
<b>41. Programlar: Sıralama(sorting) metotları</b>	<b>369</b>
Sayısal sıralama	
Alfasayısal sıralama	
Karşılaştırma	
Bubble sıralama program kodu	
Insertion sıralama program kodu	
Shell sıralama program kodu	
Gnome sıralama program kodu	
Heap sıralama program kodu	
Quick sıralama program kodu	
QuickAlfa Türkçe dizin sıralama program kodu	
<b>42. Programlar: Arama(searching) metotları</b>	<b>379</b>
Sayısal arama	
Karşılaştırma	
Binary arama program kodu	
Jump arama program kodu	
Squential arama program kodu	
<b>43. Kaynaklar</b>	<b>384</b>
<b>44. EK: Hesap makinesi kullanımı</b>	<b>386</b>